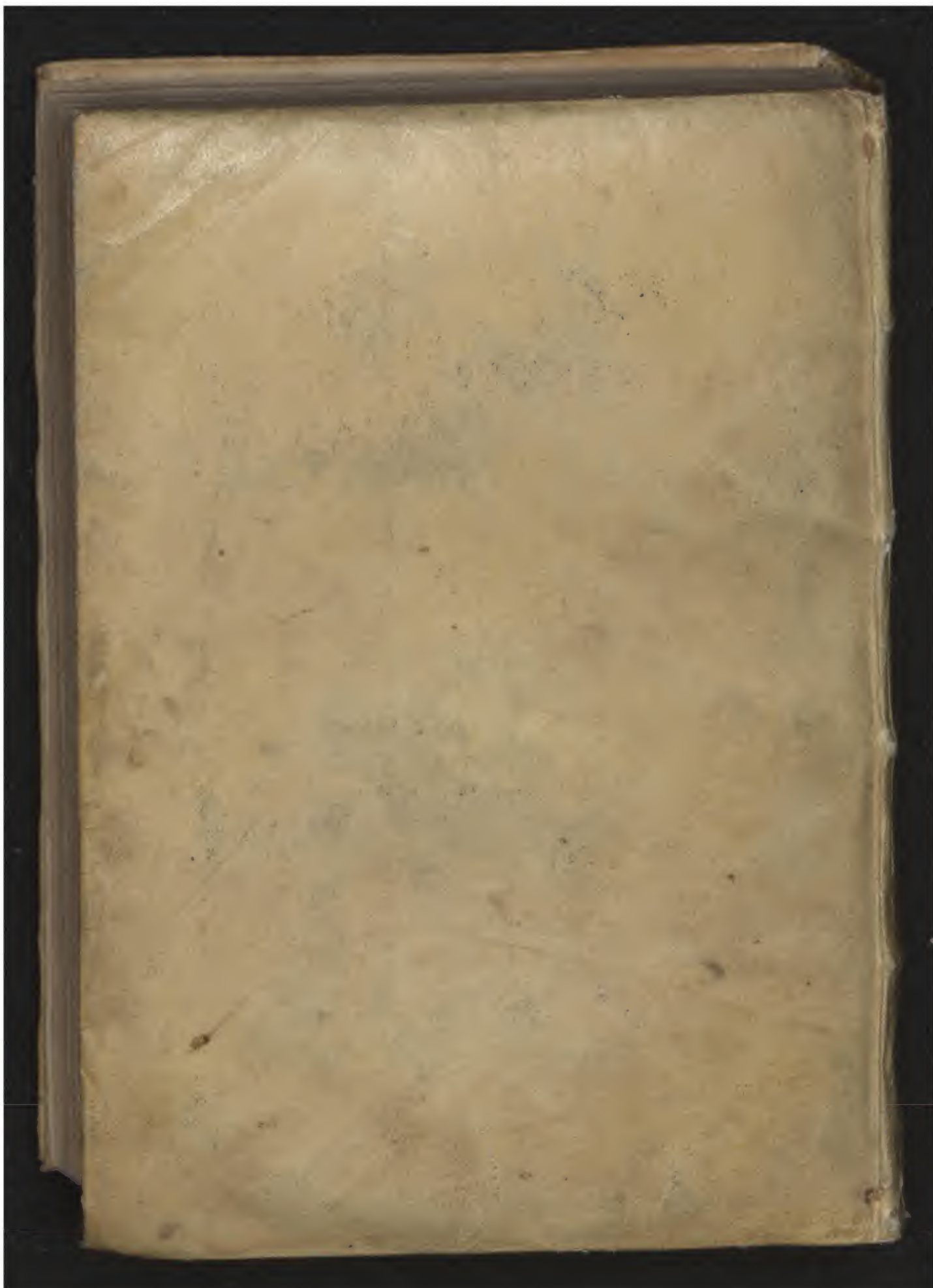




Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.135

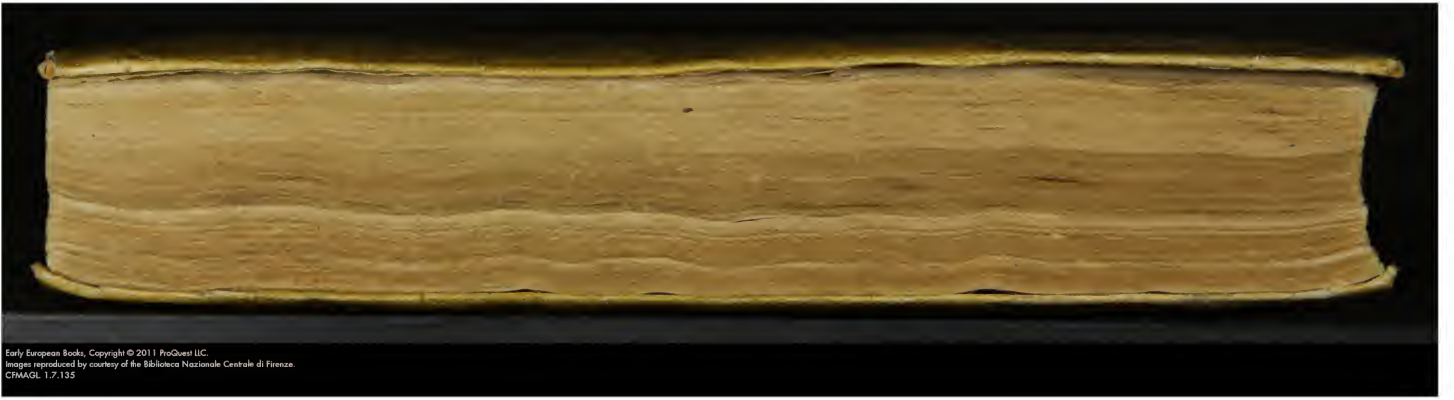




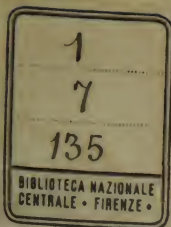
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.135



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.135

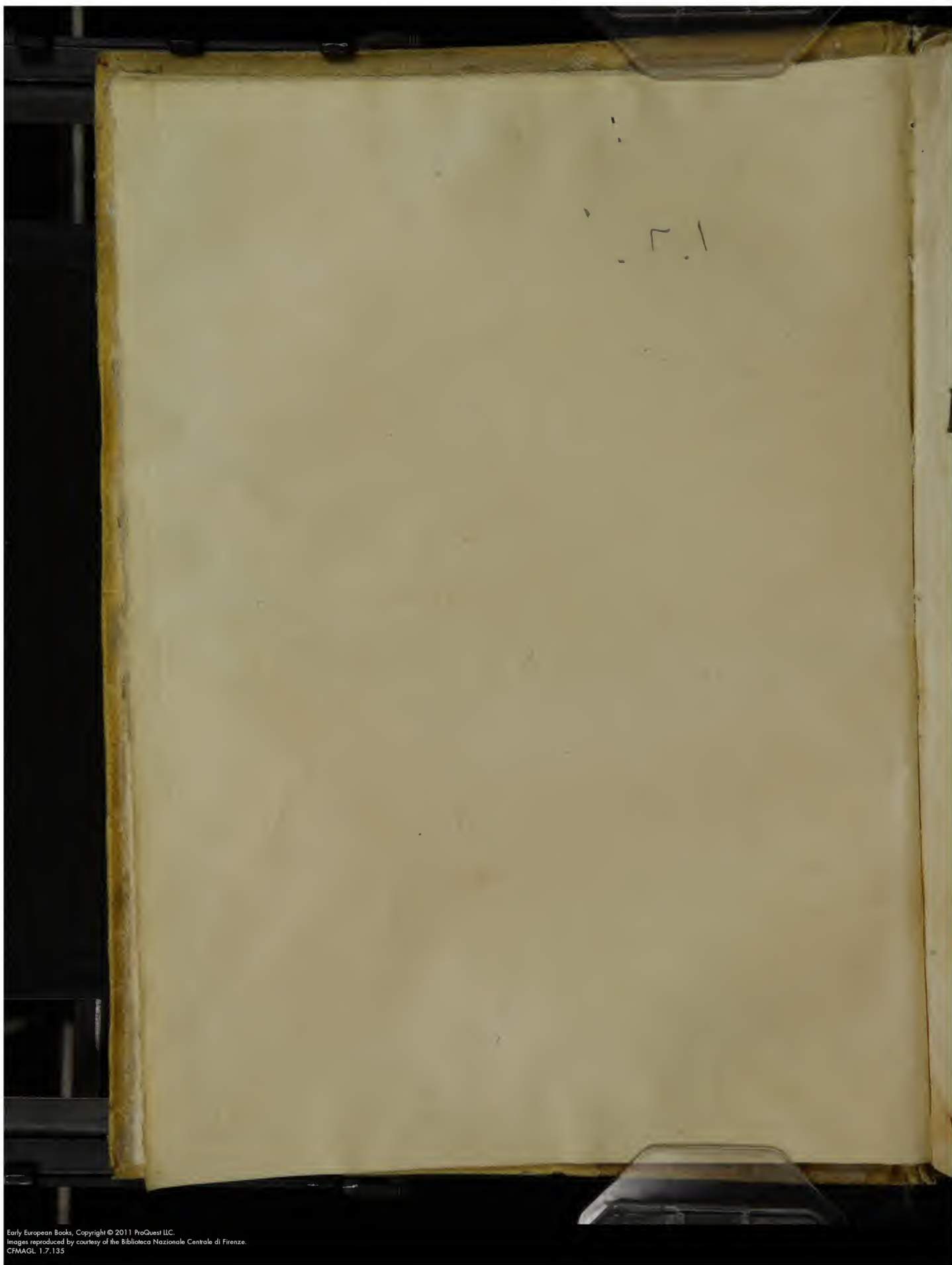


Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.135



1.7.135

GEOMETRIA
LIBRO I



EXERCITATIONES
GEOMETRICÆ
S E X.

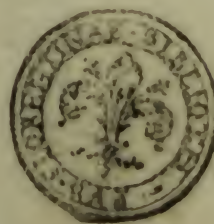
EXERCITATIONES
GEOMETRICAE
S E X

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ S E X.

- I. De priori methodo Indiuifibilium.
- II. De posteriori methodo Indiuifibilium.
- III. In Paulum Guldinum è Societate Iesu dicta Indiuifibilia oppugnantem.
- IV. De vsu eorundem Ind. in Potestatibus Cossicis.
- V. De vsu dictorum Ind. in vnif. diffor. grauibus.
- VI. De quibusdam Propositionibus miscellaneis, quarum synopsis versa pagina ostendit.

*Auctore F. Bonauentura Caualerio Mediolanensi Crdinis Iesuatorum
S. Hieronymi Priore, & in Almo Bononiensi Archigymnasio
primario Mathematicarum Professore.*

AD ILLUSTRISSIMOS, ET SAPIENTISS.
SENATVS BONONIENSIS
QUINQVAGINTA VIROS.



BONONIÆ, Typis Iacobi Montij. 1647.

Superiorum permisso.

SYNOPSIS.

Præfatæ Exercitationis Sextæ, quæ sine Indivisibilibus procedit.

De modo facili describendi Sectiones Conicas, & in omnibus uniformi.	pag. 445
De mirabili quadam vi parabolica.	pag. 451
De Perspicillorum focus.	pag. 458
De descriptione Parabolæ per quatuor data Puncta in angulis quadrilateri, cuius duo saltem opposita latera sint extra concurrentia.	pag. 496
De inveniendâ puncto, quod à tribus datis quibusvis distet secundum minimam quantitatem.	pag. 504
De inveniendis lateribus trianguli æquicruri ex data area, & perimetro eiusdẽ.	pag. 511
De ratione primæ regulæ Problematis tertij meæ Centuriæ.	pag. 519
De magnitudinum incommensurabilitate.	pag. 526
De motu puncti in circulo.	pag. 528
De foco speculi spherici concavi.	pag. 532
De solido infinite longo æquali finito.	pag. 536
De Hydraconisterio, hoc est Vase aquarum circulatorio.	pag. 537



ILLVSTRISSIMI.
ET SAPIENTISSIMI
DOMINI.



Apientiam tanquam Hominis
procreatricem nobilissimam
prudentissimi quamplures,
interquos est Cicero 7. de fi-
nibus, agnouerunt viri, ac
venerati sunt, illa nanque me-
liori luto præcordia fingens, vno loue mi-
nores efficere nouit, quos literis insigniori-
bus satos esse eadem probauit; haud equi-
dem



3

dem

dem fallar ego si dixerim, quod ipsamet *vi-*
atrix fortuna prima docens rectum SAPIEN-
TI A plurima felix, ut canebat ille, felicis-
simæ Urbis Felsineæ vestræ (Senatores sapien-
tissimi) Solo, & Cœlo multis iam ab sæculis
desponsata fuerit; fecundissimum enim Bo-
noniense Cœlum Studiorum Parens admira-
bile docet in æternitatem, & viros profun-
dissimæ doctrinæ innumeros profudit sem-
per. Quid ni igitur ego, vitali hac aura octo-
decim ab hinc annis perfruens, illustri Profes-
sionis primariæ Mathematicarum apud Vos
auctus titulo, Sapientiæ ipsius qualis qualis fi-
lius & alumnus non dicar, & habear? cum
itaq; me non diuitem sapientiæ habeam sed à
diuite sapientia adiutum sperem, omnia me
etiam vobis debere verissima confessione præ-
dicabo, grati vndè animi signa in publicum
prodire sæpe sæpius gestiunt. Discursuam
rerum cognitionem ex præcognitorum vi, &
efficatia firmitatem, & certitudinem adipisci
docebat Aristoteles; quam veritatem in me
ipso comperi abunde exemplificatam, dum
vestræ benignitatis, & liberalitatis præexi-
stentia, & præcognitio illam mihi tribuit ef-
fica-

mao

fica-

ficatiam, atq; illud animi robur est impartita,
vt his Exercitationibus lucubrandis, scriben-
dis, atq; cudendis, alioquin debillimus, suffe-
cerim.

*Omnia deficiūt, animus tamen omnia vincit,
Ille etiam vires corpus habere facit.*

quemadmodum canebat Ouidius. O' mu-
nera, ò sapientiæ nunquam effatam Glo-
riam! non possum propterea isthæc omnia
mente, manuq; non versare diurna, noctur-
naq; simul, & vt loquar cum Poeta Sulmo-
nense non Poeticè *Semper in oblita repetam quæ
munera mente*. His ergò Exercitationibus
Mathematicis spiritus, quos potui eruditiores
à vobis mihi præstitos, atq; concessos in aciem
deduxi, in campumq; & arenam docti certa-
minis pro veritatis defensione euocaui, & has
vobis dicandas, & vouendas iure meritò duxi,
quia iacentes artes omnes, liberales erigendi,
atq; sublimandi ea polletis auctoritate, vt ir-
rita quoque fieri conspiciantur in dies quot
quot orbem ipsum doctrinarum supplantare
iactant aduersantia machinamenta; quò spe-
ctat illud aureum verè Socratis effatum, in bel-
lo scilicet auro ferrum præstare, at in ciuili vita
pri-

primas tenere eruditionem : iure ergo per
quam optimo vobis, Italicarum, immò totius
orbis præcipuarum Athenarum Patres, hæ
debētur Exercitationes, qui in perpetua Exer-
citatione ornandi, & adaugendi doctrinas
omnes, & doctrinarum veros Asseclas felici-
ter estis. Felicissimi diutissimè viuite.

Bononiæ die 7. Nouemb. Anni 1647.

DD. VV. Illustris.

Deditis. & Deuinctis. Cliens

F. Bonauentura Cavalierius.

Lectori Beneuolo.



Non una quidem, sed plures, & haud inefficaces impulere me causa ad has Exercitationes Mathematicas, et meditandas, & publici iuris faciendas, amice Lector, nec me absterruit, aut à proposito auertere potuit, quod in hoc saeculo ingeniorum valdè sublimiū feraci impossibile ferè videatur quidquam noui in medium proferre, vnde vltioribus ausibus locum praeipuisse tot opera nobilissima, & Aritmetica, Astronomica, & Geometrica nostris hysce temporibus Mercurij, aut Iouis ipsius, vel celsioris Astris Calamo dictata, censeri possint; alacri animo arctissimam hanc triui semitam, quae ad virtutis cliuum ducit Non datur ad Mulas currere lata via canebat ille, quia scientiā, non solum scientia præstatiorem esse, sed & modum exponendi scientiā aliquam modo alio eandem exponendi scientiam præferri didici ex Philosophorum principe Aristotele; difficilem quidem prouinciam agnouit, sed pulchram, & idè iucundam, & exceptabilem Non iuuat ex facili lecta corona iugo Canebat Prop. l. 4. eleg.

elez. Rethorica ne dicam Sophistica pigmenta
artifitiosè nimis usurpata veritati faciem ita per
linire possunt, & immutare, ut aniles propositio-
nes speciem viraginum ementiantur, & tãquam
solida scientificarum conclusionum fundamenta
à mediocribus ingenijs accipi, & haberi possint;
erit quidem nouum, & simul utilissimum in-
uentum veritatis faciem nudare, personam illi
detrabere, & velamenta argumentorum appa-
rentium reuelare, quibus coloribus insusistenti-
bus cognitis, atq. perspectis intellectuum lumina
illustrabuntur, & perficientur egregiè; adde
quod ex docta amulatione virtus augefcit, & in
exactam venit cognitionem, ex qua Gloria con-
surgit Immenſum Gloria calcar habet appositè
vates ille: Gloriosam sanè existimaui fore cum
præclarissimo, & doctissimo Guldino dissertatio-
nem, ut meam Indiuifibilibum tuerer doctrinam,
& ostenderem obiecta rationum pigmenta, esse
acutissimi quidem, & nobilissimi ingenij inuen-
ta, sed ne utiquam talia, quæ mea Indiuifibilibum
Geometria re ipsa quicquam officiant, & hæc
fuit causarum, quas innui superius, potissima, pro-
pter quæ in calamam arripui ad ostendendum
præcipuè meas Geometria Indiuifibilibum à me
iam

iam pridem editas, assertiones à veritate nusquā
aberrasse, sed eidem veritati Indivisibiliter iunctas
fuisse, quod si prastitero, ut spero, opera pretium
in reliquis etiam fecisse arbitrabor. Vna etenim
virtus repulsæ nescia lordide Hęc manet, hæc
avidos effugit vna rogos. Sic lyrici, & Sul-
monensis carmina monent. Alia accedit causa
huiusce mea scriptionis, & apud me non exigui
momenti, quod meum docendi è primo subsellio
Mathematicas disciplinas in hoc Bononiensi Ar-
chigymnasio munus alicuius fructuosi profectus
in iisdem facultatibus maturationem promoue-
bat; literaria studiosorum militia tessera expe-
tebat; & Minerualis tādē Res publica satisfac-
tionem quandam pro doctrina prolata tutela, &
indemnitate contrā, non modò ingeniosa obiecta,
sed cōtra ipsius otij destructoris vires occultas im-
peravit quodammodo; altius enim animo meo inse-
dit utilissima, & aurea illa Amasis antiqui Aegy-
ptij Regis lex ad omnes trāsferenda hominū ordi-
nes, & ætates proportionabiliter, qua quilibet
propria rationem vita antea cta certo tempore
reddere cogebatur; hanc moralem mihi necessita-
tem hac euulgandi scripta scientiarū, & pulcher-
rimæ veritatis amor, otijq; & inscitia turpissi-
ma

si in expiabile itidem odium imperarunt. In his habebis scriptis, (candide Lector) meam non minus candidam in te fidem, & iuuandi contentionem, quā multa scitu digna, & utilia, ut reor, quorum te iudicem aequissimū, sed non nisi tota, ut aiunt, lege perspecta, appello; in prima speciatim harum sex Exercitationum sincera offeretur tibi intentio mea, ambitionis, & peruiatiae vitio carens, & boni, veri; solum appetens. In secunda earundem tractandarum materierum exponetur series, & Indivisibilium dilucidabitur utilitas, in qua assentiēs Indivisibilibus omnes demonstrationes praterire poteris, quae sūt à pag. 116. usq; ad pag 174. in tertia Clarissimi Antagonistae laudes recensentur, quibus ullā in re ex responsionibus afferendis detrahendum esse solemnis fit protestatio. In Quarta extenditur Indivisibilium admiranda utilitas in omnibus cosmicis potestatibus. In quinta noua traditur speculatio circa diffformes grauitates ponderandas. In sexta demum variorum problematum elucidatio pro iucundo quodam Par ergo ab Indivisibilium doctrina nimis seuera diuisibili est adiecta. In hoc ego volebam ante mearum Exercitationum lectionem te esse exercitatum. Vale.

EXER-



EXERCITATIO PRIMA.

In qua Prioris Methodi Indivisibilium
fundamenta enucleantur.



PRODIIT in lucem ferè decem ab hinc
annis mea Geometria, novis superstru-
cta fundamentis. & in Lib. 7. distributa
cui propterea titulū feci. Geometria In-
divisibilibus continuorū noua quadā ra-
tione promota, &c. Eandē tamen hic,
breuitatis causa, Geometriā Indivisibiliū appellabimus. Quo-
niā verò nulla amplius inveniuntur penes Bibliopolas exēpla-
ria, propterea nunc aliquantulū & huic defectui supplere vo-
lui, & ijs pariter satisfacere, qui vel dicta carent Geome-
tria, vel habentes, totam videre fastidiunt, cum tamen ho-
rum Indivisibilium saltem usum cupiant intelligere. Hoc
in præsenti, ac subsequenti Exercitatione præstare con-
tendi, ijs tantum è dicta Geometria desumptis, quæ magis ad
Lectoris instructionem circa dictum usum opportuna visa
sunt; adiectis & Notis per numeros digestis, quibus huc ex
eadem translata, nonnihil maioris claritatis aquirant. Acces-
sit & ratio, quod cum Guldinus in sua Centrobarica contra
dicta Geometria fundamenta quasdam dubitationes in me-

A

diurn

diū attuleris (quarum erit in tertia Exercitatione discussio) oportuit prius disputationis subiectum Lectorem edoceri, ut eiusdem satis capax, legitimam subinde ferre possit sententiam, an aliquid hinc Geometris sit sperandum utilitatis, vel tamquam pseudogeometricum novum hoc demonstrandi genus sit prorsus reiiciendum. Certe si fructum Indivisibilium ope hucusque collectum, præcipue (ut meorum inuentorum in supradicta Geometria tenuitatem silentio prateream) industria, ac solertia præstantis, & acerrimi Geometrae, ac Ser. Etruria, Magni Ducis Mathematici Euangelista Torricellij attentè consideremus, illa non omnino videbuntur negligenda. Iam enim toti Reipublicæ Literariæ satis constat in illius Operibus Geometricis, quam faciliter difficiliorum Problematum solutionem per hæc obtinuerit. Vixote in multiplici per ipsa quoque Indivisibilia quadranda Parabola ratione: in dimensione spatij cycloidalis, quæ per hæc adeo peruia facta est, ut Problema visum plerisque Geometris summæ difficultatis, facillimum euaserit. Quinimodò & corpus (quod ipse vocat, Solidum acutum hyperbolicum) infinite longitudinis, Geometriæ insolens, sed tamen admirabile, ut & Cochleam, per Indivisibilia tamen curua (quibus & ipse huiusce methodi fines mirè ampliavit) mensuræ subiecit. Ut verò magis hæc utilitas elucescat, quæ in dicta Geometria à me inuenta sunt, nonnulla quoque adijciam post Exercitationem tertiam, ut hæc omnia, benigne Lector, tuo subijciantur iudicio. Nunc autem sequuntur Notæ in Librum secundum dictæ Geometriæ, ut illius doctrina, in qua præcipue consistit prior methodus Indivisibilium, captu facilius euadat.

In

I.

IN Nova Geometria Indivisibiliū adhibentur ipsamet Conti-
nui Indivisibilia tamquam præcipuum instrumentum ad fi-
gurarum tam planarum, quam solidarum mensuram compa-
randam.

II.

Ad hanc autem duplicem viā instituimus. Priorem quidem
exhibent sex priores dictæ Geometriae Libri (cui primus conti-
neat potius communem utrique viæ Lemmaticam doctrinam,
dum similium figurarum, cylindricorum, & conicorum, quos ex-
plicant definitio 3. 4. 10. & 11. passiones præcipue considerat)
posteriorem verò continet Liber septimus. Utramque igitur non
incongruè methodum Indivisibilium appellabimus, nempe illam
priorem, posteriorem alteram.

III.

In utraq; methodo ad mensuram planarum figurarum ad-
hibentur lineæ rectæ unicuique signatæ lineæ (quæ earum dici-
tur regula) parallele, in ipsis figuris numero indefinitæ mense
descriptibiles, ac desinentes ad duas illas, quæ ex opposito tan-
gunt easdem figuras, dicunturq; in B. def. pr. Libri primi, earum
opposita tangentes, quarum altera tanquam cæterarum paral-
lelarum regula sumi consuevit. Ad mensuram verò solidarum
adhibentur plana unicuique signato plano (quod eorum dici-
tur regula) æquidistantia, in ipsis solidis numero indefinita mēte
descriptibilia, ac desinentia ad duo illa plana, quæ ex opposito
tangunt ipsa solida, dicunturq; in B. def. 2. Lib. pr. eorum oppo-
sita tangencia plana, quorum alterum tanquam cæterorum
æquidistantium planorum regula sumi solet.

IV.

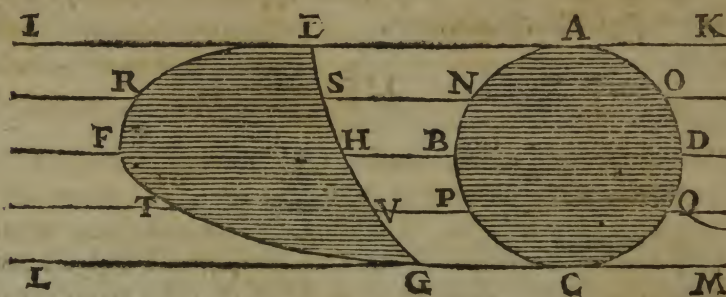
Hinc manifestum est figuras planas nobis ad instar tela pa-
rallelis filis contexta concipiendas esse: solida verò ad instar Li-
brorum, qui parallelis folijs coacervantur.

V.

Cum verò in tela sint semper fila, & in libris semper folia numero finita, habet enim aliquam crassitiem, nobis in figuris planis lineæ, in solidis verò plana numero indefinita, cœu omnis crassitiæ expertia, in utraq; methodo supponenda sunt. His tamen utimur cum discrimine, nam in priori methodo illa consideramus, ut collectivè, in posteriori vero, ut distributivè comparata.

VI.

Sint enim ex. gr. due quæcunq; figura plane, $A B C D$, $E F G H$, in iisdem parallelis, $I K$, $L M$, constituta, earum autem altera, ut $L M$, sumatur tanquam regula parallelarum in eisdem figuris numero indefinito ducibilium, quarum aliquæ in figura, $A B C D$, sint, $N O$, $B D$, $P Q$, &c. & in figura, $E F G H$,



ipsæ; $R S$, $F H$, $T V$, &c. Nunc ergo dupliciter possumus comparare lineas figura, $A B C D$, ad lineas figura, $E F G S$, nempe vel collectivè, hoc est comparando aggregatum ad aggregatum: vel distributivè sc. comparando singillatim quamlibet rectam figura, $A B C D$, cuilibet rectæ figura, $E F G S$, sibi in directum existenti. Iuxta priorem rationem procedit prior methodus, comparat enim ad invicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum solidorum, quorumcumque illa sint. At iuxta posteriorem se habet posterior methodus, comparat enim singulas lineas singulis lineis, & singula plana singulis planis, iisdem in directum constitutis. Vtræque autem tradit suam regulam generalem ad figurarum mensuram comparandam, quarum prior talem profert.

Si in

VII.

Si in duabus quibuscunq; figuris planis, etiam non in eadem altitudine existentibus omnes lineæ unius figuræ, cuius signatæ regulæ parallelamente descriptibiles, & collectivè sumptæ, fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ, cuicunque signatæ regulæ parallelis, mente descriptibilibus, & collectivè sumptis; etiam ipsæ figuræ erunt æquales: & è contra. Vt in schemate nu. 5. si sint æquales, RS, NO, ut &, FH, BD, necnon, TV, P Q & reliquæ, &c. collectivè sumptæ; etiā ipsæ figuræ ABCD, EFGH, erunt æquales. Immo uniuersaliter quancunq; rationem habuerint omnes lineæ ad omnes lineas, eandem habebunt, & ipsæ plana figuræ. Similiter in solidis, si omnia plana unius fuerint æqualia omnibus planis alterius, sumptis usdem quibuscunq; regulis, etiam ipsa solida erunt æqualia: & si omnia plana habuerint quancunq; rationem inter se, eandem habebunt & ipsa solida: & è contra. Vt in eodem Schemate nu. 5. si ABCD, EFGH, supponantur figuræ solida, & fuerint æqualia plana, RS, NO; FH, BD; TV, P Q, & reliquæ &c. etiam ipsæ figuræ, ABCD, EFGH, erunt æquales: vel quancunq; illa collectivè sumptæ, habuerint rationem, eandem & ipsa figuræ solida retinebunt.

VIII.

Posterior methodus paulò strictiorem affert, & est huiusmodi. Si in duabus quibuscunq; figuris planis in usdem parallelis constitutis, quarum altera sit regulæ, singulæ lineæ cum singulis lineis in directum existentibus, communiqu; regulæ parallelis, collatæ, fuerint æquales; etiam ipsæ figuræ erunt æquales. Immo uniuersaliter quancunq; rationem communiter habuerint dictæ lineæ singillarim sumptæ, eandem habebunt & ipsæ figuræ. Sic in solidis si plana unius communi regulæ æquidistantia fuerint æqualia planis alterius eidem regulæ æquidistantibus, etiam ipsa solida erunt æqualia: & quancunq; rationem communiter illa habuerint inter se, eandem habebunt & ipsa solida, quæ tamen supponimus esse in usdem oppositis tangentibus planis, quorum alterum sit eorum communis regulæ.

IX.

Ex his duabus unica regulæ generalissima construi potest, quæ erit totius dictæ Geometriæ compendium, nempe huiusmodi.

FIGV.

FIGURAE TAM PLANAE, QUAM SOLIDAE, SUNT
IN RATIONE OMNIUM SVORVM INDIVISIBILIVM
COLLECTIVE, ET (si in ijsdem reperiatur una quadam
communis ratio) DISTRIBUTIVE AD INVICEM
COMPARATORVM.

X.

Ex his manifestum fit ad indagandam rationem, & mensurā,
duarum datarum figurarum, tam planarum, quam solidarum,
iuxta priorem methodum expendendam esse rationem, quam
habent aggregata omnium Indivisibilium in ijs mente descripti-
bilia iuxta datam regulam. Secundum posteriorem verò qua-
rendum esse an in singulis Indivisibilibus in directum constitu-
tis, siue sint lineae rectae, siue planae, reperiatur quadam communis
ratio. Etenim eandem habebunt & ipsae figurae.

XI.

Vt verò Lector de supradictorū congruentia, praecedentiumq;
regularum generalium, seu dictae regulae generalissimae veritate,
certus fiat, afferemus hic ea quae in dictis 7. Libris descripta ad
explicationem, & confirmationem utriusq; methodi facere vi-
debuntur, ceteris praetermissis. Prius autem exponentur in hac
Exercitatione Prima, quae pertinent ad enucleandam priorem
methodum, & hac suppediet eiusem Geometriae Liber 2. Po-
sterius verò in Exercitatione 2. afferemus, quae spectant ad me-
thodum posteriorem, quorum principalem partem è Lib. 7. desu-
memus. Sequuntur ergo Definitiones, & Postulata eiusdem
Libri secundi.

DEFINITIONES.

I.

Post Secū.
lib. 1.



I per oppositas tangentes cuiuscunq; datae
planae figurae ducantur duo plana inuicem
parallela, recta siue inclinata ad planum datae
figurae, hinc inde indefinitè producta; quorum
alterū moueatur versus reliquum eidem sem-
per æquidistans donec illi congruerit: singulae rectae lineae,
quae in toto motu fiunt communes sectiones plani moti, &
datae

datae figurae, simul collectae vocentur: Omnes lineae talis figurae, sumptae regula una earundem; & hoc cum plana sunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam sunt inclinata vocentur. Omnes lineae eiusdem obliqui transitus datae figurae, regula pariter earundem una; libeat tamen, cum expediet, etiam praedictas vocare, recti transitus, sicuti has, obliqui transitus, eius nempe, qui fit in tali aequidistantium planorum ad datam figuram inclinatione.

E Defin.
Sec. I. 1.

COROLLARIUM.

Hinc patet, quoniam oppositae tangentes regula quaecumque; in data figura duci possunt, etiam omnes lineas datae figurae regula quaecumque recta linea proposita haberi posse, tum recti, tum etiam eiusdem obliqui transitus.

Coro. Pri.
I. 1.

I I.

SI, proposito quocumque solido, eiusdem opposita plana tangentia regula quaecumque ducta fuerint, hinc inde indefinite producta, quorum alterum versus reliquum moveatur semper eidem aequidistans, donec illi congruerit; singula plana, quae in toto motu concipiuntur in proposito solido, simul collecta, vocentur: Omnia plana propositi solidi, sumpta regula eorundem uno.

Coro. Pri.
I. 1.

Post Sec.
I. 1.

E Defin.
I. 1.

COROLLARIUM.

Hinc etiam discimus, veluti propositi solidi opposita tangentia plana quaecumque regula duci possunt, ita eiusdem omnia plana regula quocumque plano haberi posse.

Coro. Pr.
I. 1.

I I I.

SI oppositis tangentibus planis occurrant interius duae rectae lineae, una perpendiculariter, reliqua oblique; puncta, quae sunt communes sectiones propositae lineae perpendiculariter incidentis, & singulorum planorum, quae collecta dicuntur, omnia plana (ita tamen producta, ut easdem secare possint) siue puncta, quae sunt communes sectiones eiusdem, & moti plani, fiuntque in toto motu, simul collecta vocentur: Omnia puncta recti transitus propositae lineae perpendiculariter incidentis; quae in oblique incidente vocentur, eiusdem obliqui transitus.

COROL.

COROLLARIUM.

EX hoc habetur singula puncta recti transitus, vel obliqui, incidentis lineæ, nedum esse communes sectiones illius, & singulorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana-propositi solidi, sed etiam, si per talem incidentem extendatur planum, esse communes sectiones illius, & singularum quæ collectæ dicuntur: Omnes lineæ planæ figuræ, cuius oppositæ tangentes sunt communes sectiones plani eiusdem figuræ, & oppositorum tangentium dicti solidi: nam motum planum designat in plano secante rectam lineam, & insimul punctum in incidente, quod reperitur in illa recta lineæ, & ideo idem punctum est communis sectio tum moti plani, & rectæ incidentis, tum vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ (ita tamen productæ, vt hanc incidentem secare possint) & eiusdem incidentis.

IV.

SI inter alterum extremorum punctorum propositæ rectæ lineæ, & singula puncta, quæ simul collecta dicuntur, omnia puncta recti, vel eiusdem obliqui transitus eiusdem, sumamus interiacentes lineas, dicantur istæ simul collectæ: Omnes abscissæ propositæ lineæ, quas (etiam si non exprimatur) vocari supponemus recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si puncta sint eiusdem obliqui transitus.

V.

Rectæ lineæ verò in antecedentis definitionis propositæ lineæ inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicuntur: Residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si sumpta puncta sint eiusdem obliqui transitus.

COROLLARIUM.

Hinc liquet cuilibet abscissæ in proximis definitionibus propositæ lineæ respondere vnam ex residuis, ita vt tot sint illæ, quæ dicuntur residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ, quot illæ, quæ dicuntur eiusdem omnes abscissæ,

abscissæ, siue recti, siue eiusdem obliqui transitus, nam residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ interiacent inter reliquum extremum eiusdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum, interiacent omnes abscissæ.

VI.

SI pro qualibet earum, quæ dicuntur omnes abscissæ propositæ rectæ lineæ, ipsa proposita lineæ, siue eidem æqualis, semel assumpta intelligatur, istæ, simul collectæ dicentur: Maximæ omnium abscissarum propositæ lineæ, vel subintelligentur semper esse omnium, etiam si dicerentur solummodò: Maximæ abscissarum.

COROLLARIUM.

ET quia omnes abscissæ tot sunt, quot omnes residuæ, maxime verò omnium abscissarum tot sunt, quot omnes abscissæ, nam cuilibet abscissæ respondet una maximarum, idè maximæ omnium abscissarum propositæ lineæ tot erunt, quot etiam residuæ omnium abscissarum, quocumq; sint omnes abscissæ, vel residuæ; idè pro qualibet residua habemus quoq; unam maximarum; ijs semper recti, vel eiusdem obliqui transitus assumptis.

VII.

SI cuilibet omnium abscissarum propositæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta lineæ cuidam æqualis, compositæ ex omnibus abscissis, & adiunctis, simul collectæ dicentur: Omnes abscissæ propositæ lineæ adiuncta tali, nempe adiuncta illa, cui, quæ adiunguntur, sunt æquales: si verò fieret hæc adiunctio residuis, vel maximis omnium abscissarum, pariter dicerentur: Residuæ, vel Maximæ omnium abscissarum adiuncta eadem; recti semper, vel eiusdem obliqui transitus.

B

Pro-

A

Proposita quacunque plana figura, & in ea ducta ut-
cunq; recta linea vsq; ad ambitum hinc indetermina-
ta, si ipsa recta linea describere quamcunq; figuram planam
intelligatur, non existentem in plano propositæ figuræ, ac
deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propositæ
figuræ, sumptæ regula iam ducta linea (& recti transitus si
descripta figura sit erecta plano propositæ, vel eiusdem ob-
liqui transitus, si illi sit inclinata, eius nempe transitus, qui
fit in tali inclinatione) describere intelligantur figuras pla-
nas similes, ac similiter positas, & æquidistantes primò de-
scriptæ, ita ut omnes describentes sint descriptarum figura-
rum lineæ, vel latera homologa; omnes descriptæ figuræ si-
mul sumptæ dicentur: Omnes figuræ planæ similes talis pro-
positæ figuræ, sumptæ regula earum una, vel regula etiam
ipsa linea, vel latere describente; ut si descriptæ figuræ essent
quadrata, hæ dicerentur. Omnia quadrata talis propositæ
figuræ, vel si essent triangula æquilatera dicerentur. Omnia

B triangula æquilatera eiusdem.

B.

Solidum, cuius omnes descriptæ figuræ similes sunt om-
nia plana, dicitur: Solidum simile genitum ex proposita
figura iuxta eandem regulam, iuxta quam sumptæ omnes
dictæ figuræ similes fuerunt. Quæ igitur ex figuris propositis,
ut sic generantur, dicentur absq; alio addito: Solida simila-
ria genita ex propositis figuris iuxta regulas omnium simi-
lium figurarum, quæ ipsorum euadunt omnia plana, propo-
sitæ autem figuræ, eorundem genitrices figuræ vocabuntur.

C

C.

Cum verò duarum genitricium utcunq; figurarum om-
nes descriptæ figuræ nedum similes erunt, quæ reperientur
in earum unaquaque, sed etiam quæ sunt unius, inuenien-
tur similes omnibus figuris similibus alterius propositæ fi-
guræ, fuerint autem in utroque solido figuræ æquæ eleuatæ
super plana genitricium figurarum, tunc solida genita ex
propositis figuris iuxta regulas eas, quæ sunt regulæ omniū
similium figurarum earundem propositarum genitricium
figurarum, dicentur solida inter se, vel ad inuicem similia
genita

genita ex dictis figuris iuxta dictas regulas, vel intelligitur semper esse inter se, seu ad invicem similia, licet hoc non exprimitur, quotiescunque contrarium aliquid non adijciatur.

D.

Cum autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine existentes, rectangula sub singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ unius propositarum figurarum, & illis in directum respondentibus in alia figura simul sumpta sic vocabimus, nempe Rectangula sub eisdem figuris, regula eadem, quæ est omnium sumptarum linearum regula.

E.

Cum verò propositarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius basis, iuxta quam altitudo sumitur, sit sumpta pro regula, dicta rectangula vocabuntur etiam: Omnia rectangula reliquæ figuræ, æquæ alta ac eorum unum.

APPENDIX.

Pro antecedentium Definitionum explicatione.

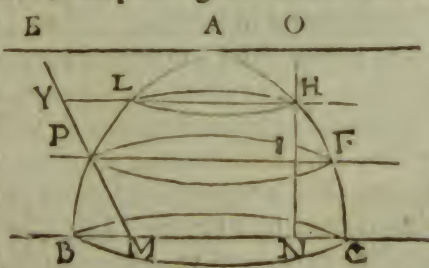
Si figura plana quæcunque, ABC, duæ eiusdem oppositæ tangentes utcunque ductæ, EO, BC, intelligantur autem per, EO, BC, indefinitè extensa dua plana invicem parallela, quorum quod transit per, EO, ex. g. moveatur versus planum per, BC, semper illi æquidistans, donec illi congruat, igitur communes sectiones talis moti, siue fluentis plant, & figuræ, ABC, quæ in toto motu sunt, simul collectæ à me vocantur: Omnes lineæ figuræ, ABC, quarum aliquæ sint ipsæ, LH, PF, BC, sumptæ regula earum una, v. g. BC, recti transitus, cū plana

Coro. Pr
I, 1.

Defin. I.
huius.

na parallela rectè secant figurā, ABC, eiusdem obliqui transitus, cum illam obliquè secant, eius scilicet transitus, qui in tali inclinatione sit.

Intelligamus nunc ABC, esse solidū, cuius



B 2

duo

Definit. 2.
huius.

duo opposita plana tangentia sint, quæ transeunt per, EO, BC, moveatur autem adhuc planum per, EO, extensum, versus planum per, BC, semper illi æquidistans, igitur huius plani moti, siue fluētis conceptæ in solido, ABC, figuræ, quæ in toto motu fieri intelliguntur, voco: Omnia plana solidi, ABC, sumpta regula eorum vno, quorum aliqua repræsentare possunt plana, LH, PF, BC.

Def. Tert.
huius.
Def. Qua
huius.
Def. Qui.
huius.
Def. Sept.
huius.

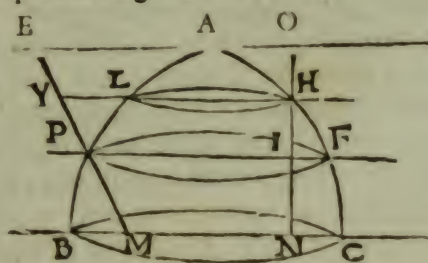
Vltius duæ rectæ lineæ, ON, EM, occurrant planis per, EO, BC, transeuntibus iam dictis in punctis, O, N, E, M, quarum, ON, perpendiculariter, EM, verò obliquè illis incidat, puncta igitur, quæ sunt communes sectiones omnium planorum solidi, ABC, productorum, si opus sit, & rectæ, ON, vocantur ipsius omnia puncta recti transitus, quarum aliqua sunt puncta, H, I, N, quæ inter ipsa, & extremum punctum, O, continentur, vt ipsæ, OH, OI, ON, dicuntur abscissæ, quæ inter eadem puncta, & aliud extremum, quod est, N, continentur, vt ipsæ, NI, NH, NO, residuæ omnium abscissarum; tot æquales ipsi, ON, quot sunt omnes abscissæ, siue residuæ omnium abscissarum, ON, dicuntur maxime abscissarum, siue omnium abscissarum, ON, quibus si adiungatur aliqua recta linea, dicuntur abscissæ, residuæ, siue maxime adiuncta tali linea, omnes quidem recti transitus in recta, ON, in, EM, verò dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempe, qui in tali inclinatione fit.

Dicitur autem in Coroll. Defin. 3. eadem puncta recti transitus, siue obliqui, fieri tum ab omnibus planis propositi solidi, vt, ABC, tum ab omnibus lineis plani per easdem incidentes extensi, vt ex. g. plani, quod transit per, EO, BC, quod quidem etiam transeat per ipsas, ON, EM, idem. n. planum, quod in solidum, ABC, producit figuram, LH, in figura plana, ABC, producit rectam, LH, & in recta, ON, punctum, H, in, EM, verò punctum Y, quod transit, HL, producta, & ideò dico puncta, HY, posse dici etiam effecta à recta, YH, & sic omnia puncta recti transitus, quæ nempe sunt in, ON, nedum fieri à dictis planis parallelis, sed etiam à lineis parallelis figuræ, ABC, productis si opus sit, idem intellige in recta, EM, cuius omnia puncta dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempe, qui in tali inclinatione fit.

Pro

Pro intelligentia Defin. 8. supponatur in figura plana proposita, ABC, utcumq; recta, BC, quæ describat figuram planam, BC, elevatam super, ABC, singulæ autem lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, ABC, sumptæ regula, BC, recti transitus, si figura, BC, sit erecta figuræ, ABC, vel eiusdem obliqui transitus (qui nempe in inclinatione descriptæ figuræ ad planum, ABC, fit, si figura, BC, sit inclinata ad figuram, ABC,) describere intelligantur figuras planas similes, similiter positas, & æquidistantes ipsi figuræ, BC, ita ut describentes sint descriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa, quarum

D. Defin. 10. l. 1.



A. Def. 8. huius.

Solidum, cuius omnes dictæ figuræ similes ipsius, ABC, sunt omnia plana, dicitur, solidum simile genitum ex figura plana, ABC, iuxta regulam ipsam figuram, vel lineam, BC, & ipsa figura, ABC, appellatur genitrix eiusdem solidi, quod esse intelligatur ipsum, ABC.

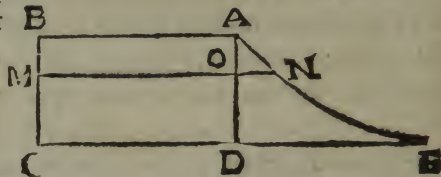
B. Def. 9. huius.

Si verò adsit alia figura plana, cuius omnes lineæ, quædā regula sumptæ, describant similes figuras planas, & similiter positas, omnes vni cuidam æquidistantes, & similes figuræ, BC, & æquæ elevatas super plana genericiū figurarū, solida similia genita ex istis figuris, iuxta dictas regulas vocabuntur ulterius inter se, vel ad invicem similia, licet cum dicemus, solida similia genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam sine alio addito, intelligemus semper ea esse inter se, vel ad invicem similia, etiam si non exprimitur, hoc aut in nisi aliter explicetur.

C. Def. 8. huius.

Pro declarandis D. & E. Defin. 8. exponantur duæ figuræ in eodem plano, & in eadem altitudine, quæ sint BC DA, AT E, sit autem altitudo figuræ, ABCD, sumpta respectu ipsius rectæ, CD, & altitudo figuræ, ADE, respectu ipsius, DE,

recte, CD, & altitudo figure, ADE, respectu ipsius, DE, quę intelligantur abscindere ex eadem parte à communi altitudine partes equales, quę sibi in directum erunt, sint verò ambę communis regula omnium linearum ductarum figurarum, & sit ducta alia utcumq; eidem, CE, parallela, MN, cuius



Definit. 1.
huius.

portio manens in figura, BD, sit, MO, & manens in figura, ADC, sit, ON; rectangula igitur, CDE, MON, & reliqua rectangula, quę sub qualibet earum, quę dicuntur omnes lineę figure, BD, (regula, CE, vel, CD,) & illi in directum posita in figura, ADE, continentur (erit autem semper aliqua eidem in directum, præterquam fortè illi, quę tangit figurā, ut, BA, potest. n. in figura, ADE, illi vice lineę vnum punctum tantum respondere, ut, A, hoc tamen rectangulum non computatur, quia nihil illis adiungit, erit inquam hæc linearum respondentia in figura, ADE, eis, quę sumuntur in, BD, nam sunt in eadem altitudine sumpta respectu earundem linearum, sub quibus rectangula continentur) simul sumpta vocamus: Rectangula sub figuris, BCDA, ADE.

D. Def. 8.
huius.

Si verò contingeret alteram earundem figurarum esse parallelogrammum, & regulam omnium eiusdem linearum esse vnum eiusdem laterum, ut, CD, respectu cuius sumitur altitudo, tunc quia illę, quę æquidistant ipsi, CD, in parallelogrammo, BD, sunt eidem, CD, equales, & sunt latera dictorum rectangulorum, ideò dico, nos ea vocare posse nedum rectangula sub his figuris, sed etiam sic appellare, nempe: Omnia rectangula figure, ADE, (quæ non est necessariò parallelogrammum) quęquē alta, ac vnum eorum. i. ac rectangulum, CDE, altitudinis scilicet æqualis ipsi, CD, prout libuerit autem nominentur.

POSTULATA. I.

Def. 1. &
2. huius.

Congruentium planarum figurarum omnes lineę, sumptæ vna earundem, ut regula communi, sunt congruentes; Et congruentium solidorum omnia plana sumpta

pta eorum vno, vt regula communi, sunt pariter congruentia.

II.

Omnes figurę similes alicuius figurę planę sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in qua iacent perimetri omnium dictarum similium figurarum.

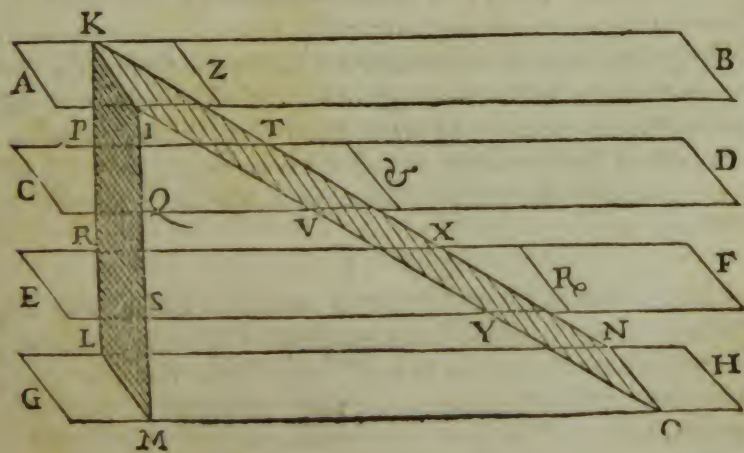
A. Def. 8.
huius.

X I I.

Vt verificari posset regula generalissima superius tradita numero 9. equum erat omnem procul a subiecto nostro varietatem arcere, quā in ipso recognoscendo possemus in hac priori methodo hallucinari. Hoc est congruū erat aggregata omnium Indivisibilium figurarum, quę inuicem sunt comparanda (ijs enim utimur tanquam subiecto) sub quadam uniformi ratione, seu sub quodam determinato spissitudinis, aut constipationis gradu, quicumq; ille sit, semper accipere. Quemadmodum enim duo frustra equalia, vt duo quadrata, decerpta vnum ex tela spissiori alterum vero ex rariori, nō haberent aggregata ex suis filis equalia sed necesse esset vtraq; abscissa esse ex tela eiusdē gradus raritatis, vel spissitudinis in suis filis, vt in virisq; aggregata quoq; ex filis essent equalia. Ita suo modo res supponi debet circa ipsarum figurarum Indivisibilia, ne in comparatione aggregatorum eorundem possumus hallucinari.

X I I.

Vt verò intelligat Studiosus, qua ratione predictam unifor-



mita-

veritatem in aggregatis dictorum Indivisibilium & agnoscere, & retinere possit videat presens Schema. In hoc enim inter duo opposita plana parallela, AB, GH, interijciuntur duo parallelogramma, KLMI, KNOI, quorum, KLMI, eisdem AB, GH, incidit perpendiculariter, KNOI. verò oblique. Supponatur ergo iuxta primam definitionem planum, AB, moveri versus, GH, semper illi tanquam regula equidistans, donec eidem congruerit: Illud enim fluens, quolibet momento designabit rectas, ut in KLMI ipsas, PQ, RS &c. & in, KNOI, ipsas, TV, XY &c. inuicem parallelas. Igitur tam designabit omnes lineas, KLMI, quam omnes lineas figura KNOI, quæ erunt æquales predictis, unaqueque enim æquatur sibi in eodem plano respondententi in figura, KLMI. Verum omnes lineæ figuræ, KLMI oriuntur ex sectione recta, seu perpendiculari, aut transitu recto, plani, AB, fluentis: & omnes lineæ figuræ, KNOI oriuntur ex sectione obliqua, seu transitu obliquo eiusdem, AB, fluentis cum, KLMI, figura posita fuerit recta, & KNOI, obliqua planis, AB, GH. Ergo, KLMI, se habet ad instar telæ spissioris, & KNOI, rarioris. Quapropter mirum non est omnes lineas, KNOI, istius obliqui transitus, æquari omnibus lineis ipsius, KLMI, recti transitus, & tamen ipsas figuras non æquari, immo parallelogrammum KNOI, infinite potest augeri cum ipsum semper longius ac longius supponere possimus, manentibus semper omnibus eiusdem lineis obliqui transitus, æqualibus omnibus lineis recti transitus ipsius KLMI. Videns ergo hunc diuersum transitum dictæ regulæ generalissimæ veritatem perturbare, propterea dixi in def. prima omnes lineas datarum planarum figurarum sub eodem transitu accipiendas esse, hoc est, vel sub recto, vel sub eodem obliquo transitu, ut retineamus semper eundem in omnibus lineis spissitudinis, vel raritatis gradum, quicumque ille sit, & quacumque necessitatis Geometricæ lege hæc Indivisibilia constipentur.

XIIII.

Similem diuersitatem subeunt & puncta in lineis, IM, IO, Schematis num. 13. designata, quapropter illa recti transitus, hæc verò obliqui transitus in def. 3. appellauimus. Eandem quoque sortiuntur abscissæ, residuæ, &c. unde dicuntur & ipsa recti transitus, ut, IZ, IS, IM, &c. & obliqui, ut IV, IY, IO, &c.

quæ

que sunt abscisse ipsarum, IM, IO. Omnia plana verò non sunt huic varietati obnoxia, supponuntur enim accipi in summo consipationis gradu, quem illis præbet necessitas Geometrica.

X V.

Nota ex dictis sequi duas quascunq; lineas oblata figura, dictæ regule parallelas, debere aequaliter inter se distare, ac due ille, quæ in altera figura, ad quam prædicta comparatur, eisdem respondent in eisdem planis parallelis illas efficientibus, quâdo ille sunt per eundem transitum. Vnde si non aequaliter inter se distarent signum esset non esse eiusdem transitus, sed ab ipsa definitione degenerare. Sic ergo in figura num. 13. apparet lineas parallelogrammi, KNOI, non esse eiusdem transitus cum lineis parallelogrammi, KLMI, quia ex. gr. TV, XY, non aequaliter inter se distant, ac sue correlatiuæ. P Q. RS, ab iisdem parallelis planis designata, unde iuxta Def. primam nequeunt ad inuicem comparari. Per hoc autem soluitur quoddam argumentum contra hæc Indivisibilia, quod suo loco discutietur.

X V I.

Consideratio omnium abscissarum propositæ lineæ, ut & residuarum, ac maximarum abscissarum, vel absolutè, vel etiam adiuncta tali, vel tali lineæ, quamvis opportuna, non tamen est simpliciter necessaria, ut infra declarabitur.

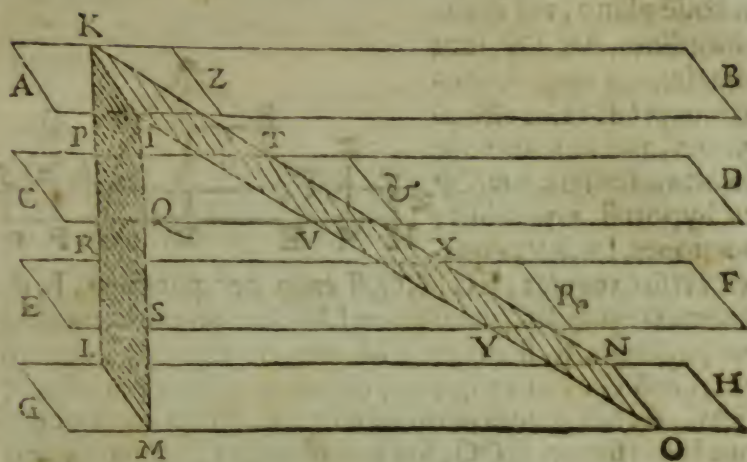
X V I I.

Duplex ratio genesis aliquorum solidorum datur apud Geometras. Prior sit per revolutionem figuræ planæ cuiuscunque circa datum axem, donec redeat unde discessit; & sic generantur apud Euclidem Libro undecimo Elem. def. 14. 18. 21. Sphæra, Conus, ac Cylindrus, & in uniuersum corpora, quæ vocantur rotunda. Posterior genesis sit per motum figuræ aquidistantem: ut si circulus sui centro in sublime feratur per rectam lineam, & semper sit aquidistans cuidam datæ regule, fiet cylindrus. Similiter ex fluxu parallelogrammi orietur paralleleppipedum: & in uniuersum ex fluxu cuiuscunque figuræ planæ orietur corpus, quod vocari solet columnare, & à me dicitur Cylindricus in def. 3. Lib. 1. sequens similitudinem suæ basis genitricis. Cum

C

verò

verò hi duo modi non ultra corpora rotunda, & columnaria extendantur, ut & istorum, & aliorum p̄amplurium corporum ortus sub una quadam uniuersali ratione comprehenderetur, alia eorundem genesis ineunda ratio fuit, quam exhibent sectiones Def. 8. Extenditur autem hæc ad omnia illa corpora, in quibus traiectionis quocunq; planis data regulæ parallelis, oriuntur ex tali traiectione figurae similes, & similiter posita, quas rectè, vel obliquè secans, aut tangens alia figura, illa exhibeat omnes lineas, seu latera homologa dictarum similium figurarum. Hæc autem vocatur genitrix solidi, cuius omnes dictæ figurae similes sunt omnia plana ipsumq; solidum dicitur solidum simile, ut patet in ipsa Def. 8. Hinc sequitur è contra, si sit proposita quacunque figura plana, tanquam genitrix alicuius solidi similis, cuius omnes lineæ recti, vel obliqui transitus, describant similes, similiterq; positas figuras planas uni certæ regulæ parallelas, nos posse concipere solidum simile, cuius prædictæ figurae sunt omnia plana, quodāmodo emanare, seu gigni ab eadem genitrice figura. Ab hac ergo si sit parallelogrammum rectangulum, & regula figura ab uno laterum descripta parallelogrammoq; erecta, emanabit cylindricus rectus: vel si parallelogrammum non sit rectangulum, & figura rectè, vel obliquè ad genitricem descripta, oriatur cylindricus scalenus: hoc est corpora columnaria recta, & scalena. Similiter à triangulis orientur corpora, quæ vocantur pyramidalia, & à me dicuntur Conici in def. 4. Lib. 1. Et ab alijs figuris aliæ corporum species nascentur, ut à circulo Sphæra, ab Ellipsi Sphærois, à Parabola Conoides parabolicum, ab Hyperbola Conoides hyperbolicum; sicuti ab alijs quoq; irregularibus figuris, innumerabiles orientur species solidorum irregularium. Ad horum autem maiorem intelligentiam recolatur Schema num. 13. in quo est regula planum, GH, cui est erectum parallelogrammum, KLMI, & obliquum, KNOI. Nunc supponamus ab ipsis, KI, P Q, RS, LM, &c. omnibus lineis recti transitus, describi quadrata KAI, PC Q, RES, LGM &c. & ab ipsis, KI, TV, XY, NO &c. omnibus lineis obliqui transitus describi quadrata kZI, T & V, X & Y, NHO &c. communi regulæ, GH, parallela. Hic ergo concipere possumus duo solida similia (licet non ad inuicem similia, quia figurae genitrices; k L M I, k N O I, non æquè inclinantur ad similes descri-



descriptas figuras, ut postulat Sectio. C. eiusdem def. 8.) unum genitum à, $kLMI$, per descriptionem omnium eiusdem figurarum seu planorum recto transitu, siue à lineis recti transitus effectam, quod erit corpus columnare, seu cylindricus rectus, posito, kM , esse parallelogrammum rectangulum. Alterum verò fiet à, $kNOI$, per descriptionem obliqui transitus, eritq; cylindricus Scalenus. Hac ergo ratione nostram solidorum genesim fieri intelligimus. Quæ circa definitiones attingisse sufficiat, sequuntur nunc Propositiones eiusdem Libri Secundi.

P R O P O S. I.

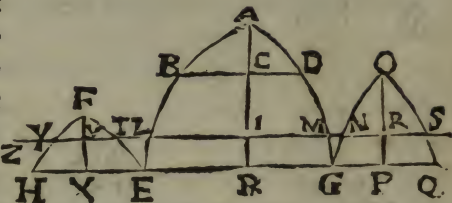
Q Varumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus; & quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Sint duæ planæ utcunque figuræ, EAG , GOQ , quarum regulæ, EG , GQ , utcunque, sit autem figuræ, EAG , altitudo sumpta respectu, EG , ipsa, AB , & figuræ, GOQ , altitudo sumpta respectu, GQ , ipsa, OP . Dico ergo omnes lineas recti transitus figuræ, EAG , sumptas cum regula, EG , ad omnes lineas recti transitus figuræ, GOQ , sumptas cum regula, GQ , rationem habere. Constituantur regulæ, EG , GQ , sibi in directum, & sint totæ figuræ supra ipsas regulas

C 2

in co-

in eodē plano, vel igitur altitudines, AR , OP , sunt æquales, vel non, supponamus primò ipsas esse æquales, abscindantur nūc ab altitudinibus, AR , OP ex hypotesi æqualibus, portiones, IR , RP , æquales versus regulas, EG , GQ , si ergo per punctum, I , duxerimus regulæ, EG , parallelam, LM , hæc producta transibit per punctum, R , fiet ergo, LM , quæ clauditur perimetro figuræ, EAG , una ex ijs, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, EAG , & NS , clausa perimetro figuræ, GOS , una ex omnibus lineis figuræ, GOQ , sumptis omnibus lineis iam dictis, regula communi, EQ , & recti transitus, uti semper intelligemus, nisi aliter explicetur, etiam si id non exprimat. Quoniam igitur si recta, NS , sit minor recta, LM , potest indefinite producta aliquando fieri maior, si hoc intelligamus fieri de cæteris lineis, quæ ab altitudinibus portiones abscindunt æquales versus regulas, EG , GQ , patet quod singulæ, quæ erunt in figura, GOQ , productæ fient maiores ijs, quæ erunt in figura, EAG , sit autem ita facta productio cuiusvis omnium linearum figuræ, GOQ , regula, EQ , ut quæ illi in directum constituitur in figura, EAG , sit portio eiusdē productæ, ut ex. g. ita sit producta, SN , versus, ML , ut ipsam pertranseat perueniens verbi gratia usque ad, T , ita ut LM , sit portio ipsius, TS , patet ergo, quod omnes lineæ figuræ, EAG , erunt pars omnium linearum figuræ, GOQ , sic productarum, & istæ erunt totum, nam illæ istis clauduntur, siue in his totæ reperientur, & aliquid amplius. s. quod de omnibus lineis figuræ, GOQ , sic productis manet extra figuram, EAG : totum autem est maius sua parte, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , sic productæ fuerunt, ut maiores effectæ fuerint omnibus lineis figuræ, EAG . Eadem methodo omnes lineas figuræ, EAG , sic producemus, ut complectantur omnes lineas figuræ, GOQ , iam productas, ut dictum est, & idèd maiores eisdem fiant, magnitudines autem rationem habere inter se dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare



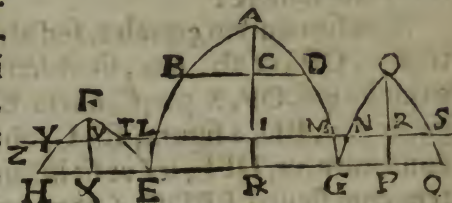
tare possunt, ergo patet omnes lineas figurarum, EAG , GOQ , cum altitudines, AR , OP , fuerint æquales, inter se rationem habere.

Non sint autem æquales, sed altitudo, AR , sit maior altitudine, OP , & ab, AR , sit abscissa versus, EG , ipsa, CR , æqualis ipsi, OP , & per, C , ducta, BD , parallela, EG , intelligatur per, BD , à figura, EAG , abscissa figura, BAD , & ea constituta, ut, HFE , ita ut sit in eodem plano ad eandem partem cum figuris, $EBDG$, (quæ remansit) & GOQ , existente, HE , in directum ipsi, EQ , quod si adhuc altitudo, FX , sit maior altitudine, OP , abscindatur illi æqualis, & sic semper fiat, & disponantur figuræ residuæ, ut earum bases sint in directum ipsi, EQ , & figuræ constitutæ in eodem plano, & ad eandem partem cum figuris, EAG , GOQ , in altitudinibus vel æqualibus, vel non maioribus altitudine, OP . Intelligatur nunc ducta utcumque in figura, GOQ , recta, NS , parallela, GO , quæ erit una ex omnibus lineis figura, GOQ , regula, GO producatuq; ita, ut pertranseat omnes sic dispositas figuras, ut vsq; in, Z , complectetur ergo, SZ , ipsas, LM , YT , & sic quævis omnium linearum figuræ, GOQ , hac lege productæ, complectentur eas, quæ de ipsa manent in figuris iam dispositis. Ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , sic productæ complectentur omnes lineas figurarum sic dispositarum, ergo erunt ad illas simul sumptas, ut totum ad partem, nam illæ in his reperiuntur, & aliquid amplius, ergo erunt illis maiores, omnes lineæ autem figurarum sic dispositarum sunt non minores omnibus lineis figuræ, EAG , ex qua desumptæ sunt, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , sic productæ sūt, ut effectæ fuerint maiores omnibus lineis figuræ, EAG . Eodem pacto ostendemus nos posse vice versa istas illis efficere maiores, ergo omnes lineæ figurarum, EAG , GOQ , sumptæ cum regulis utcumq; suppositis, cuiusvis sint altitudinis sumptæ iuxta easdem regulas, sunt magnitudines inter se rationem habentes. Quod si subter rectam, HQ , adhuc essent portiones consideratarum à nobis figurarum, EAG , GOQ , eodem modo ostenderemus omnes lineas earundem sumptas cum iisdem regulis esse magnitudines rationem inter se habentes, unde integrarum figurarum omnes lineæ essent

Diffin. 4.
1.5. Elem.

sent magnitudines inter se rationem habentes, quod in fig. planis ostendere opus erat.

In figuris autem solidis consimiliter procedemus; nam si in superiori figura intellexerimus, EAG, GOQ, esse figuras solidas, & pro rectis lineis æquidistantibus intellexerimus plana æqui-



distantia, ut pro rectis, EG, GQ, plana EG, GQ, quibus plana, LM, NS, sint æquidistantes ducta, sumptis pro regulis planis, EG, GQ, iisque in directum sibi constitutis. i. ita ut iaceant regulæ in eodem plano, ostendemus nos posse ita producere omnia plana solidæ figuræ, GOQ, ut eadem complectantur omnia plana figuræ, EAG, (si sint eiusdem altitudinis dictæ figuræ) integræ existentis, vel (si non sint) diuisæ in figuras solidas, ex. g. EBDG, BAD, sic dispositas, ut bases, siue regulæ iaceant in eodem plano, & ita, ut omnia plana dictarum figurarum solidarum, vel sint intra opposita plana dictas figuras tangentia, vel nihil eorum extra, unde omnia plana figuræ solidæ, GOQ, sic producta fient totum, & portiones ab eisdem capte in figura solida, EAG, integra, vel diuisa, ut dictum est. i. omnia plana figuræ, EAG, fient pars omnium planorum figuræ, GOQ, sic productorum, nam hæc in illis tota reperiuntur, & aliquid amplius, unde omnia plana figuræ, GOQ, sic producta erunt, ut effecta sint maiora omnibus planis figuræ, EAG. Eodem modo ostendemus nos posse sic producere omnia plana figuræ, EAG, ut fiant maiora omnibus planis figuræ, GOQ, ita productis, & sic deinceps. Ergo omnia plana solidarum figurarum, EAG, GOQ, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod ostendere opus erat.

Definit. 4.
l. 5. Elem.

SCHOLIUM.

Posset fortè quis circa hanc demonstrationem dubitare, non rectè percipiens quomodo indefinitæ numero linearum, vel plana, quales esse existimari possunt, quæ à me vocantur,

Fig. 1
a s
F c
es pl
regis
liri
lle a
com
altir
di
tas, vt
omnia
posita
vnde
corum
G. am
EAG
liri
vnde
effici
mub
ur,
pro
ura
nem
care,
o li
vo.
r,

cantur, omnes lineæ, vel omnia plana talium, vel talium figurarum possint ad inuicem comparari: Propter quod inuēdum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figuræ, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adæquatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat, & quoniam illud spatium terminis comprehenditur, ideo & earum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod sufficere dico, vt illa sint ad inuicem comparabilia, alioquin neque ipsa spatia figurarum essent ad inuicem comparabilia: Vel enim continuū nihil aliud est præter ipsa indivisibilia, vel aliquid aliud, si nihil est præter indivisibilia, profectò si eorum congeries nequit comparari, neque spatium, siue continuum, erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, quam ipsa indivisibilia: Si verò continuum est aliquid aliud præter ipsa indivisibilia, fateri æquum est hoc aliquid aliud interiacere ipsa indivisibilia, habemus ergo continuum dissimilabile in quadam, quæ continuum componunt, numero adhuc indefinita, inter quælibet enim duo indivisibilia æquum est interiacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid aliud in ipso continuo præter indivisibilia, qua enim ratione tolleretur à medio duarum, à medijs quoque cæterarum tolleretur. Hoc cum ita sit comparare nequibimus ipsa continua, siue spatia ad inuicem, cum ea, quæ colliguntur, & simul collecta comparantur, scilicet, quæ continuum componunt, sint numero indefinita, absurdum autem est dicere continua terminis comprehensa non esse ad inuicem comparabilia, ergo absurdum est dicere congeriem omnium linearum, siue planorum, duarum quarumlibet figurarum non esse ad inuicem comparabilem, nō obstante, quod quæ colliguntur, & illam congeriem componunt sint numero indefinita, veluti hoc non obstat in cōtinuo. Siue ergo continuum ex indivisibilibus componatur, siue non, indivisibilium congeries sunt ad inuicem comparabiles, & proportionem habent.

Non inutile autem mihi videtur esse animaduvertere pro huius cōfirmatione, hoc pro vero supposito, quam plurima, quæ

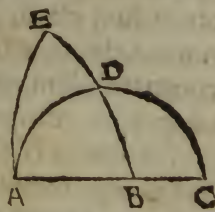
quæ ab Euclide, Archimede, & alijs ostensa sunt, à me pariter fuisse demonstrata, measq; conclusiones ad vnguem cum illorum conclusionibus concordare, quod evidens signum esse potest, me in principijs vera assumpsisse, licet sciam & ex falsis principijs sophisticè vera aliquando deduci posse, quod tamen in tot, & tot conclusionibus, methodo geometrica demonstratis, mihi accidisse absurdum putarem: Hoc tamen addo, non tanquam præfatæ veritatis legitimum fundamentum, sed vt non negligendum, immò summè expendendum illius argumentum, quod sequentia percurrenti cōtinuò magis, ac magis elucescet.

P R O P O S. II.

A Equalium planarum figurarum omnes lineæ sunt æquales, & æqualium solidarum omnia plana sunt æqualia, regula quavis assumpta.

Postul. 1.
huius.

Sint duæ æquales planæ figuræ, ADC, AEB, in figura, ADC, sit regula, AC, vtcunque, & in figura, AEB, regula vtcunq; sit, AB. Dico omnes lineas figuræ, ADC, regula, AC, æquales esse omnibus lineis figuræ, AEB, regula, AB. Intelligatur figuram, AEB, ita superponi figuræ, ADC, vt regulæ sint ad inuicem superpositæ, velut est, AB, in, AC, vel saltem æquidistant, vel ergo tota figura congruit toti, vel pars parti, congruat pars parti, ergo congruentium harum partium omnes lineæ erunt pariter congruētēs, scilicet omnes lineæ, ADB, partis figuræ, AEB, erunt congruentes omnibus lineis, ADB, partis figuræ, ADC, superponantur adhuc residuæ harum figurarum partes, hac lege tamen, vt omnes earundem lineæ regulis, AB, AC, siue regulæ cōi, AB, vel, AC, semper situētur æquidistantes, & hoc semper fiat, donec omnes residuæ partes ad inuicem superpositæ fuerint. Quia ergo integræ figuræ sunt æquales erunt diētæ partes superpositæ inuicem congruentes, ergo & earum omnes lineæ erunt pariter congruentes, magnitudines autem congruen-



gruentes sunt ad inuicem æquales, ergo omnes lineæ partiū figuræ, AEB, simul sumptarum. s. omnes lineæ figuræ, AEB, sumptæ regula, AB, erunt æquales omnibus lineis partium figuræ, ADC, quibus prædictæ partes congruerunt, simul sumptarum. i. omnibus lineis figuræ, ADC, sumptis, regula, AC, quod in figuris planis ostendendum erat.

Ita superpositis æqualibus figuris solidis, ita vt duæ in ipsis assumptæ vtcunq; regulæ sint ad inuicem superpositæ, vel æquidistantes, & residuorum facta semper superpositione ita vt omnia eorum plana regulis iam superpositis æquidistant, tandem, quia figuræ sunt æquales, dictæ partes erūt ad inuicem congruentes, & consequenter integræ quoque figuræ erunt congruentes, ergo earum omnia plana sumpta cum dictis regulis erunt ad inuicem congruentia, ergo & æqualia, quod in figuris solidis ostendere quoq; opus erat.

COROLLARIUM.

Hinc patet in eadem figura plana, omnes lineas sumptas cum quadam regula æquari omnibus lineis sumptis cum alia quauis regula; & in figuris solidis omnia plana vnius sumpta cum quadam regula, æquari omnibus planis eiusdem, regula quauis assumpta; vnde ex.g. secto planis cylindro æquidistanter axi, qua sectione in ipso creantur parallelogramma, & secto eodem planis æquidistanter basi ductis, qua sectione creantur in eodem circuli, patet ex hoc, omnia parallelogramma dicti cylindri, regula eorundē vno, esse æqualia omnibus circulis eiusdem, regula basi.

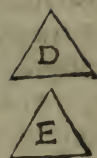
Coroll. 6.
l. 1.
Corol. 12
l. 1.

PROPOS. III.

Figuræ planæ habent inter se eandem rationem, quam eorum omnes lineæ iuxta quamuis regulam assumptæ: Et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta.

Sint figuræ planæ vtcunque, A, D. Dico, A, figuram ad figuram, D, esse, vt omnes lineæ figuræ, A, iuxta quamuis
D regulam

regulam assumptæ ad omnes lineas figuræ, D, iuxta quamvis regulam assumptas. Intelligentur ergo omnes lineæ figuræ, A, & D, assumptæ iuxta quasdam regulas, deinde capiantur quotcunq; figuræ, BC, singulæ æquales figuræ, A, & figuræ, D, quotcunq; æquales figuræ, vt, E; nunc, si



Per ante.
ced.

Elicitur
ex antec.

Definit. 5.
Qui. Ele.

cōtinuum componitur ex indiuisibilibus, patet absq; alia demonstratione figuram, A, ad figuram, D, esse vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non esset nisi ipsa indiuisibilia comparare; sed esto, quod hoc sit falsum, vel quod, etiam si verum sit, tamen legitima ratione ad hoc probandum nondum peruenerimus, adhuc dico ipsa indiuisibilia. s. omnes lineas figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, esse vt figuram, A, ad figuram, D. Quoniam ergo assumpsimus figuras, B, C, singulas æquales figuræ, A, & E, æqualem figuræ, D, omnes lineæ singularum figurarum, A, B, C, erunt æquales omnibus lineis figuræ, A, sumptis iuxta dictam regulam (quacunq; regula dictæ omnes lineæ sint assumptæ) & ideò quotuplex erit compositum ex figuris, ABC, figuræ, A, totuplex erit compositum ex omnibus lineis figurarum, ABC, omnium linearum figuræ, A, & ideò habebimus æquē multiplicia primæ, & tertiæ vt cunq; sumpta. Similiter ostendemus compositum ex figuris, E, D, æquē multiplex esse figuræ, D, ac compositum ex omnibus lineis figurarum, E, D, multiplex est omnium linearum figuræ, D, quæ sunt æquē multiplicia secundæ, & quartæ vt cunq; sumpta. Quia ergo si multiplex primæ. s. compositū ex figuris, ABC, superauerit multiplex secundæ, scilicet compositum ex figuris, DE, etiam multiplex tertiæ. s. compositum ex omnibus lineis figurarum, ABC, superabit multiplex quartæ. s. compositum ex omnibus lineis figurarum, D E: & si multiplex primæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, scilicet si compositum ex figuris, ABC, fuerit æquale composito ex figuris, D E, etiam eorundem compositorum omnes lineæ erunt æquales, & si minus, minus: ideò prima ad secundam erit,

erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura, A, ad figuram, D, erit vt omnes lineæ figurę, A, ad omnes lineas figurę, D, sumptas iuxta datas regulas. s. iuxta quascunque regulas, quod in fig. planis erat ostendendum.

Verum si intellexerimus, A, D, esse figuras solidas, assumptas, C, B, singulas æquales ipsi, A, & E, ipsi, D, ostendemus compositum ex figuris, ABC, tam multiplex esse figurę, A, ac compositum ex omnibus planis figurarum, A, B, C, multiplex est omnium planorum figurę, A, & sic compositum ex figuris, D, E, tam multiplex esse figurę, D, ac compositum ex omnibus planis figurarum, DE, multiplex est omnium planorum figurę, D, & tandem per antecedentem Propositionem ostendemus, si multiplex primæ superauerit multiplex secundæ, etiam multiplex tertiæ superaturum multiplex quartæ, & si minus, minus, vel si æquale, & æquale fore ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura solida, A, ad figuram solidam, D, erit vt omnia plana, A, ad omnia plana, D, cum quibusuis regulis assumpta, quod & in figuris solidis ostendere opus erat.

Defi. Qui.
s. Elem.

C O R O L L A R I U M.

Liquet ex hoc, quod, vt inueniamus, quam rationem habeant inter se duæ figurę planæ, vel solidæ, sufficiet nobis reperire, quam in figuris planis, inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, & in figuris solidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta, quod nouæ huius mæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum.

P R O P O S. IV.

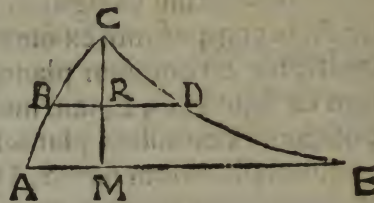
Si duæ figurę planæ, vel solidę, in eadem altitudine fuerint constitutę, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris solidis ductis planis vt cumq; inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem

D 2

figura

figura semper existentibus, dictæ figuræ erunt inter se, vt vnū quodlibet eorum antecedentium, ad suam consequens in alia figura eidem correspondens.

Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine constitutæ, CAM, CME, in quibus duæ vtcunq; rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, AE, BD, respectu quarum communis altitudo assumpta intelligatur, sint autem portiones figuris interceptæ ipsæ, AM, BR, in fig. CAM, & ME, RD, in fig.



CME, reperiatur autē, vt AM, ad, ME, ita esse, BR, ad, RD. Dico figuram, CAM, ad figuram, CME, esse vt, AM, ad, ME, vel, BR, ad, RD. Quoniam enim, BD, AE, vtcunq; ductæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quælibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, CAM, sumptæ regula altera ipsarum, AM, BR, ad eam, quæ illi indirectum iacet in figura, CME, erit vt, BR, ad, RD, vel vt, AM, ad, ME, vt igitur, AM, ad, ME, vnum. s. antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempe omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnia consequentia, scilicet ad omnes lineas figuræ, CME, regula, ME; indefinitus. n. numerus omnium antecedentium, & consequentium, qui pro vtrisque hic idem est, quicumque sit (& hoc nam figuræ sunt in eadem altitudine, & cuilibet antecedenti in figura, CAM, assumpto respōdet suum consequens illi in directum in alia figura constitutum) non obstat quin omnes lineæ figuræ, CAM, sint comparabiles omnibus lineis figuræ, CME, cum ad illas rationem habeant, vt probatum, est, & idē omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnes lineas figuræ, CME, regula, ME, erunt vt, AM, ad, ME. Verum, vt omnes lineæ figuræ, CAM, ad omnes lineas figuræ, CME, ita fig. CAM, est ad figuram, CME, ergo figura, CAM, ad figuram, CME, erit vt, BR, ad, RD, vel, AM, ad, ME, quod in figuris planis ostendere opus erat.

Siverò

1. huius.

3. huius.

Si verò supponamus, CAM, CME, esse figuras solidas, & vice rectarum, AM, BR, ME, RD, plana intelligamus figuris, CAM, CME, intercepta inuicem parallela, & ita constituta, ut plana, AM, ME, iaceant in eodem plano, veluti se habeant etiam plana, BR, RD, respectu quorum præfata altitudo assumpta quoque intelligatur, eadem methodo procedentes ostendemus omnia plana figuræ, CAM, ad omnia plana figuræ, CME, idest figuram solidam, CAM, ad figuram solidam, CME, esse ut planum, BR, ad planum, RD, vel ut planum, AM, ad planum, ME, quod & in solidis ostendere opus erat.

3. huins.

COROLLARIUM.

Colligitur ex hoc in figuris planis, vel solidis, si magnitudines comparatæ sint linear rectæ, vel plana, sint autem illæ, quæ dicuntur omnes linear, vel omnia plana dictarum figurarum, de illis quoque verificari, ut vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita esse omnia antecedentia ad omnia consequentia; & in suprädictis figuris planis omnes lineas vnius ad omnes lineas alterius, vel in solidis omnia plana vnius ad omnia plana alterius, esse ut vnum antecedentium ad vnum consequentiū, iuxta quæ, tanquam regulas, dictæ omnes linear, vel omnia plana intelliguntur assumpta.

XVIII.

Circa Propositionem primam, & eius Scholium plura dicuntur in Exerc. 3. Propositio verò 2. & 3. manifestant veritatem regulæ generalis num. 7 seu regulæ generalissimæ iuxta priorem methodum assumptæ. Propositio 4. est quasi quidam nexus utriusque methodi Indivisibilium: in ea enim apparet comparatio omnium Indivisibilium figurarum, CAM, CME, tam collectivè quam distributivè sumptorum. Nam ex eo, quod singula Indivisibilia figuræ CAM, cum singulis Indivisibilibus figuræ CME, eisdem in directum positis collata, reperiuntur ad illa habere eandem rationem (quod investigare est munus posterioris methodi) concluduntur omnia Indivisibilia ad omnia Indivisibilia esse, ut vnum ad vnum, quod congruit priori methodo: unde

unde infertur figuras ipsas esse, ut unum ad unum. Verum hoc idem probat Prop. prima Lib. 7. iisdem Indivisibilibus singillatim, hoc est non collectivè, sed distributivè comparatis, ut videbimus in Exercit. 2. In hac autem Prop. prior methodus aliquantulum se contrahit scilicet ad limites posterioris, ubi n. illa pronuntiat in Prop. 3. figuras sequi proportionem aggregatorum suorum omnium Indivisibilium. qualescunque sint ipse figure: hic ad eas sese coarctat, quæ sunt in eadem altitudine, seu in eisdem parallelis. Prior ergo methodus liberior est, scilicet vagatur per omnes figuras, cuiuscunque nempè sint altitudinis, sed est implexa conceptui omnium Indivisibilium collectivè comparatorum: posterior verò contractior est postulat enim figuras esse in eadem altitudine sed soluta est à præfato conceptu, comparat enim ipsa Indivisibilia tantum distributivè.

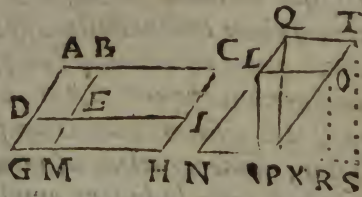
XIX.

Quod autem infinitas terminorum proportionis data non obstat quin de illis quoque verificetur, ut unum antecedens ad unum consequens ita esse omnia antecedentia ad omnia consequentia, ut innuitur in prædicta Prop. 4. egregiè confirmat prænominatus Torricellius Problemate de Dimensione Parabolæ, Prop. 14. à Lemmate 24. usque ad 27.

PROPOS. V.

Parallelogramma in eadem altitudine existentia inter se sunt, ut bases; & quæ in eadem basi, ut altitudines, vel, ut latera æqualiter basibus inclinata.

Sint parallelogramma quæcunque, AM, MC, in eadem altitudine constituta, sumpta altitudine iuxta bases, GM, MH. Dico parallelogrammum, AM, ad parallelogrammum, MC, esse ut, GM, ad, MH. Ducatur quæcunque intra parallelogramma, AM, MC, parallela ipsis, GM, MH, cuius portiones paral-



parallelogrammis, AM, MC, interceptæ sint, DE, EI. Quoniam ergo, DM, est parallelogrammum, sicut & EH, erit, DE, æqualis ipsi, GM, & EI, ipsi, MH, erit igitur, GM, ad, MH, vt, DE, ad, EI, & DE, EI, ductæ sunt utrunq; parallelæ ipsis, GM, MH, ergo parallelogramma, AM, MC, erūt ex genere figurarum Theorematis anteced. ergo, AM, ad, MC, erit vt, DE, ad, EI, vel vt, GM, ad, MH, quæ sunt eorundem bases. Hæc autem verificabuntur etiam si altitudines æquales fuerint, vt faciliè patet.

Sint nūc parallelogramma, QP, LP, in eadē basi, NP, constituta. Dico eadem esse, vt altitudines sumptæ iuxta basim, NP. Demittantur ergo, OR, TS, altitudines in, NP, productam, in punctis, R, S, illi occurrentes (nisi fortè, TP, OP, essent ipsæ altitudines, vel intra parallelogramma inciderēt basi, NP,) & à punctis, Q, L, agātur illis parallelæ, QX, LV, in punctis, V, X, basi, NP, incidētes. Sunt igitur parallelogramma, QS, LR, in æqualib. altitudinibus, QT, LO, sūptis iuxta bases, TS, OR, ergo parallelogramma, QS, LR, erunt inter se, vt bases, TS, OR, est autem parallelogrammū, QS, æquale parallelogrammo, QP, & LR, ipsi, LP, ergo parallelogramma, QP, LP, erunt inter se, vt, TS, OR, quæ pro ipsis sunt altitudines sumptæ iuxta basim, NP. Si autem latus, OP, extenderetur super latus, PT, idest latera, OP, PT, essent æqualiter inclinata communi basi, NP, tunc sumptis pro basibus ipsis, TP, OP, haberemus parallelogramma, QP, LP, in eadem altitudine sumpta iuxta bases, TP, OP, & ideò essent, vt ipsæ bases, TP, OP, idest vt latera, TP, OP, æqualiter basi, NP, inclinata, hæc autem pariter verificabuntur etiam si basis, NP, non sit communis, sint tamen duæ bases æquales, quæ ostendere opus erat.

Ex prima
parte huius
Prop.

Ex prima
parte huius
Propos.

XX.

Hæc propositio superaddita est, vt quoddam exemplar haberet Studiosus prioris methodi Indivisibilium, quatenus ille adhibetur circa figuras in eadem altitudine existentes (vt semper ferè consuetum est in ipsa Geometria Indivisibilium, quamvis vniuersalissimè quibuscunq; figuris in quacunque altitudine existentibus adaptari possit) hoc est quatenus versatur circa subiectum, quod est posteriori methodo proprium. In ea enim intelligi

intelligi potest secundū priorem methodum fieri comparationem omnium Indivisibilium collectiue, quamvis sufficeret illa distributiue comparare, quod efficit posterior methodus. Vt enim concludamus parallelogrammum, GB , ad BH , esse ut, GM , ad, MH , sufficit probare ut, GM , ad, MH , ita esse, DE , ad, EI . & sic quamlibet parallelam ipsi, GH , in parallelogrammo, GB , ad sibi respondentem in parallelogrammo, BH , parallelam eidem, GH , ut nos docet Propos. prima Lib. 7. absque eo quod inferamus, ergo collectiue omnes lineæ, GB , ad omnes lineas, BH hoc est parallelogrammum, GB , ad parallelogrammum, BH , est ut, GM , ad, MH ,. Videat ergo Lector in quo differant prior, & posterior methodus, & quam facile per hanc posteriorem possit infinitorum Indivisibilium simul collectorum comparationem euitare, si illa propter infinitatem eidem negotium faciant.

XXI.

Ex præfata Prop. 5. deducuntur sequentes Propositiones eiusdem Libri secundi usque ad octauam inclusivè, demonstraturq; via Geometrica consueta, quæ idcirco prætermittuntur. Sciat tamen Lector in sexta probari quæcunq; parallelogramma habere rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, siue laterum aequaliter basibus inclinatorū, cum illa sunt æqui-angula. In septima verò demonstratur parallelogramma, quorum bases altitudinibus, vel lateribus aequaliter inclinatis reciprocantur esse equalia, & è contra. In octava deniq; habetur similia parallelogramma esse in dupla ratione suorum laterum homologorum. Hæc à me vocantur communia symptomata parallelogrammorum, quæ in Corollarjjs dictarum Propositionum ad eorundem parallelogrammorum omnes lineas, regulis lateribus, pariter transferuntur.

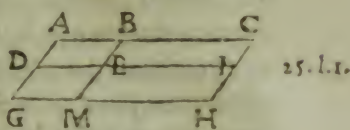
PROPOS. IX.

A Diff. 9.
huius.

Parallelogrammorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, regula basi, iuxta quam altitudo sumpta est, sunt inter se, ut quadrata basium.

Sint igitur parallelogramma, AM , MC , in eadem altitudine.

dine. Dico omnia quadrata parallelogrammi, AM , ad omnia quadrata parallelogrammi, MC , regula, GH , esse ut quadratum, GM , ad quadratum, MH . Sit intra parallelogramma, AM , MC , ducta utcumque, DI , parallela ipsi, GH , cuius portio, DE , maneat in, AM , & EI , in, BH . Quoniam ergo, DE , est æqualis ipsi, GM , figure autem planæ similes descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales, & ideò quadratum, DE , erit æquale quadrato, GM , & quadratum, EI , quadrato, MH , ergo, ut quadratum, GM , ad quadratum, MH , ita erit quadratum, DE , ad quadratum, EI , & quia, DI , utcumque ducta est parallela ipsi, GH , ideò, ut vnum ad vnum, ita omnia ad omnia idest, ut quadratum, GM , ad quadratum, MH , ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, AM , ad omnia quadrata parallelogrammi, MC , regula, GH , quod erat ostendendum.

A. Def. 8.
huius.

25. l. x.

Coroll. 4
huius.

COROLLARIUM.

Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias quas-
cunque figuras similes, quod eodem pacto ostende-
mus omnes figuras similes parallelogrammi, AM , ad omnes
similes figuras parallelogrammi, MC , ut ex.g. omnes circulos parallelogrammi, AM , ad omnes circulos parallelogrammi, MC , esse ut similes figuras ab ipsis basibus, GM , MH , descriptas, nam figuræ planæ similes quæcunque, ut dictum est, descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales; omnibus pariter assumptis figuris similibus regula eadem, GH .

A. Def. 8
huius.

25. l. x.

XXII.

Ad intelligentiam huius Propositionis nonne recolantur dicta circa def. 8. num. 17. superiori, in hac enim paratur transitus ad corpora medijs omnibus quadratis descriptis ab omnibus lineis parallelogrammorum, GB , BH , æquidistantibus duobus quadratis descriptis à basibus, GM , MH , (ad quæ supponuntur æqualiter inclinari parallelogramma, GB , BH , figuræ genitrices similium solidorum, quorum omnia dicta quadrata erunt omnia
E plana)

plana) tanquā suis regulis. In hac ergo ostenditur omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine existentium, ut sunt, GB, BH, esse ut quadrata basium. Similiter in Corollario dicitur, si vice quadratorum sumantur circuli, seu alia quaecunq; figura descripta à basibus, tamquam regula, nihilominus omnes circulos seu omnes figuras similes dictorum parallelogrammorum esse, ut ipsas regulas. Et quoniam solida similia genita ex parallelogrammis, regulis figuris à basibus eorundem descriptis, sunt cylindrici, seu corpora columnaria, ut dictum est num. 17. & infra probabitur; ideo ex premissa Prop. edocemur corpora columnaria, seu cylindricos similium basium in eadem altitudine existentes, esse inter se, ut ipsas bases. Similiter ex ibidem sequenti Prop. 10. eiusque Corollario innotescit Cylindricos in eadem, vel aequalibus, & similibus basibus existentes, esse ut altitudines, vel ut latera aequaliter basibus inclinata. Sic 11. Prop. cum Corollario indicat Cylindricos similium basium habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum aequaliter basibus inclinatorum. Pariter Propositio 12. cum Corollario patefacit cylindricos similium basium, quorum ipsae bases altitudinibus, vel lateribus aequaliter basibus inclinatis reciprocantur, esse aequales: & è contra. Insuper ex Prop. 13. cum Corollario palam fit similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum. Deniq; Prop. 14. concludit hæc omnia (excepta Propositione 13. quoniam postulat bases esse similes) verificari de cylindricis etiam si bases eorum sint dissimiles. Hæc à me vocantur communia symptomata cylindricorum, & omnium quadratorum ipsorum parallelogrammorum, quæ deducuntur ex hac sola premissa Propos. 6. via geometrica consueta, & ideo hic prætermittuntur.

XXIII.

Sequuntur in eodem Libro 2. aliquæ Propositiones, quæ cum ad intentum nostrum non sint necessariae, propterea relinquuntur. Sunt autem præcipuè Prop. 15. in qua ostenditur omnes figuras planas similes (quas generaliter diffiniimus Lib. primo def. 10) esse in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum earundem: & Propositio 17. (satis prolixa, & laboriosa) in qua probatur omnia similia solida (quorum extat definitio generatis eodem

eodem Lib. primo ad def. 11.) esse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ sunt in eorundem homologis figuris. Has autem Lector poterit supponere, nisi hunc laborem subire velit.

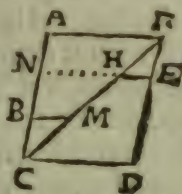
XXIV.

Haftenus Indivisibilium priorem methodum experti sumus in indagandis communibus parallelogrammorum, & cylindricorum symptomatibus, nunc ad planas figuras redeūtes in usdē ulterius progredimur. Quoniam verò post parallelogramma faciliora videntur esse triangula, & trapezia, propterea in sequentibus Propositionibus medijs parallelogrammis fit transitus ad triangulorum, & trapeziorum mensuram.

PROPOS. XIX.

SI in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum est cuiusvis triangulorum per ipsam diametrum constitutorum.

Sit parallelogrammum utcunque, AD, in quo ducta diameter, FC, ipsum diuidat in triangula, FAC, CDF. Dico parallelogrammum, AD, duplum esse cuiusvis triangulorum, FAC, CDF. Abscindantur ab, FD, CA, versus puncta, F, C, partes æquales, FE, CB, & per puncta, B, E, parallelæ ipsi basi, CD, ducantur, EH, BM, incidentes diametro, FC, in punctis, H, M; quoniam ergo in triangulis, FHE, CBM, angulus, HFE, æqualis est angulo illi coalterno, BCM, & HEF, ipsi, FDC, qui est æqualis angulo illi opposito, FAC, qui tandem æquatur angulo, MBC; interior exteriori, ideo angulus, FEH, æquatur angulo, MBC, sunt igitur in triangulis, FEH, MBC, duo anguli duobus angulis æquales, & latera illis adiacentia sunt æqualia, nempe, FE, ipsi, BC, ergo reliqua latera erunt æqualia, scilicet HE, ipsi, BM. Eodem modo ostendemus de cæteris parallelis ipsi, CD, eas nempe, quæ versus puncta, F, C, abscindunt à lateribus, FD, CA, partes æquales, esse pariter inter se æquales, veluti sunt extre-



26. Primæ
Elem.

E 2

tremæ,

3. huius.

tremæ, AF, CD, æquales. Ergo omnes lineæ trianguli, CAF, æquabuntur omnibus lineis trianguli, FDC, sumptis in utrisque omnibus lineis regula, CD; ergo triangulus, ACF, erit æqualis triângulo, FDC, ergo duo trianguli, ACF, FDC, scilicet parallelogrammum, AD, erit duplum cuiusvis triângulorum, ACF, FDC, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM I.

Hinc patet, quæcunque de parallelogrammis in Prop. 5.6.7. & 8. huius Libri ostensa sunt, eadem de triangulis ut vera recipi posse, si in triangulis conditiones ibi appositæ repertæ fuerint, nam in vnoquoque expositorum triangulorum sumptis duobus quibusvis lateribus, fieri potest sub illis in eodem angulo parallelogrammum, cuius triangulum erit dimidium. Triangula ergo, quæ in eadem sunt altitudine inter se sunt, ut bases: Et quæ in eadem basi inter se sunt, ut altitudines, vel ut latera æqualiter basibus inclinata: Item habent rationem cõpositam ex ratione basium, & altitudinum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum sunt æquiangula: Item Triangula, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocantur sunt æqualia; & quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas: Et tandem habetur similia Triangula esse in dupla ratione laterum homologorum, quæ omnia ex præsentis Propos. pendunt.

Inx. dif. r.
1. Sexti
Elem.

COROLLARIUM II.

Colligitur insuper, si supponamus, CD, esse æqualem ipsi, DF, quamlibet ductam in triangulo, FCD, parallelam ipsi, CD, æqualem esse ei, quam ipsa abscindit ab, FD, versus, F, nempe ipsi abscissæ, FE, & producta, EH, versus, AC, cui incidat in N, ipsa, HN, æquari residuæ abscissæ, FE, scilicet ipsi, ED, &, NE, integram æquari ipsi, FD, quæ est vna maximarum abscissarum ipsius, FD, vnde hac via colligemus omnes lineas trianguli, FCD, regula, CD, dum
latus

latus, FD, æquatur ipsi, DC, esse æquales omnibus abscissis ipsius FD, & omnes lineas trianguli, AFC, esse æquales residuis omnium abscissarum, FD, & omnes lineas parallelogrammi, AD, æquari maximis abscissarum, FD, quæ dicuntur eiusdem obliqui transitus, si angulus, CDE, nō sit rectus, & recti transitus, si sit rectus; vnde sicuti ostendimus, parallelogrammum, AD, duplum esse trianguli, FCD, vel, ACF, & subinde etiam omnes lineas, AD, regula, CD, duplas esse omnium linearum trianguli, FCD, vel, ACF, sic etiam vt demonstratum recipi potest proposita linea rectæ, vt ipsius, FD, vtunque, maximas abscissarum duplas esse omnium abscissarum eiusdem, vel residuarum omnium abscissarum, vnde & omnes abscissas patebit æquari residuis omnium abscissarum eiusdem lineæ, ijs vel recti, vel eiusdē obliqui transitus sumptis, quæ adsequentium intelligentiam diligenter sunt adnotanda.

Defin. 4.

huius.

Defin. 5.

huius.

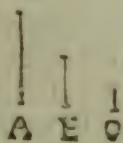
Defin. 6.

huius.

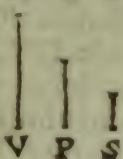
3. huius.

L E M M A.

Sit magnitudo, A, ad quocunque magnitudines, E, O, singillatim ad vnamquamque, vt magnitudo, V, ad tot alias, P S, singillatim ad vnamquamq; nempe sit, A, ad, E, vt, V, ad, P; A, ad, O, vt, V, ad, S. Dico, A, ad, E, O, simul esse, vt, V, ad P, S, simul iunctas. Etenim conuertendo erit prima, E, ad secundam, A, vt tertia, P, ad quartā, V, sed etiam conuertendo quinta, O, est ad secundam, A, vt sexta, S, ad quartam, V, ergo composita ex prima, E, & quinta, O, erit ad secundam, A, vt composita ex tertia, P, & sexta, S, ad quartam, V, ergo cōuertendo, A, ad, E, O, simul erit, vt, V, ad, P, S, simul iunctas, qui arguendi modus dicitur à me, Colligere, seu Colligendo.



24. Quinti Elem.



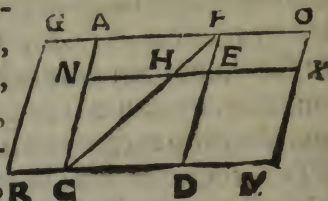
Defin. 13. huius.

P R O P O S. XX.

Assumpta Propos. antecedentis figura, dimissa, BM, retineatur, NE, pro vna ex ductis vtunque parallela ipsi CD, producta autem, CD, vtunque in, M, completoq; paral-

parallelogrammo, OD. Dico parallelogrammum, AM, ad trapeziū, FCMO, esse vt, CM, ad, MD, simul cū $\frac{1}{2}$. CD.

5. huius. Erit enim, AM, parallelogrammum; unde, MA, ad, AD, erit vt, CM, ad, CD, AD, verò ad triangulum, FCD; est vt, CD, ad $\frac{1}{2}$. CD, ergo, AM, ad triangulum, FCD, erit vt, MC, ad $\frac{1}{2}$. CD, Ex antec. est autem, AM, ad, FM, vt, CM, ad, MD, ergo, colligendo, AM, ad, FM, cū triangulo, FCD, idest ad trapezium, OFCM, erit vt, CM, ad, MD, cum $\frac{1}{2}$. DC, quod ostendendum erat.



COROLLARIUM.

Ex Cor. 2. antec. Manifestum est autem, si, CD, sit æqualis ipsi, DF, omnes lineas parallelogrammi, AD, regula, CD, esse æquales maximis abscissarum, FD, & omnes lineas trianguli, FCD, regula eadem æquari omnibus abscissis, FD. Nunc si intelligamus cuilibet earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ, adiungi rectam, DM, vocantur tunc maximæ abscissarum, vel abscissæ adiunctæ, DM, hæc autem sunt eadem illis, quæ habentur in parallelogrammo, AM, & trapezio, FCMO, nam si produceris, NE, vsque ad, OM, in, X, fiet, EX, adiuncta tum ipsi, NE, vni ex maximis abscissarum, FD, tum ipsi, HE, vni ex omnibus abscissis, FD, & EX, adiuncta est æqualis ipsi, DM, unde omnes lineæ, AD, adiunctæ, DM, sunt omnes lineæ parallelogrammi, AM, & sunt equales maximis abscissarum ipsius, FD, adiunctæ, DM, & omnes lineæ trianguli, FCD, adiunctæ, DM, sunt omnes lineæ trapezium, FCMO, & sunt æquales omnibus abscissis ipsius, FD, adiunctæ, DM. Quia ergo, AM, ad trapeziū, FCMO, est vt, CM, ad, MD, cum $\frac{1}{2}$. DC, ideò omnes lineæ, AM, ad omnes lineas trapezium, FCMO, (regulam hic semper intellige ipsam, CM,) idest maximæ abscissarum, FD, adiunctæ, DM, ad omnes abscissas, FD, adiunctæ, DM, erunt vt, CM, composita nempe ex proposita linea, CD, siue ex proposita, FD, illi æquali, & adiunctæ, DM, ad compositam ex adiunctæ, MD, & $\frac{1}{2}$. propositæ lineæ, CD, vel, DF.

PRO-

P R O P O S . XXI.

IN expofita fuperioris Prop. figura, fi producat, CD , ad partes, C , utcunque, ut in, R , & compleatur parallelogrammum, GC , oftendemus trapezium, $FGRC$, ad trapezium, $FCMO$, eſſe ut composita ex RC , & $\frac{1}{2}$. CD , ad compositam ex, MD , & $\frac{1}{2}$. CD .

Nam trapezium, $CRGF$, ad, GD , eſt ut composita ex, RC , & $\frac{1}{2}$. CD , ad, RD , inſuper, GD , ad, AM , eſt ut, RD , ad, CM , & tandem, AM , ad trapeziũ, $FCMO$, eſt ut, CM , ad, MD , cum $\frac{1}{2}$. CD , ergo ex æquali trapezium, $FGRC$, ad trapeziũ, $FCMO$, erit ut, RC , cum $\frac{1}{2}$. CD , ad, MD , cum $\frac{1}{2}$. DC , quod erat demonſtrandum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc patet omnes lineas trapezij, $FGRC$, regula, RM , ^{3. huius.} ad omnes lineas trapezij, $FCMO$, regula eadem eſſe, ut, RC , cũ $\frac{1}{2}$. CD , ad, MD , cũ $\frac{1}{2}$. DC . Veluti autem, in antecedenti oftendimus, fi, CD , ſit æqualis ipſi, DF , omnes lineas trapezij, $FCMO$, regula, CM , æquari omnibus abſciſſis ipſius, FD , adiuncta, DM , ita in præſenti oftendimus omnes lineas trapezij, $FGRC$, regula, RD , æquari reliquis omnium abſciſſarum ipſius, AC , vel, FD , adiuncta, RC ; unde patebit reſſiduas abſciſſarum propoſitæ lineæ, ut, FD , adiuncta, RC , ad omnes abſciſſas eiufdem, adiuncta alia linea, ut, DM , eſſe ut compositum ex prima adiuncta, & $\frac{1}{2}$ propoſitæ, CD , ſive, FD , illi æqualis, ad compositum ex ſecunda adiuncta, & $\frac{1}{2}$ propoſitæ lineæ, id eſt ut, RC , cum $\frac{1}{2}$. CD , vel, DF , ad, MD , cum $\frac{1}{2}$. CD , vel, DF .

XXV.

Cum triangulum dimidium eſſe circumſcripti eidem parallelogrammi in præmiſſa Prop. 19. oſenſum ſit, idcò communia parallelogrammorum ſymptomata num. 21. indicata, etiam ad ipſa triangula, & ad eorum omnes lineas, regula baſi, transferri intel-

intelliguntur, ut innuit Corollarium. Ex Corollario verò secundo eiusdem Prop. 19. liquido apparet nos sine abscissis, residuis, & maximis abscissarum propositæ lineæ, ut ipsius FD, in illius Schemate nostras Prop. ostendere posse, ut dicebatur nu. 16. Etenim si supponamus, FD, æqualem ipsi, DC pro omnibus abscissis ipsius, FD, possumus uti omnibus lineis trianguli, FCD, & pro residuis omnibus lineis trianguli, ACF, sicuti pro maximis omnium abscissarum possunt usurpari omnes lineæ parallelogrammi, ACDF, regula, CD. Similiter ex Corollario Prop. 20. innotescit in eius figura supposita, FD æquali ipsi, DC omnes lineas parallelogrammi, AM, posse describere pro maximis abscissarum, FD, adiuncta, DM; & omnes lineas trapezj, FCMO, pro omnibus abscissis eiusdem, FD, adiuncta eadem, DM. Sic in Prop. 21. omnes lineæ trapezj, GRCF, seruiunt pro residuis omnium abscissarum, FD, adiuncta CR. Videtur enim res clarior euadere, & ab oppositionib. liberior, si his abscissis, residuis, &c. substituamus omnes lineas dictarum figurarum. ijs enim dictæ abscissæ, & residue, &c. tam distributiue, quam collectiue adequantur, ut patet ex dictarum Propositionum Corollarjjs. Hæc addidi, quia non defuit, qui perperam accipiens has abscissas, residuas &c. fallacie hanc priorem methodum Indivisibilium credidit obnoxiam, ut suo loco clarius explicabitur.

XXVI.

Post parallelogramma, triangula, & trapezia in planis, & post cylindricos in solidis, superest vim Indivisibilium iuxta hæc priorem methodum pariter circa alia solida experiri. Inter ea verò primò sese offerunt corpora pyramidalia, seu conici, quippe quæ à triangulis iuxta nostram rationem oriuntur. Ad ea ergo fit cylindricorum comparatio in sequenti Prop. 22. quam cum suis Corollarjjs, & duabus subsequentijs Prop. 23. & 24. pariter cum suis Corollarjjs hic subnectimus.

PROPOS. XXII.

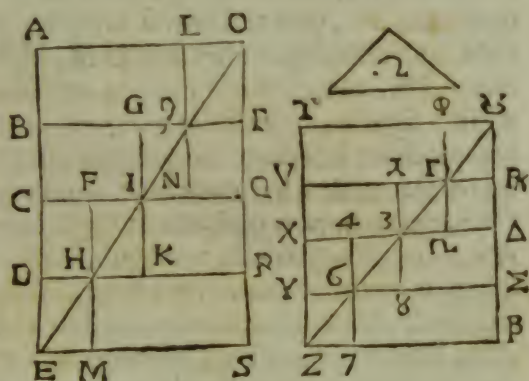
EXpositis duobus utcunq; parallelogramis, in eisdemq; ductis diametris, & duobus utcunque lateribus pro regula sumptis, nempe in vnoquoq; eorum uno: Omnia quadrata

drata cuiusvis dictorum parallelogrammorum ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum in ipso constitutorum, erunt ut omnia quad. reliqui parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum in isto ductam pariter constitutorum.

Sint exposita utcumq; parallelogramma, AS, TB, in ijsq; ductæ diametri, EO, Z&, regulis sumptis, ES, ZB. Dico omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, esse ut omnia quadrata, TB, ad omnia quadrata, & ZB. Si enim, ut omnia quadrata, TB, ad omnia quadrata trianguli, & ZB, ita non sunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, erunt igitur ita omnia quadrata, AS, ad maius, vel ad minus omnibus quadratis trianguli, OES. Sint excessus, vel defectus, omnia quadrata figuræ planæ, α , diuidatur autem

latus, OS, bifariam, in Q, &, OQ, QS, bifariam in, P, R, & sic deinceps fiat, ita ut ductis per puncta diuisionum parallelis ipsi, ES, D R, CQ, BP, tandem deuctum sit ad parallelogrammum, DS, cuius omnia quadrata,

regula, ES, sint minora omnibus quadratis figuræ, α : per puncta autem, in quibus dictæ parallelæ ipsam, OE, secant, ducantur vsque ad proximas parallelas æquidistantes lateribus, AE, OS, ipsæ, LN, GK, FM. Erit igitur triangulo, OES, circumscripta figura quædam composita ex parallelogrammis, LP, GQ, FR, DS, & alia inscripta composita ex parallelogrammis, 9Q, IR, HS, ita ut omnia quadrata figuræ circumscriptæ, regula, ES, excedant omnia quadrata inscriptæ, regula eadem, minori quantitate, quam sint omnia quadrata figuræ, α . Nam in parallelogrammo, DS, recta, HM, diuidit



Iux. Prim.
10. Elem.

F

dit

dit omnia quadrata, DS, in omnia quadrata, DM, in omnia quadrata, HS, & in rectángula bis sub, DM, MR, veluti punctum, H, diuidit quadratum, DR, in quad. DH. quad. HR, & rectángulum bis sub; DHR, siue ex 23. seq. ab hac independente, & ideò omnia quad. DS, excedunt omnia quadrata, HS, omnibus quadratis, DM, & rectángulis bis sub, DM, MR. Eodé pacto ostēdemus omnia quadrata, FR, excedere omnia quadrata, IR, omnibus quadratis, FK, & rectángulis bis sub, Fk, kQ, & sic omnia quadrata, GQ, excedere omnia quadrata, 9Q, omnibus quadratis, GN, cum rectángulis bis sub, GN, NP, & in figura circumscripta supersunt adhuc omnia quadrata, LP. Porro si hos excessus simul colligamus fient omnia quadrata, DS, nam si omnia quadrata, LP, vel, 9Q iunxeris omnibus quadratis, GN, & rectángulis bis sub, GN, NP, fient omnia quadrata, GQ, hæc si iunxeris omnibus quadratis, Fk, cum rectángulis bis sub, Fk, kQ, fient omnia quadrata, FR, quæ tandem si iunxeris omnibus quadratis, DM, cum rectángulis bis sub, DM, MR, fient omnia quadrata, DS, quæ cum sint minora omnibus quadratis figuræ, α , hinc figuræ circumscriptæ omnia quadrata excedunt omnia quadrata inscriptæ minori quantitate, quam sint omnia quadrata, α , & ideò excedunt omnia quadrata trianguli, OES, multò minori quātitate: Quia ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, cum omnibus quadratis, α , erant vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , hinc omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, OES, habebunt maiorem rationem, quam omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β .

Nunc diuidatur similiter, & β , in punctis, β , Δ , Σ , ac, OS, in punctis, PQR, & per puncta, β , Δ , Σ , parallelæ ipsi, Z β , ducantur, β V, Δ X, Σ Y, secantes, & Z, in punctis, r, 3, 6, per quæ vsq; ad proximas parallelas ipsis, & β , TZ, æquidistantes ducantur, ϕ r, Δ 3, 4 6, vt triangulo, & Z β , sit circumscripta figura ex parallelogrammis, ϕ β , Δ Δ , 4 Σ , Y β , composita. Quia ergo, vt, OS, ad, SR, ita est, & β , ad, β Σ , vt autem, OS, ad, SR, ita sunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, & vt, & β , ad, β Σ , ita sunt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, Y β , ergo omnia

10. huius.

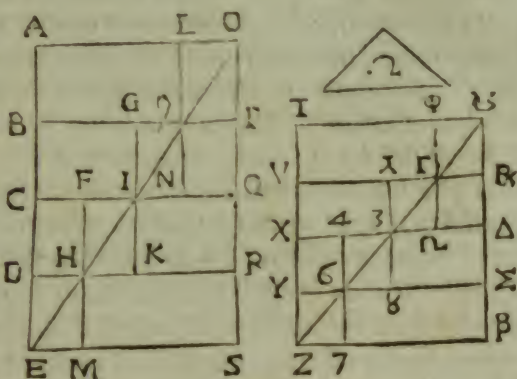
omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, sunt vt omnia quadrata, T β , ad oia quadrata, Y β . Quia verò omnia quadrata, Y β , ad omnia quadrata, 6 β , idest ad omnia quadrata 4 Σ , sunt vt quadratum, Z β , ad quadratum, 7 β , idest ad quadratum, 6 Σ , idest vt quadratum, β &, ad quadratum, & Σ , i. vt quadratum, SO, ad quadratum, OR, idest vt quadratum ES, ad quadratū,

HR, idest, vt omnia quadrata, D S, ad omnia quadrata, FR: ergo ex æquali oia quadrata, AS, ad oia quadr. FR, erūt vt oia quadr. T β , ad oia quadr. 4 Σ : Eodē pacto ostē-

cemus oia quadr. AS, ad oia quadrata, GQ, esse vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, Δ Δ , & tandem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, LP, esse vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, Φ Φ , unde, colligendo, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata parallelogrammorum, DS, FR, GQ, LP, idest figuræ circumscriptæ, erunt vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata parallelogrammorum, Φ Φ , Δ Δ , 4 Σ , Y β , idest ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, & Z β . Sed omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, OES, ostensa sunt habere maiorem rationem, quam omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , ergo omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, & Z β , habebunt maiorem rationem, quam ad omnia quadrata trianguli, & Z β , ergo omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, & Z β , minora erunt omnibus quadratis triāguli, & Z β , quod est absurdum. Non ergo omnia quadrata, AS, ad maius, quam sint omnia quadrata triāguli, OES, habēt eandem rationem, quam omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β .

F 2

Dico



9. huius.

Defin. 13.
l. 1.

Dico autem neque ad minus eisdem habere eandem rationem, sint enim defectus adhuc omnia quadrata figuræ, α , & sit circumscripta triangulo, O E S, figura ex parallelogrammis, LP, GQ, FR, DS, & alia inscripta ex parallelogrammis, MQ, IR, HS, composita, ita ut omnia quadrata circumscriptæ superent omnia quadrata inscriptæ minori quantitate, quam sint omnia quadrata, α , ergo omnia quadrata trianguli, OES, superabunt omnia quadrata inscriptæ figuræ multo minori quantitate. Sunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, detractis omnibus quadratis, α , ut omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata inscriptæ figuræ habebunt minorem rationem, quam omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β . Diuidatur nunc pariter latus, & β , in punctis, β , Δ , Σ , similiter ac, OS, diuiditur in, P, Q, R, & cætera, ut supra, fiant, ut habemus figuram inscriptam ex parallelogrammis, r Δ , γ Σ , 6 β , compositam, ostendemus igitur, ut supra, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inscriptæ triangulo, OES, esse ut omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata figuræ inscriptæ triangulo, & Z β , sunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inscriptæ triangulo, OES, in minori ratione, quam sint omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , ergo omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata figuræ inscriptæ triangulo, & Z β , erunt in minori ratione, quam omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , ergo figuræ inscriptæ triangulo, & Z β , omnia quadrata maiora erunt omnibus quadratis trianguli, & Z β , quod est absurdum, igitur omnia quadrata, AS, non ad minus, quam sint omnia quadrata trianguli, OES, erunt ut omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & Z β , sed neque ad maius, ut ostensum est ergo ad ipsa erunt, ut omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, & Z β . Si autem comparentur omnia quadrata, AS, T β , ad omnia quadrata triangulorum, A E O, T Z &, eodem modo fiet demonstratio, igitur ostensum est, quod erat demonstrandum.

A. C. O.

A. COROLLARI SECTIO I.

Hinc patet quæcunque de omnibus quadratis parallelogrammorum tales, vel tales conditiones habentium in Propos. 9. 10. 11. 12. 13. 14. huius Libri ostensa sunt, eadem de omnibus quadratis triangulorum, tanquam de eorundem partibus proportionalibus verificari, regula vno latere sumpta, dum triangula circa altitudines, & bases, siue à basibus descriptas figuras, & latera æqualiter basibus inclinata, easdem obtinuerint conditiones ibi notatas.

B. SECTIO II.

Igitur triangulorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, vel omnes figuræ similes (siue sint similes ad inuicem, quæ sunt vtriusque trianguli, siue dissimiles) erunt vt figuræ à basibus descriptæ. 9. huius.

C. SECTIO III.

Et si triangula fuerint in eadem, vel æqualibus basibus, omnes figuræ similes vtriusque ad inuicem, erunt vt altitudines, vel vt latera basibus æqualiter inclinata. 10. huius.

D. SECTIO IV.

Item triangulorum omnia quadrata, siue omnes figuræ similes, etiam si sint dissimiles, quæ sunt vtriusque trianguli, habebunt rationē compositam ex ratione figurarum à basibus descriptarum, & altitudinum, siue laterum basibus æqualiter inclinatorum. 11. huius.

E. SECTIO V.

Et triangulorum, quorum basium figuræ altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis recipiuntur, omnes figuræ, similes basium figuris, sunt æquales: Et si omnes

2. huius. omnes figuræ, similes basium figuris, sint æquales, figuras basium altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatatis reciproce respondentes habebunt.

F. S E C T I O VI.

Iux. diff.
1. Sexti
Elem.

12. huius.

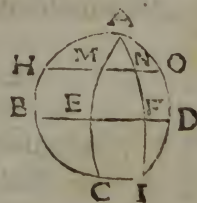
ET tandem similium triangulorū omnia quadrata erunt in tripla ratione laterum homologorum, siue vt eorum cubi; regulas verò in supradictis suppono semper duo illorum triangulorum latera, quæ bases voco; hic verò intellige illorum triangulorum latera homologa. His autem sequentem Propositionem subiungam, tum huius gratia, tum eorum, quæ sequentur.

P R O P O S. XXII.

D. Dif. 8.
huius.

SI, exposita quacunque figura plana, in ea ducatur utcunque recta linea, quæ sit sumpta pro regula, eadem verò in puncto, vel punctis diuisa, prout Lib. 2. Elem. supponitur secari, per puncta diuisionū lineas duxerimus rectas, siue curuas, figuram diuidentes, & semel tantum secantes quamuis aliam regulæ parallelam, si regula in vno puncto tantum diuisa sit, vel toties, quot sunt puncta diuisionum regulæ (exceptis tamen extremis, in quibus linearum sectæ partes in puncta aliquando degenerare possunt) quæcunq; in dicto 2. Lib. demonstratur hac diuisione supposita circa vel quadrata, vel rectangula eidem rectæ lineæ applicata, eadem de omnibus quadratis dictæ figuræ, vel eiudem partium, vel de rectangulis sub ipsis pariter verificabuntur.

Sit exposita utcunque figura plana, ABCD, in qua ducta, BD, recta linea utcunq; sit illa sumpta pro regula, & ea diuisa in vno, vel pluribus punctis, prout postulant Prop. Lib. 2. Elem. per puncta diuisionū ducantur lineæ siue rectæ, siue curuæ, AEC, AFI, toties quamuis aliam ipsi, BD, parallelam in figura, BADC, secantes, quo-



ries,

ties, BD, secta esse supponitur, exceptis tamen extremis, vt ex.g. ipsa, CI, in qua partes, CI, quæ in recta, CI, separari debuisent per lineas, AEC, AFI, in puncta, C, I, partibus, BE, FD, respondentia degenerauerunt. Dico quæcunque demonstrantur in linea, BD, circa quadrata, vel rectangula, illi, vel illius partibus applicata, verificari de omnibus quadratis totius figuræ, BADC, siue partiū eiusdem figuræ per dictas lineas constitutarum, siue de rectangulis sub eiusdem partibus. Vt ex.g. quia in 3. Prop. Lib. 2. Elem. ostenditur rectangulum sub, BD, DF, æquari rectangulo sub, BFD, cum quadrato, FD, sic dico verū esse rectangula sub figura, ABCD, & figura, ADI, æquari rectangulis sub figuris, ABIF, ADIF, cum omnibus quadratis figuræ, ADIF. Si enim aliam vtcunque duxerimus regulæ, BD, parallelam, vt, HO, secātem lineas, AC, in, M, & AI, in, N, verum esse comperiemus rectangulum, HON, æquari rectangulo, HNO, cum quadrato, NO, & idem in cæteris regulæ, BD, parallelis, in figura, ABCD, ductis reperiemus. Ergo verum erit rectangula illa simul collecta, idest rectangula sub figura, ABID, & figura, ADI, æquari rectangulis sub figuris, ABI, ADI, cum omnibus quadratis, ADI, quod 3. Propos. 2. Lib. Elem. respōdet.

Vide D.
Defin. 8.
huius.

Coroll. 4.
huius.

Similiter si supponamus, BF, bifariam secari in, E, cui adiungatur, FD, supposuerimus etiam lineam, AC, bifariam secare quamlibet omnium linearum figuræ, ABI, regula, BD, supradictarum, quarum singulis additur, quæ in directum manet in figura, ADI, veluti Propos. 6. ostenditur rectangulum, BDF, cum quadrato, FE, æquari quadrato, ED, ita hic ad modum superioris ostendemus rectangula sub figura, ABID, & ADI, cū omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ACD, quod respondet Prop. 6. eiusdem Lib. Consimiliter reliqua demonstrabimus, vnde iuxta 1. Prop. Secundi Elem. colligemus.

A. COROLLARII SECTIO I.

Rectangula sub figura indiuisa, ABID, & sub diuisa, ACD, per lineā, AI, æquari rectangulis sub indiuisa, ABID, & sub partibus diuisæ, quæ, sunt, ACI, AID.

B. SE-

B. S E C T I O II.

IVxta secundam habebimus omnia quadrata figuræ, ABID, æquari rectang. sub, ABID, & singulis partibus, ABI, AID.

C. S E C T I O III.

IVxta tertiam iam dictum est in Propositione quid colligamus.

D. S E C T I O IV.

IVxta quartam habemus omnia quadrata figuræ, ABID, per unicam lineam, AFI, diuisæ, æquari omnibus quadratis figurarum, ABI, AID, & rectangulis bis sub dictis fig. ABI, AID.

E. S E C T I O V.

IVxta quintam, si supponamus lineam, AI, bifariam diuidere omnes lineas figuræ, ABID, regulam, BD, sumptas, & easdem lineam, AC, non bifariam diuidere; colligemus rectangula sub inæqualibus partibus, ABC, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ABI.

F. S E C T I O VI.

IVxta sextam quid colligatur iam dictum est in Propositione.

G. S E C T I O VII.

IVxta septimam colligemus, supposito, quod figura, ABID, secetur à sola linea, AI, utcumque, dummodo eadem secet omnes æquidistantes ipsi regulæ, BD, in figura, ABID, ductas, & in vno tantum puncto, colligemus inquam omnia quadrata figuræ, ABID, & omnia quadrata figuræ, ADI, æquari rectangulis bis sub figuris, ABID, ADI, vna cum omnibus quadratis, ABI.

H. SE-

H. SECTIO VIII.

IVxta octauam, si supponamus figuram, ABCD, ut cunq; sectam per lineam, AC, (quæ tamen secet omnes ipsi, KD, æquidistantes in figura, ABCD, ductas, & in vno tantum puncto uti dictum est) colligemus rectangula quater sub figuris, ABCD, ABC, cum omnibus quadratis, ACD, æquari omnibus quadratis figuræ compositæ ex figura, ABCD, & ABC, ita ut omnium linearum figuræ, ABCD, singulis intelligatur adiecta, quæ nunc in figura, ABC, est cum illa in eadem rectitudine.

I. SECTIO IX.

IVxta nonam, si supponamus lineam, AI, secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABID, ductas bifariâ, & lineam, AC, eandem bifariam non secare, colligemus omnia quadrata figuræ, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ABC, dupla esse omnium quadratorum figuræ, AID, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, intermediæ.

K. SECTIO X.

IVxta decimam, si supponamus, AC, lineam bifariam secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABI, ductas, & illis addi, quæ in directum illis iacēt in figura, AID; colligemus omnia quadrata figuræ, ABCD, cum omnibus quadratis figuræ, ADI, dupla esse omnium quadratorum figuræ, ABC, cum omnibus quadratis figuræ, ACD.

L. SECTIO XI.

IVxta undecimam, si supponamus, BD, in, E, ita sectam esse, ut rectangulum, DBE, sit æquale quadrato, ED, quolibet autem æquidistantium ipsi, BD, in figura, ABCD, tali modo, & ad eandem partem diuidatur per lineâ, AEC, patet, quod etiam rectangula sub figuris, ABCD, ABC,

G

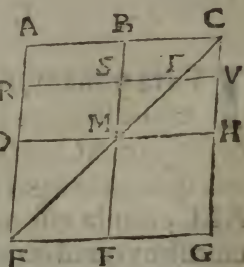
æqua-

æquabuntur omnibus quadratis figuræ, ACD , regula, BD . Igitur linea, AC , diuidet superficiem planam, $ABCD$, (sic dicere liceat) secundum extremam, ac mediā rationem. Hæc autem pro sequentibus accuratè memoriæ commendentur.

P R O P O S . XXIV.

EXposito parallelogrammo quocunque, in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, vno laterum parallelogrammi communi regula existente.

Sit parallelogrammum, AG , in eoque ducta diameter, CE , regula vtcunque latus, EG . Dico omnia quadrata, AG , esse tripla omnium quadratorum trianguli cuiusvis, AEC , siue, CEG . Diuidantur bifariam latera, AC , CG , in punctis, BH , & per, B , ipsi, CG , perque, H , ipsi CA , parallelæ ducantur, BF , DH , quæ se cum recta, CE , communiter bifariam secabunt in puncto, M . Quia igitur in figura, siue parallelogrammo, AG , ducitur linea, BF , quæ omnes æquidistantes ipsi, EG , bifariam secat, & CE , quæ easdem in partes inæquales diuidit, præterquam, DH , omnia quadrata trianguli, AEC , cum omnibus quadratis trianguli, CEG , dupla erunt omnium quadratorum, AF , cum omnibus quadratis duorum triangulorum, CBM , EMF . Licet enim, DH , per lineam, CE , sit non bifariam diuisa, nihil tamen hoc obstat nostro proposito, nam & ipsi, DH , contingit, veluti ijs, quæ inæqualiter secantur, quadratum sectarum partium, scilicet quadrata, DM , MH , dupla esse quadratorum dimidiæ, nempe quadrati, DM , & eius, quæ inter sectiones interijcitur, quæ hic nulla est, cum duæ secantes, BF , CE , vniantur in puncto, M : Sunt autem omnia quadrata trianguli, AEC , æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG , quia sunt triangula in æqualibus basibus, EG , AC , & eadem altitudine licet euerse posita,



Per I. Corol. antec.

posita, & ideo omnia quadrata trianguli, CEG , sunt equalia omnibus quadratis, AF , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , MEF . Quoniam verò omnia quadrata trianguli, BMC , sunt equalia omnibus quadratis trianguli, CMH , omnia verò quadrata trianguli, CEG , ad omnia quadrata trianguli, CMH , sunt in tripla ratione eius, quam habet, GC , ad, CH , quæ est dupla, idest in ratione octupla, & hoc, quia triangula, CEG , CMH , sunt similia, ideo omnia quadrata, CEG , erunt octupla omnium quadratorum, CMH , & quadrupla omnium quadratorum, CBM , vel, CBM , & MEF . Sunt autem omnia quadrata trianguli, CEG , equalia omnibus quadratis, AF , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , MEF , ergo hæc erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, CBM , MEF , & diuidendo omnia quadrata, AF , erunt illorū tripla. Sunt autem omnia quadrata, AG , ad omnia quadrata, AF , vt quadratum, GE , ad quadratum, EF , idest quadrupla idest, vt 12. ad 3. & omnia quadrata, AF , sunt omnium quadratorū triangulorum, BMC , MEF , tripla, ergo omnia quadrata, AG , erunt duodecupla omnium quadratorum triangulorum, BMC , MEF , & sunt ad omnia quadrata, AF , vt 12. ad 3. ergo omnia quadrata, AG , ad omnia quadrata, AF , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , MEF , erunt vt 12. ad 4. Sunt autem omnia quadrata, AF , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , MEF , equalia omnibus quadratis trianguli, CEG , vel, AEC , vt ostensum est. Ergo omnia quadrata, AG , ad omnia quadrata trianguli, CEG , vel, AEC , sunt vt 12. ad 4. idest sunt eorum tripla, quod ostendendum erat.

Ex B. vel
C. Corol.
prop. 22.
huius.

9. huius.

COROLLARIUM.

Hinc patet, si ducamus intra parallelogrammum, AG , æquidistantem ipsi, EG , vtcunque, RV , secantem, CE , in, T , & BF , in, S , quod veluti ostendimus, RV , æquari vni maximarum abscissarum, CG , dum, EG , est æqualis ipsi, GC , ita nunc ostendemus quadratum, RV , æquari quadrato vnius maximarum abscissarum, CG , & quadratum, TV , æquari quadrato vnius omnium abscissarum, CG , idest

G 2

quadra-

quadrato, VC; quadratum verò, RT, æquari quadrato
 vnus residuarum omnium abscissarum, CG, idest quadrato
 VG, vnde concludemus omnia quadrata, AG, regula, EG,
 æquari quadratis maximarum abscissarum, CG, & omnia
 quadrata trianguli, CEG, æquari quadratis omnium ab-
 scissarum, CG, & omnia quadrata trianguli, AEC, æquari
 quadratis residuarum omnium abscissarum, CG, & rectan-
 gula sub triangulis, AEC, CEG, æquari rectangulis sub om-
 nibus abscissis, & residuis omnium abscissarum, CG, ita sum-
 ptis, vt quoduis rectangulum intelligatur sub vna abscissa-
 rum, & eius residua: Vnde veluti ostendimus omnia qua-
 drata, AG, tripla esse omnium quadratorum trianguli, CEG,
 vel trianguli, CAE, ex quo patet tripla etiam esse rectangu-
 lorum bis sub triangulis, AEC, CEG, (sunt enim omnia
 quadrata, AG, æqualia omnibus quadratis triangulorum,
 AEC, CEG, & rectangulis bis sub eisdem triangulis) ita ap-
 parebit quadrata maximarum abscissarum, CG, tripla esse
 quadratorum omnium abscissarum, vel quadratorum resi-
 duarum omnium abscissarum, CG, & tripla etiam esse rectan-
 gulorum sub dictis omnibus abscissis, residuisq; bis sumptis,
 sexcupla verò eorundem rectangulorum semel sumptorum.
 Sunt autem maximæ abscissarum, abscissæ, & residuæ recti
 transitus, si angulus, EGC, sit rectus, vel eiusdem obliqui
 transitus, si ille non sit angulus rectus.

D. Corol.
 23. huius.

Ex diff. 1.
 huius.

XXVII.

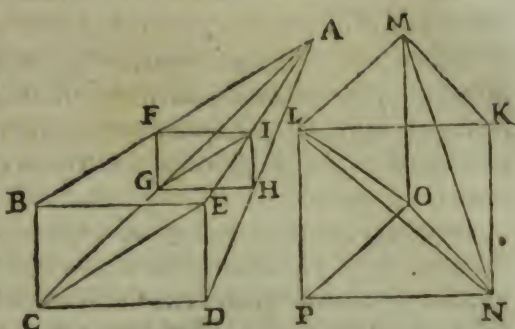
*Quoniam sola Propositio 22. superius tradita in tota Geome-
 tria Indivisibilium, & iuxta priorem methodum, ostenditur per
 demonstrationem ducētem ad impossibile; vt Lectori palam fiat
 omnia per dictam priorem methodum posse directè demonstrari,
 idè hac volui præfatis Propositionibus superaddere, quibus, tam
 dicta Prop. 22. quam Prop. 24. ab eadem dependens, & omnes
 aliæ hinc derivatæ directè probantur.*

Lem. 2.

*Si fuerit quodecunque parallelogrammum, vt B C D E,
 & in co ducta diameter, C E; in triangulisq; B C E, E C D, tam-
 quam in basibus, ac vertice communi puncto, A, fuerint duæ Py-
 ramides, A B C E, A C D E. Dico easdem esse æquales.*

*Traiecto enim quocunq; plano basi, E D, æquidistante, ac py-
 ramidi-*

pyramidem, $ABCDE$,
secante, fient cōmun-
nes sectiones eiusdē
cum planis, ABE ,
 ACD , ut ipsa, FI ,
 GH , ipsis, BE , CD ,
parallela per Prop.
16. Undec. Elem. &
idcō erunt inter se
parallela. Sic ostēde-



mus alias communes sectiones cum planis, ABC , AFD , nempe, FG , IH , esse parallelas, & rectam, GI , communem sectionem eiusdem cum plano, ACE , quod est duabus dictis pyramidibus commune. Erit ergo, $FGHI$ parallelogrammum, cuiusque diameter, GI , ipsum bisariam secans. quare triangulum, FGI , aequabitur triangulo, GHI . Eadem ratione ostendemus, traiccto alio quocunque plano eidem basi, BD , aequidistante, pyramidesque secante, facta ut sic triangula in dictis pyramidibus adequari. Ergo omnia plana pyramidum, $ABCE$, $ACDE$, regula plano, BD , erunt aequalia, & subinde per Prop. 3. superiores eadem pyramides erunt aequales.

Hoc demonstratō sit prisma, $MOPN$, triangularem habens basim, OPN , in eo; ducantur, LO , LN , NM , quibus scindetur in tres pyramides, $LMNO$, $LMKN$, $LPNO$. Dico prisma triplum esse pyramidis, $LPNO$, in eadem basi & altitudine cum eo existentis. Id etiam ostendit Euclides Lib Duodecimo Elem. Prop. 7. sed quia utitur Propositione 5. eiusdem Libri, qua non ostensuē demonstratur, idcō nos utimur antecedenti Lemmate, & Euclidi postea conformiter procedimus. Cum enim triangulum, MKN sit aequale triangulo, MON , & cōis vertex, L , etiam pyramis, $LMKN$, aequatur pyramidi, $LMON$, per dictum Lemma. Similiter pyramis, $LMON$, cuius vertex, L , hoc, est pyramis, $LOMN$, cuius vertex, N (est enim eadē pyramis) aequatur pyramidi, $LPON$ cuius vertex est idem, N , & basis, LPO , aequalis ipsi, LOM , in parallelogrammo, MP . Ergo tres pyramides, $LMON$, $LMKN$, $LPON$, sunt aequales. Unde patet ipsum prisma, $MOPN$, triplum esse pyramidis, $LPON$.

Si ergo in Schemate Propositionis 24. superioris supposueri-

mus à basi, EG, describi ex gr. triangulum æquilaterum, ad quod sit rectum, vel inclinatum parallelogrammum AG, & triangulum, CEG, quorum omnes lineæ describant triangula æquilatera triangulo basis, EG, tanquam communi regule æquidistantia; intelligemus, AG, esse figuram genitricem cylindrici, hoc est prismatis triangularis, & triangulum, CEG, conici seu pyramidis triangularis in eadem basi, & altitudine cū dicto prisma constituta. Ergo per demonstrata concludemus prisma genitum ex, AG, pyramidis genitæ ex, CEG, triplum esse. Cum verò ut solidum ad solidum ita sint omnia plana ad omnia plana per Prop. 3. superiorem, idè omnia triangula æquilatera parallelogrammi, AG, tripla erunt omnium triangulorum æquilaterorum trianguli, CEG, Sed ut triangulum æquilaterum ad triangulum æquilaterum; (ijs descriptis à duabus rectis lineis) ita est quadratum ad quadratum, circulus ad circulus, & in uniuersum figura ad similem figuram (dummodo à predictis duabus lineis tanquam ab homologis describi intelligantur) per ostensa ab Euclide, & ab alijs particulariter in aliquibus similibus figuris, & à nobis in Propositione 15. superius citata uniuersaliter in omnibus, patet eas esse in duplicata ratione suarum linearum, vel laterum homologorum. Ergo per Prop. 4. superiorem nedum omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata, CEG, sed uniuersaliter omnes figurae similes, AG, ad omnes figuras similes ipsius, CEG, similes inquam, & parallelae descriptæ à basi, EG, erunt in ratione tripla.

Hinc denique ad solida transeuntes intelligemus per hac demonstrari demonstratione directâ, nedum omne prisma pyramidis sed quemcunq; cylindricum cuiuscunque conici in eadem cum eo basi, & altitudine existentis, esse triplum. Hoc autem magnam vim, & energiam horum Indivisibilium sanè demonstrat, ubique enim in solidis huius uniuersalitatis amplissimos fines attingunt, quod meherclè consideratione dignum videtur.

His præostensis illicò manifesta fit Propositio 22. superius tradita: hoc est in illius Schemate nedum omnia quadrata parallelogrammorum, AS, TB, ad omnia quadrata triangulorum, OES, & ZB, sed & omnes figuras ad omnes figuras similes, esse in eadem ratione, nempe tripla per directâ demonstrationē cōfirmatur.

Similiter

Similiter patet communia Symptomata omnium quadratorum parallelogrammorum, & vniuersaliter cylindricorum, num. 21. superiori explicata etiam ad omnia quadrata conicorum, & vniuersaliter ad omnes conicos transferri, sunt enim predictorum subripla: vt in sectionibus Corollarij eiusdem Propositionis 22. supra colligebatur.

XXVIII.

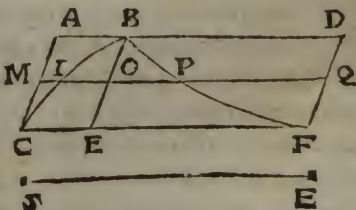
Remanet expendenda Propositio 23. cum suis Corollarijs, quæ si Lector attentè considerauerit, agnoscet quæti illa sint momenti. Quemadmodum enim Liber secundus Elem. apparet esse summa fecunditatis, ac totius Algebrae fundamentum: ita hæc Propositio cum suis Corollarijs quæ eiusdem secundi Libri doctrinæ imitantur, facile animaduertetur esse immensa utilitatis, nucleumque Geometriæ Indivisibilium in his contineri, quibus si ipse rectè traserit, admiranda in Geometricis detecturum esse puto. Altioris enim gradus mihi esse videtur hæc sectio, quæ fit per lineas in planis figuris, quam illa, quæ in dicto secundo Elem. fit per puncta in lineis rectis. Per illam enim unicum quadratum data recta linea, seu rectangulum scinditur varia frusta: per hanc verò scinduntur omnia quadrata data figura, seu omnia rectangula in diuersa frusta; & consequenter solidum simile, cuius illa sunt omnia plana intelligitur quoque scindi in varia solida. Quæ quidem scissio uti mirè operatur in planis, sic etiam in solidis: etenim soliditatem, quam aliquando, vel nullo modo possumus, vel difficillimè integram metiremur; in frusta dissectam facile mensuramus. Et cum innotuerit mensura solidi similis, cuius omnia plana sunt omnia quadrata, vel rectangula suæ figuræ genitricis; vice quadratorum vel rectangulorum substitutis alijs figuris ab eadem genitrice descriptis, illico infinitorum specie solidorum similarium prodit mensura, quod videtur non oïno spernendū. Extant innumera huiusce rei exempla in dicta Geometria Ind. nec aliquod hic decrit, vt Lector ex vngue Leonem agnoscere possit. Præcipuè in Prop. 22. aliquod specimen huiusce sectionis præbere potuerunt lineæ, HM, IK, 92, &c. in eius Schemate diuidentes omnia quadrata parallelogrammorum, DS, FR, GQ, in sua frusta: & in Schemate Prop. 24. diameter, CE, diuidens omnia quadrata, AG, in omnia quadrata, AEC, CEG, & in rectangula bis
sub

sub eisdem triangulis. Per hanc verò Prop. 23. & per Prop. 25. & 26. subsequentes paratur aditus ad alia solida ultra cylindricos & conicos in quibus Indivisibilium valor pariter expenditur, sicut hactenus in illis eundem experti sumus.

P R O P O S. XXV.

SI in duobus parallelogrammis sumptis duobus lateribus pro basibus, & regulis, ipsa parallelogramma fuerint in eadem altitudine sumpta respectu dictarum basium; in eisdem autem basibus, & altitudine fuerint aliæ duæ planæ figuræ ita se habentes, vt si ducatur vtcunque parallela dictis basibus (quæ in directum sint constitutæ) recta linea, cuiusdem portiones dictis parallelogrammis, & figuris interceptæ, vel ab eisdem descriptæ planæ figuræ, sint proportionales, homologis existentibus, quæ sunt in parallelogrammis, & pariter quæ sunt in figuris, in iisdem basibus, & altitudine cum illis constitutis: dictorum parallelogrammorum, ac figurarum omnes lineæ, si lineæ, vel omnes figuræ planæ similes, si istæ comparètur (similibus inquam existentibus quæ sunt in vnaquaq; figura) erunt proportionales.

Sint parallelogramma, AE, ED, in basibus, CE, EF, in directum iacentibus, & in eadem altitudine respectu dictarum basium constituta, sit autem regula, CE, vel, EF, & in eisdem tanquam in basibus, & eadem altitudine cum parallelogrammis, AE, ED, sint figuræ, BCE, BEF, cuiusmodi, vt si duxerimus vtcunque ipsi, CF, parallelam, vt, MQ, cuius portiones interceptæ parallelogrammis, AE, ED, sint, MO, OQ, & interceptæ figuris sint, IO, OP, reperiamus, MO, ad, OI, esse vt, QQ, ad, OP. Dico omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, esse vt omnes lineæ, BF, ad omnes lineas figuræ, BEF. Si verò vice linearum comparentur ab eisdem descriptæ figuræ, similibus ex-



stenti-

stantibus, quæ ab omnibus lineis uniuscuiusq; propolitarum figurarum describuntur, cuius describentes sint earum lineæ, vel latera homologa. Dico omnes figuras similes ipsius, AE, ad omnes figuras similes figuræ, BCE, esse ut omnes figuras similes ipsius, BF, ad omnes figuras similes figuræ, BEF, quia enim, MQ, utcumque ducta est parallela ipsi, CF, & est, MO, ad, OL, ut, QO, ad, OP, permutando erit, ut, MO, ad, OQ, sic, IO, ad, OP, id est, ut, CE, ad, EF, sic, IO, ad, OP, & sic ostendimus, ut, CE, ad, EF, ita esse quaslibet alias duas in figuris, BCE, BEF, existentes ipsi, CF, parallelas, & ut una ad unam sic omnia ad omnia, id est ut, CE, ad, EF, ita omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF, ut autem, CE, ad, EF, ita sunt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, ergo omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, erunt ut omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF.

Coroll. 4.
huius.

Si verò vice linearum sumamus descriptas, ut dictum est, ab eisdem figuris, ex.g. si, ut quadratum, MO, ad triangulum æquilaterum, cuius latus, IO, ita reperiamus esse circulum, cuius diameter, OQ, ad polygonum, cuius latus, OQ, omnium autem linearum, AE, singulæ describant quadrata, & omnium linearum figuræ, BCE, singulæ describant triangula æquilatera, & omnium linearum, BF, singulæ describunt circulos & figuræ BEF, singulæ describant polygona prædicto similia, ita ut quæ in eadē figura sunt lineæ, vel latera describentia sint homologa, erit ut quadratum, MO, permutando, ad circulum, OQ, ita triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, quia verò, MO, æquatur ipsi, CE, & OQ, ipsi, EF, idè quadratum, MO, æquatur quadrato, CE, & circulus, OQ, circulo, EF, & idè, ut quadratum, CE, ad circulum, EF, ita erit triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, unde, quia, MQ, utcumque ducta est parallela ipsi, CF, concludemus omnia quadrata, AE, ad omnes circulos, BF, esse, ut omnia triangula æquilatera figuræ, BCE, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF, & permutando omnia quadrata, AE, ad omnia triangula æquilatera figuræ, BCE, esse, ut omnes circuli, BF, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF.

25. l. 1.

Ex 4. huius.

Eodem modo fiet demonstratio, si vice istarum alia assumentur figuræ planæ, quarum possunt etiam, quæ sunt dua-

H rum

rum figurarum esse similes, vt si comparentur omnia quadrata parallelogrammorum, AE, ED , & omnia triangula æquilatera figurarum, BCE, BEF , vel si comparentur omnia quadrata, AE , & figuræ, BCE , & omnia triangula æquilatera, BF , & figuræ, BEF ; potest etiam esse omnium quatuor figurarum omnes figuras esse similes, vt si comparentur omnia quadrata eorundem vel omnes circuli, &c. Patet autem hic demonstrationem currere quotiescunque quæ comparantur sunt eiusdem generis scilicet, vel lineæ, vel superficies, si verò contingat magnitudines diuersi generis comparari, vt si comparentur omnes lineæ, AE , & figuræ, BCE , & omnia quadrata, BF , & figuræ, BEF , tunc quia à permutata ratione non possumus argumentari, cum lineam superficiem comparare sit absurdum, ideò demonstratio pro his non currit, quapropter aliud Theorema pro hoc subiungemus.

P R O P O S . XXVI.

IN eadem antecedentis Prop. figura si comparentur magnitudines diuersi generis, adhuc comparatæ magnitudines erunt proportionales.

Comparentur ex.g. omnes lineæ, AE , regula, CE , ad omnes lineas figuræ, BCE , & omnia quadrata, BF , regula, EF , ad omnia quadrata figuræ, BEF , ita vt ducta utcumque ipsi, CF , parallela, MQ , reperiamus, MO , ad, OI , esse vt quadratum, QQ , ad quadratum, OP . Dico adhuc omnes lineas, AE , ad omnes lineas figuræ, BCE , esse vt omnia quadrata, BF , ad omnia quadrata figuræ, BEF ; Ponatur seorsim parallelogrammum, AE , simul cum figura, BCE , sed, ne fiat confusio, sint sub ampliori forma, & in ipsis tanquam in basibus constituti intelligantur duo cylindrici recti, FE , nempe in basi, AE , & DGE , in basi figura, BCE , & in eadem altitudine, quorum quod insistit ipsi, AE , est parallelepipedum, vt facile

Ex Cor. 2
huius.

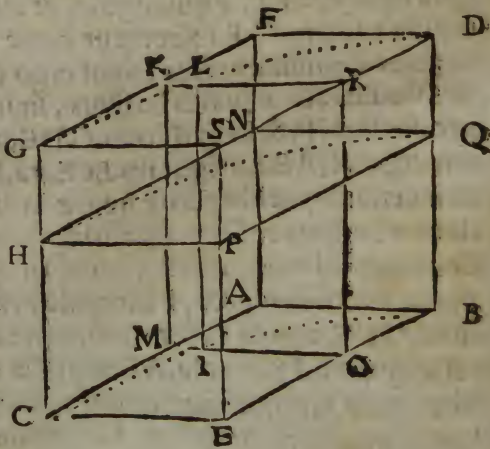
3. huius.

CDE, regula basi, CBE, sunt æqualia omnibus eiusdem planis, regula, GE, quæ & ipsa sunt omnia rectangula figuræ, CBE, regula, CE, æquæ alta, ac ipsum, GE, ergo omnia rectangula ipsius, AE, regula, CE, æquæ alta, ac ipsum, GE, ad omnia rectangula figuræ, CBE, regula, CE, æquæ alta, ac ipsum, GE, erunt vt, AE, ad figuram, BCE, scilicet vt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, BCE, regula, CE, quod serua,

Conspiciatur nunc figura Theorematis anteced. in qua diximus, MO, ad, OL, esse vt quadratū, QQ, ad quadratum, OP. Dico omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, esse vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, quia enim, vt MO, ad, OL, ita (sumpta quauis communi altitudine, nempe ex. g. altitudine constitutorum parallelepipedorum, quæ est, SE,) rectangulum sub, MO, & SE, ad rectangulum sub, IO, SE, idè, vt rectangulum sub, MO, SE, ad rectangulum sub, IO, SE, ita erit quadratum, OQ, ad quadratum, OP, sunt autē hę magnitudines eiusdem generis, nempe omnes superficies, ergo omnia rectangula ipsius, AE, regula, CE, æquæ alta, ac vnum eorum, nempe, vt rectangulum sub, CE, ES, ad omnia rectangula figuræ, BCE, regula eadem, CE, æquæ alta, ac vnum eorum, vt, GE, erunt vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, omnia verò rectangula ipsius, AE, æquæ alta, ac vnum eorum, vt, GE, ad omnia rectangula figuræ, BCE, æquæ alta, ac ipsum, GE, sunt vt om-

Ex proxime dictis.

nes lineæ ipsius, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE. Ergo oēs lineæ, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, erunt vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, sunt ergo proportionales, licet sint magnitudines diuersi generis, nempe lineæ, & superficies, quod ostendere opus erat.



C O.

COROLLARIUM I.

Hinc igitur primò habetur, si fuerint parallelogrammum, & figura plana in eadem basi, & altitudine, regula sumpta basi, omnia rectangula parallelogrammi æquæ alta ad omnia rectangula illius figuræ æquæ alta ac prædicta, esse ut dictum parallelogrammum ad dictam figuram, quod patuit, dum ostensum est omnia rectangula ipsius, AE , altitudinis, SE , ad omnia rectangula figuræ, BCE , altitudinis eiusdem, SE , esse ut, AE , ad figuram, BCE .

COROLLARIUM II.

Habetur secundò cylindricos in eadem altitudine existentes esse inter se, ut bases, quod de cæteris, veluti de supradictis, FE , GDE , ostendetur, quamvis aliter etiam id aliundè infra colligetur.

COROLLARIUM III.

Habetur tertio, si non sint in supradictis duobus Theorematis exposita duo parallelogramma, & duæ figuræ, sed vnum tantum, & vna figura in eadem basi, & altitudine cum ipso, cuius basi posita pro regula, & sumpto utcumque puncto in vno laterum basi insistentium, perque ipsum basi ducta parallela, reperiat eam, quæ intercipitur parallelogrammo ad eam, quæ intercipitur figura, vel figuras similes ab ipsis descriptas, tamquam homologis lineis, vel lateribus, esse ut vnam ex maximis abscissarum lateris, in quo sumptum est punctum, ad abscissam per ductam basi æquidistantem, vel ut istas adiuncta quadam recta linea, vel ut istarum figuras similes ab ipsis tanquam lineis, vel lateribus homologis descriptas, ita ut figuræ descriptæ a singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ parallelogrammi, & dictæ figuræ, sint similes, ut pariter, quæ describuntur à singulis earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ dicti lateris, quod adhuc dictæ magnitudines collectæ erunt propor-

Coroll. 2.
19. huius.

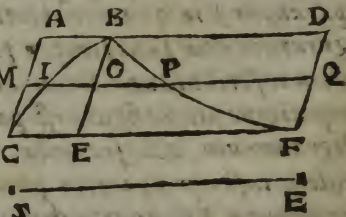
proportionales: Vt ex. g. si in Theorematis antecedentis figura habeamus tantum parallelogrammum, BE, & in eiusdē basi, EF, & eadem altitudine, figuram, BEF, & sumpto in vno laterum, BE, DF, vtcunque puncto, O, & per, O, ducta, OQ, parallela ipsi, EF, reperiamus, QO, ad, OP, esse vt, EB, ad BO, vel figuras similes descriptas ab, OQ, OP, tanquam lineis, vel lateribus homologis, vt ex g. quadratum, QO, ad quadratū, OP, esse vt, EB, ad, BO, vel vt, EB, adiuncta quadā linea ad, BO, adiuncta eadē, vel vt ab istis descriptas similes figuras, D, dico collectas magnitudines, quæ comparantur esse proportionales. Nam si ipsi, BE, intelligatur applicatum parallelogrammum AE, cuius basis sit, CE, in directum ipsi, EF, constituta, & CE, æqualis ipsi, EB, tunc omnes lineæ, AE, regula, CE, sunt æquales maximis abscissarum, BE, vt probatum est, & omnes abscissæ æquales omnibus lineis trianguli, BCE, si sit iuncta, BC, (quæ secet, MO, in, X,) vnde vice earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ ipsius, BE, rectè sumemus omnes lineas, AE, & trianguli, BCE, & ita reperiemus quadratum, QO, ad quadratum, OP, ex. g. esse vt, MO, ad OX, vel vt quadratum, M, O, ad quadratum, OX, vel vt aliæ figuræ similes ab ipsis descriptæ, siue ab ipsis simplicibus, siue ab ipsis adiuncta quadam linea, vnde casus iste ad casum Theorematis præsentis, vel antecedentis deductus erit, & idè patebit, omnes lineas, AE, ad omnes lineas trianguli, BCE, vel omnes figuras similes, AE, ad omnes figuras similes trianguli, BCE, idest vel maximas abscissarum, BE, ad abscissas omnes ipsius, BE, vel earum figuras similes esse, vt omnia quadrata, BE, ad omnia quadrata figuræ, BEF. Vocabuntur autem istæ; Quatuor ordinum magnitudines collectæ iuxta quatuor magnitudines proportionales vtcunq; inuentas, quæ fuerunt ex. g. prima quadratum, OQ, secunda quadratum, OP, tertia, EB, quarta, BO, magnitudines autē collectæ iuxta primam scilicet ex. g. omnia quadrata, BF, dicentur primi ordinis, collectæ verò iuxta secundam scilicet omnia quadrata figura, BEF, magnitudines secundi ordinis, collectæ verò iuxta tertiam magnitudines tertij ordinis, & tandem collectæ iuxta quartam magnitudines quarti ordinis. Sic igitur appellabimus hos quatuor magnitudinum ordines. In
supra-

parabilis, idè opus fuit etiam Propositionem 26. superaddere, qua certi fieri possemus etiam hos quatuor magnitudinum datarum quatuor figurarum ordines esse proportionales (quotiescunque quatuor singulares magnitudines, eadem linea, vel plani regulæ æquidistantis utcumque sumpti traiectione effecta, reperiuntur proportionales) etiam si comparate magnitudines sint diversi generis.

XXX.

Corollarium primum Propositionis 26. est maximè adnotandum, per illud enim nedum intelligimus, si fuerint parallelogrammum, & figura plana in eadè basi & altitudine, regula sumpta basi, omnia rectangula parallelogrammi æquæ alta ad omnia rectangula dictæ figure æquæ alta ac prædicta, esse ut dictum parallelogrammum ad dictam figuram: ut assumpto denuò Schemate Propositionis 25. omnia re-

ctangula ipsius, AE, altitudinis, SE, ad omnia rectangula figura, BCE, eiusdem altitudinis, ES, esse ut AE, ad figuram, BCE, subindeque ut omnes lineæ, AE, ad omnes lineas figure, BCE: Verum per hæc quoque admonemur huiusmodi doctrinam adèò subleuari posse: ut & omnes Dignitates seu Potestates Cosficas attingat. Velut enim in eodem Schemate si comparetur recta, MO, ad rectam, OI, tunc sumpta alia quacunque pro communi altitudine, ut eadem, MO, rectè inferimus ut, MO, ad OI, sic esse rectangulum sub, MO, MO, hoc est quadratū MO, ad rectangulum sub, MO, OI; unde per Propositionem 26. concludimus omnes lineas, AE, ad omnes lineas figura, BCE, esse ut omnia quadrata, AE, ad omnia rectangula sub, AE, & figura BCE: ita si ex. gr. primò compararetur quadratum, MO, ad quadratū, OI, deinde alia quævis recta ut, MO, sumeretur tanquam communis altitudo, sicuti rectè inferremus ut quadratum, MO, ad quadratum, OI, sic esse parallelepipedum sub basi quadrato, MO & altitudine, MO, hoc est cubum ipsius, MO, ad parallelepipedum sub basi quadrato, IO altitudine eadem, MO: non secus rectè concluderemus iuxta normam præfata Propositionis 26. cubos omnium linearū, AE, ad parallelepipeda sub omnibus quadrata.



quadratis figura, BCE, tanquam basibus, & altitudinibus omnibus lineis parallelogrammi, AE, esse ut omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata figura, BCE. Vel si pro communi altitudine sumeretur non linea, MO, sed quaecunque eiusdem Dignitas coëssica, ut ex. gr. secunda Dignitas, hoc est quadratū ipsius, MO, ad instar linea; sicuti recte inferremus, ut quadratum, MO, ad quadratū, OI, sic esse factū ex quadrato, MO, in quadratū, MO, s. biquadratū, MO, ad factū ex quadrato, MO, in quadratū, IO: ita recte cōcluderemus oīa biquadrata, AE, (nempe biquadrata omnium linearum, AE, ad instar rectangulorum) ad facta sub omnibus quadratis, AE, in omnia quadrata, BCE, esse ut omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata, BCE. Et sic res se haberet in alijs quibuscunque Dignitatibus coëssicis. Hæc ut leniter hic tacta, fusius suo loco explicabuntur, ubi quoque ad imitationem Propositionis 23. eiusq; Lemmatum, considerabimus sectionem, quæ sit in figuris planis à lineis, nedum quatenus diuidunt omnia quadrata ipsarum figurarum, iuxta propositam regulam; ut sit in dicta Propositione, suisq; Corollarijs; sed etiam prout diuidunt earundem figurarum omnes cubos, vel omnia biquadrata, aliasque sequentes Dignitates &c. in infinitum progredientes. Ut in superiori Schemate nedum considerabimus lineam, BC, quatenus diuidit omnia quadrata, AE, in omnia quadrata trilineorum, ACB, BEC. & in rectangula bis sub eisdem trilineis (ut docet nos Sectio, D, Corollarij Prop. 23. superioris) sed etiam quatenus diuidit omnes cubos, vel omnia biquadrata &c. eiusdem, AE, in sua frusta, qua erit mirabilis extensio Doctrina Secundi Elementorum.

XXXI.

Abscissa, & residua &c. in Cor. 3. prefata Prop. 26. considerate, necnon in Cor. Propositionis 24. commutabuntur in omnes lineas triangulorum componentium quadratum, vel rhombum adiacentem lateri, in quo sumenda in dictis locis precipiuntur abscissa, & residua &c. iuxta monita num. 24. Quapropter quatuor ordines magnitudinū in eodem Cor. 3. expensi (quorum duo ad abscissas, & residuas &c. reducuntur) intelligentur spectare ad quatuor figuras in iisdem parallelis constitutas, nu. 28. explicatas, quarum dua sunt semper parallelogrāma, & relique

I

dua

duæ consistunt unaqueque cum suo parallelogrammo in eadem basi. Ita ut cum traiecta utcumque linea, vel plano in ipsis figuris regula data æquidistante, emerferint quatuor singulares magnitudines proportionales, ex vi huius Corollarij in ferre possimus omnes horum quatuor ordinum magnitudines esse proportionales: per quod strata via est ad innumerabilia solida mensuranda.

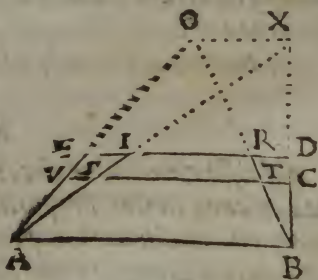
XXXII.

Veluti in planis post parallelogramma, & triangula eorum. trapezia in Prop. 20. congruè expensa fuerunt: ita post cylindricos, & conicos, eorundem conicorum frusta considerant sequentes Proposit. 27. & 28. quas idè hic pariter adiungimus

PROPOS. XXVII.

SI duo trapezia fuerint in eadem basi, sumpto vno laterum æquidistantium pro basi, & regula, & fuerint etiam in eadem altitudine respectu illius basis, & latera basi parallela fuerint æqualia, trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata erunt æqualia.

Sint duo trapezia, AERB, IABD, in eadem basi, AB, quæ sit sumpta pro regula, cuique latera, ER, ID, sint parallela & iter se æqualia. Dico trapezia esse æqualia, & omnia eorundem quadrata esse æqualia. Producantur, AE, BR, donec sibi occurrant, ut in O, & AI, BD, donec simul incidant, ut in X, & iungatur, OX. Quia ergo, ER, parallela est ipsi, AB, erunt triangula, AOB, EOR, similia, & eadem ratione similia erunt triangula, AXB, IXD, ergo ut AB, ad, ER, vel ad, ID, illi æqualem, ita erit, BO, ad OR, ut autem, AB, ad, ID, ita est, BX, ad, XD, ergo ut, BO, ad, OR, ita est, BX, ad, XD, ergo, OX, parallela est ipsi, ED. Ducatur intra trapezia parallela ipsi, AB, utcumque, VC, si cavis, XA, in, S, & OB, in, T, sunt igitur triangula, AOB, VOT, similia, & pari-



Iux. diff. 1.
Sexti Element.

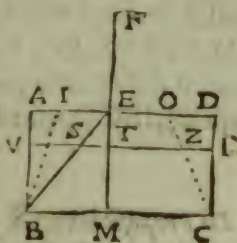
4. Sexti
Elem.

& pariter sunt similia triangula, AXB, SXC, ergo, AB, ad, VT, erit vt, BO, ad, OT, idest vt, BX, ad, XC, (quia, VC, parallela est ipsi, AB, & consequenter ipsi, OX,) idest vt, AB, ad, SC, ergo, VT, SC, erunt æquales, & eorum quadrata pariter æqualia. Sic autem de cæteris ipsi, AB, parallelis idem ostendetur, ergo omnes lineæ trapezij, AERB, erunt æquales omnibus lineis trapezij, AIDB, regula, AB, & consequenter ipsa trapezia erunt æqualia, & oia earundem quadrata pariter æqualia, quod ostendere opus erat.

P R O P O S . XXVIII.

SI parallelogrammum, & trapezium habuerint communem basim vnum æquidistantium laterū trapezij, quod sit sumptum pro regula: Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata trapezij erunt, vt quadratum dictæ basos ad rectangulum sub parallelis latcribus trapezij, cum $\frac{1}{4}$ quadrati differentie dictorum laterum æquidistantium.

Sit parallelogrammum, AC, & trapezium, IBCO, cuius laterum æquidistantium alterum, vt, BC, sit communis basis ipsi, & trapezio, & regula. Dico ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trapezij, IBCO, esse vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, IO, vna cum $\frac{1}{4}$ quadrati differentie ipsarum, BC, IO. Sumatur in, DA, ipsa, ED, æqualis ipsi, IO, & iungatur, BE, & per, E, ipsi, AB, DC, parallela ducatur, EM: Omnia ergo quadrata trapezij, EBCD, per lineam, EM, diuiduntur in omnia quadrata trianguli, EBM, in omnia quadrata, MD, & in rectangula sub triangulo, EBM, & EC, bis sumpta, ad horum ergo singula comparemus omnia quadrata, AC. Igitur omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, CE, sunt vt quadratum, BC, ad quadratum, CM, quod serua. Insuper omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, AM, sunt vt quadratum, CB, ad quadratum, BM, item omnia quadrata, AM, sunt tripla om-



Per D. Co
roll. 23.
huius.

9. huius.

9. huius.

I 2 nium

24. huius. nium quadratorum triaguli, EBM, idest sunt ad illa, vt quadratum, BM, ad $\frac{1}{4}$. quadrati, BM, ergo ex æquali, omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, erūt vt, BC, ad $\frac{1}{4}$. quadrata, BM, quod pariter serua. Tandem omnia quadrata, AC, ad rectangula sub, AM, MD, erunt vt quadratum, BC, ad rectangulum, BMC, rectangula verò sub, AM, MD, ad rectangula sub triangulo, EBM, & sub, MD, sunt vt, AM, ad triangulum, EBM, (quia illa sunt omnia rectangula parallelogrammi, AM, & trianguli, EBM, æque alta, altitudinis nempè æqualis ipsi, MC, sumpta regula, BM,) idest dupla, idest vt rectangulum, BMC, ad eiusdem dimidiū. Ergo ex æquali omnia quadrata, AC, ad rectangula sub triangulo, EBM, & sub, MD, erunt vt quadratum, BC, ad dimidium rectanguli, BMC, ad eadem verò bis sumpta erunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum, BMC. Ergo, colligendo, omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, EC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, & ad rectangula bis sub triangulo, EBM, & sub, EC, erunt vt quadratum, BC, ad quadratū, CM, cum rectangulo, CMB, & $\frac{1}{4}$. quadrati, BM. Sed rectangulum, BMC, cum quadrato, MC, conficit rectangulū sub, BC, CM, ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, parallelogrammi, MD, & rectangula bis sub eisdem, idest ad omnia quadrata trapezij, EDCB, idest ad omnia quadrata trapezij, IBCO, (quia, IO, ED, sunt æquales) erunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, CM, idest sub, BC, ED, vel, IO, vna cum $\frac{1}{4}$. quadrati, BM, quæ est differentia parallelarum, BC, ED, siue, BC, IO, ipsius trapezij, IBCO, quod ostendere opus erat.

Per D. Co
rol. 23. h
ius.
Ex antec.

XXXIII.

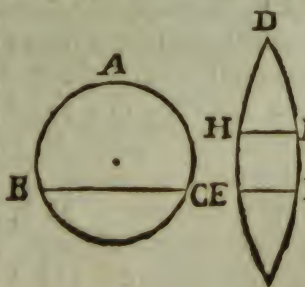
*In Propositione 28. superiori, & illius Schemate apparet v-
sus sectionis, D, Corollarij Propof. 23. dum linea, EM, conside-
ratur secare omnia quadrata trapezij, EBCD, in omnia qua-
drata figurarum, EBM, EMCD: & in rectangula bis sub iisdem.
Quoniam verò reiecta sunt abscisse, & residua &c. idèd præter-
missum est Corollarium ipsius Prop. 28. Sic relinquuntur & se-
quentes Propositiones à 29. vsque ad 33. exclusiue, cum suis Co-
rollarijs, quia sunt Propositiones Lemmaticæ, præsertim pro do-
ctrina*

Trina Libri 3. 4. at 5. quam hic totam extendere nequaquam intendo. sed tantum de dicta Geometria Ind. huc ea duxi transferenda. quibus priorem Indivisibilium methodum Lector sufficienter edoceri possit. Sequuntur nunc duae Propositiones, nempe 33 & 34. cum suis Corollarijs. quarum veritas cum in antecedentibus supposita fuerit ideo illis premittenda ipsa fuissent. sed ne ordo Libri secundi dicta Geometria perverteretur, suo loco relicta sunt. De ijs autem pramonitus fuit studiosus. ne ob nimiam abstractionem omnium quadratorum consideratarum figurarum, nimis iniucunda eidem evaderet hac doctrina, illius finem non percipienti. Nunc ergo de praesumptis certus sit dum in Prop. 33. eiusque Corollarijs intelligit in consideratione omnium quadratorum datarum figurarum simul comprehendendi & omnes alias similes earundem figuras & omnia solida simularia ab eisdem genita. Sic in Prop. 34. clare intuetur solida simularia genita ex parallelogrammis iuxta regulas bases esse cylindricos, & ex triangulis esse conicos sicuti ex trapezys, esse conicorum frusta, quae supra assumebantur.

PROPOS. XXXIII.

EXpositis duabus utcumque figuris planis, & in earum unaquaque sumpta utcumque regula. ut omnia quadrata earundem figurarum sumpta iuxta dictas regulas, ita erunt solida quaecumque ad invicem simularia ex eisdem figuris genita iuxta eadem regulas.

Sint duae utcumque figurae planae, ABC, DEF, in quibus duae utcumque sint sumptae regulae, BC, EF, rectae lineae. Dico igitur, ut omnia quadrata figurae, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figurae, DEF, regula, EF, ita esse solidum simulare quodcumque genitum ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, ad sibi simulare genitum ex figura, DEF, iuxta regulam, EF. Ducatur in altera dictarum figurarum, ut in, DEF, ut-



cumq;

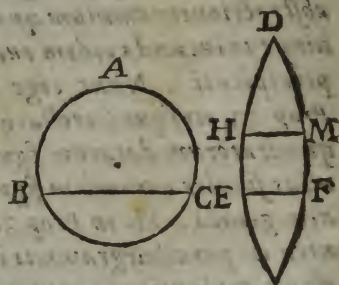
Vide B.
Definit. 8.
huius.

8. & 15.
huius.
15. huius.

cumque regulæ, EF, parallela, HM, quia ergo quadrata habent inter se duplam rationem laterum, à quibus describuntur, idèò quadratum, EF, ad quadratū, HM, habebit duplam rationem eius, quam habet, EF, ad HM, sed etiam aliæ duæ quæcumq; figuræ planæ similes ab eisdem tanquam lineis, vel lateribus homologis earundem, descriptæ habent duplam rationem earundem, ergo, vt quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita erit alia quælibet figura plana descripta ab, EF, ad similem, sibi descriptam ab, HM, ita vt, EF, HM, sint earum homologæ, & permutando, quadratum, EF, ad aliam figuram descriptam ab, EF, erit vt quadratum, HM, ad figuram prædictæ similem ab, HM, descriptam. Sic etiam esse ostendemus quadratum cuiuscumque

Coroll. 4.
huius.

in figura, DEF, ductæ ipsi, EF, æquidistantis, ergo, vt vnum ad vnū, sic omnia ad omnia, idèst vt quadratū, EF, ad figuram aliam quamcumq; descriptā ab, EF, sic erūt omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, DEF, regula eadē, EF, similes inquam descriptæ ab, EF. Vt autem quadratum, EF, ad figuram descriptam ab, EF, ita quadratum, BC, ad figuram, quæ describitur à, BC, similis ei, quæ descripta est ab EF, ita vt descriptæ sint earundem homologæ, & vt quadratum, BC, ad figuram descriptam à, BC, sic esse ostendemus omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, ABC, similes inquam descriptæ à, BC, vel ab, EF, eodem modo, quo id ostendimus in figura, DEF: ergo omnia quadrata figuræ, ABC, ad omnes figuras similes alias quascunq; eiusdem figuræ, ABC, erunt, vt omnia quadrata figuræ, DEF, ad omnes figuras similes prædictis eiusdem figuræ, DEF, regulis eisdem BC, EF, ergo permutando, vt omnia quadrata figuræ, ABC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, ita erunt omnes figuræ similes quæcumq; figuræ, ABC, ad omnes figuras similes prædictis figuræ, DEF. Quia, verò omnes figuræ similes



les alicuius figuræ planæ regula quadam sumptæ, sunt omnia plana solidi, quod dicitur simile, & genitum ex tali figura iuxta eandem regulam, idè, ut omnes figuræ similes quæcunque ipsius figuræ, ABC , regula, BC , ad omnes figuras similes ipsius figuræ, DEF , regula, EF , similes inquam prædictis, idè, ut omnia quadrata figuræ, ABC , regula, BC , ad omnia quadrata figuræ, DEF , regula EF , ita erunt omnia plana solidi similis cuiuscunque geniti ex figura, ABC , iuxta regulam, BC , ad omnia plana solidi similis geniti ex figura, DEF , iuxta regulam, EF . Ut autem omnia plana duorum solidorum sic & ipsa solida, ergo etiam solida similia genita ex figuris, ABC , DEF , (quæ sunt similia ad inuicem, quia omnes figuræ similes figuræ, ABC , sunt etiam similes omnibus figuris similibus figuræ, DEF ,) iuxta regulas, BC , EF , erunt ad inuicem, ut omnia quadrata earundem figurarum eisdem regulis sumpta, quod erat ostendendum.

B. diff. 8. huius.

Postulatū 2. huius.

3. huius.

COROLLARIUM I.

Hinc patet, si in figura, ABC , utcumque regula, BC , descriperit duas quascunque figuras, quod ut una ad aliam, ita erunt omnes figuræ ipsius, ABC , similes uni descriptarum, ad omnes figuras eiusdem similes alteri descriptarum, idè, ita omnia plana solidi similis geniti ex, ABC , iuxta regulam, BC , (similibus existentibus eiusdem figuris uni descriptarum) ad omnia plana solidi similis geniti ex eadem figura iuxta eandem regulam (huius similibus existentibus figuris alteri descriptarum) idè, ita erunt solida similia genita ex eadem figura, ABC , iuxta eandem regulam, BC , non tamen similia ad inuicem, sed quarum omnia plana sunt omnes figuræ similes eiusdem, ABC , similes inquam, quæ sunt unius dictorum solidorum uni descriptarum à, BC , figurarum, & quæ sunt alterius, similes alteri descriptarum figurarum.

CO-

COROLLARIUM II.

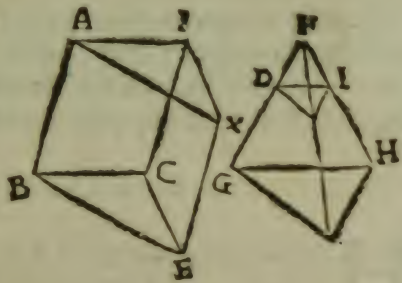
Vnde solida similia, sed non ad inuicem, genita ex. g.
 à figuris, ABC, DEF , iuxta regulas, BC, EF , quæ duas
 figuras planas dissimiles descripserint, quibus sint similes fi-
 guræ, quæ dicuntur omnia plana dictorum similiarum soli-
 dorum; erunt ad inuicem, ut ipsæ figuræ dissimiles descriptæ
 ab ipsis, BC, EF . Nam solidū simile genitū ex, DEF , iuxta
 regulam, EF , ad sibi simile genitum ex figura, ABC , iuxta
 regulam, BC , erit ut figura descripta ab, EF , ad sibi similem
 figuram descriptam à, BC , item solidum hoc simile geni-
 tum ex figura, ABC , iuxta regulam, BC , ad solidum simile,
 sed non sibi, genitum ex eadem figura iuxta eandem regu-
 lam, BC , erit ut figura descripta à, BC , similis descriptæ ab,
 EF , ad figuram sibi dissimilem descriptam ab eadem, BC ,
 (quibus figuris dissimilibus sint similes figuræ, quæ dicuntur
 omnia plana solidorum similiarum genitorum ex eadem fi-
 gura, ABC , iuxta communem regulā, BC ,) ergo ex æquali
 solidum simile genitum ex figura, DEF , ad solidum simi-
 lare, sed non sibi, genitum ex figura, ABC , (genita intelli-
 ge iuxta regulas, EF, BC ,) erit ut figura descripta ab, EF , cui sunt
 similes figuræ huius solidi, ad figuram descriptam à, BC , præ-
 dictæ dissimilem, cui sunt similes figuræ solidi ex, BAC , ge-
 niti iuxta regulam, BC .

PROPOS. XXXIV.

Solida similia genita ex parallelogrammis iuxta regu-
 lam vnum eorundem laterum, sunt cylindrici. Et solida
 similia genita ex triangulis iuxta regulam vnum eorun-
 dem laterum, sunt conici; quorum bases erunt figuræ à regu-
 lis descriptæ, & latera, eorundem parallelogrammorum, vel
 triangulorum latera regulis insistentia.

Sit ergo expositum quodcumque parallelogrammum;
 AC , & triangulum, FGH , in quibus pro regulis sumantur
 latera, BC, GH . Dico solidum quodcumque simile genitū
 ex pa-

ex parallelogrammo, AC, (iuxta regulam, BC,) esse cylindricum, cuius basis erit à, BC, descripta figura, & latus vtriusque ipsorum, AB, LC, laterum regulæ, BC, insistentium; Et genitum ex triangulo, FGH, iuxta regulam, GH, esse conicum, cuius basis erit à, GH, descripta figura, & latus vtriusque duorum, FG, FH, regulæ, GH, insistentium. Describantur à regulis, BC, GH, figuræ vtriusque planæ, BCE, GHP, æqualiter inclinatæ planis, AC, FGH, deinde per circuitum figuræ, BCE, feratur latus, AB, cui sit æquale latus, EX, quodque puncto, A, describat circuitum figuræ, AXL, & per circuitum figuræ, GHP, feratur vtriusque laterum, FG, FH, indefinitè productum versus figuram, GHP, cuius portio inter, F, & punctum, P, sit, FP, erit ergo solidum, quod clauditur superficie cylindrica, descripta latere, AB, & duabus figuris, ALX, BCE, cylindricis; & quod clauditur superficie conica descripta altero



Ex def. 3.
& 4. l. 1.

laterum, FG, FH, indefinitè productum, & figura, GHP, erit conicus. Dico autem solidum simile genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, cuius omnia plana sint omnes figuræ ipsius, AC, similes figuræ, BCE, esse hunc cylindricum, ACE, nam quælibet earum, quæ dicuntur omnes figuræ similes parallelogrammi, AC, regula, BC, similes inquam figuræ, BCE, est etiam similiter posita, ac, BCE, descripta latere homologo ipsi, BC, igitur eius perimeter erit in superficie cylindrica descripta latere, AB, si enim aliquid eius esset intra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra communem sectionem talis assumptæ figuræ, & superficie cylindricæ: talis autem communis sectio est perimeter figuræ similis, & similiter posita, ac, BCE, (quia si cylindricus plano secetur basi æquidistante concepta figura erit similis, & similiter posita, ac basis) ergo haberemus duas figuras ab eodem latere homologo descriptas, similes æquales, & similiter positas, & non congruentes, quod est absurdum,

A. def. 8.
huius.

Corol. 12.
l. 1.

Corol. 25.
l. 1.

K

con-

congruent igitur, erit ergo assumpta figura, quæ est vna earum, quæ dicuntur omnes figuræ parallelogrammi, AC, similes ipsi, BCE, regula, BC, & est vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana solidi similis geniti ex, AC, iuxta regulam, BC, erit, inquam, assumpta figura etiam vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, ACE, regula, BCE, quod etiam de cæteris simili modo ostendetur. Ergo solidum simile genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, & cylindricus, ACE, habebunt omnia plana (regula, BCE, assumpta) communia, ergo solidum simile genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, erit idem cylindrico, ACE, cuius basis est figura, BCE, & latus alterum laterum, AB, LC. Similiter ostendemus solidum simile genitum ex triangulo, FGH, iuxta regulam, GH, esse idem conico, FGHP, cuius latus alterum laterum, FG, FH, & basis est figura, GHP, consimili via supradictæ procedentes, quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, si figuræ descriptæ à, BC, GH, sint circuli, quod solidum simile genitum ex, AC, erit cylindrus, & genitum ex triangulo, FGH, conus, siue recti, siue scaleni; si verò descriptæ figuræ sint rectilineæ, genitum ex, AC, erit prisma ex, FGH, autem pyramis, siue recta, siue scalena cætera autem nomine communi vocantur solida similia genita ex eisdem fig. iuxta regulas, intellige, BC, GH.

COROLLARIUM II.

Si intra triangulum, FGH, ducamus ipsi, GH, parallelam vtcunque, quæ sit, DI, abscindens à triangulo, FGH, trapezium, DH, ostendemus eodē modo, quo supra, solidum simile genitum ex trapezio, DH, iuxta regulam, GH, esse frustum solidi similis geniti ex triangulo, FGH, iuxta eandem regulam, id est frustum conici, FGHP, id est coni, cum figura descripta à, GH, est circulus, vel frustum pyramidis rectæ, siue scalenæ, cum illa est figura rectilinea, quæ facile ostenduntur.

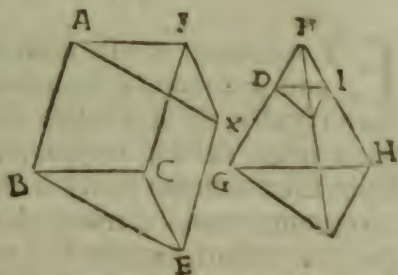
E. def. 4.
I. I.

C O.

COROLLARIUM III.

TAndem patet vice versa, si quis cylindricus, vel conicus, vel eius frustum, intelligatur secari per latera, de illo plano secante conceptam in secato solido figuram esse genitricem earundem per descriptionem similium figurarum, & ipsa esse solida similia genita ex eisdem figuris genitricibus iuxta regulas communes sectiones planorum secantium, & basium, quæ figuræ genitrices in cylindricis erunt parallelogramma, in conicis triacula, & in frustis conicis trapezia. Igitur verum est

quodlibet solidum simile genitum ex parallelogrammo iuxta regulam unum laterum esse cylindricum, & genitum ex triangulo iuxta regulam unum laterum esse conicum, & ex trapezio esse frustum conicum; & vice versa, quemlibet cylindrum esse solidum simile genitum ex parallelogrammo in ipso producto per planum per latera ductum, genitum inquam iuxta communem sectionem eius, & basis cylindricæ; & quemlibet conicum esse solidum simile genitum ex triangulo in eodem producto per traiectionem plani per latera, genitum inquam iuxta communem sectionem eius, & basis dicti conici; & quodlibet frustum conicum esse solidum simile genitum ex trapezio in ipso producto per traiectionem plani per latera eiusdem frustis, genitum inquam iuxta regulam communem sectionem eius, & unius basium eiusdem. Siue ergo, exposito parallelogrammo, & triangulo intellexeris iuxta diff. 8. huius, describi omnes figuras similes eis quæ describuntur à basibus dicti parallelogrammi, & trianguli, & sic conceperis effici solidum, cuius illa sunt omnia plana; siue intellexeris latus dicti parallelogrammi, vel trianguli indefinitè productum revolui per circuitum figurarum à basibus descriptarum, ut habeas solidum dictæ superficiei



13. l. 1.
2. & Cor.
1. r.

Cor. 6. l. 1.
16. l. 1.

Diff. 3. &
4. l. 1.

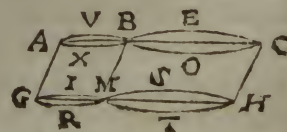
perficie descripta, & basi, vel basibus comprehensum, idem utroq; modo tibi obuenit solidum, Potest autem prior vocari generatio solidorum per descriptionem figurarum; posterior autem, generatio solidorum per reuolutionem facta, quæ maioris dilucidationis gratia hic apposui, ut ex hac declaratione aliquammodo pateat, in plurimis etiam alijs utramq; generationem ritè nos imaginari posse, ut in sphaera, sphaeroide, conoidibus, eiusdem frustis, & alijs quamplurimis, ut suo loco animaduertetur.

A. COROLLARIUM IV. GENERALIS SECTIO I.

ET quoniam, ut ostensum est Prop. 33. huius Libri, ut omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita sunt solida similia genita ex eiusdem figuris iuxta easdem regulas: ideò cum in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum parallelogrammorum, vel triangulorum, vel trapeziorum, regulis eorum lateribus, eandem rationem comperiemus habere solida similia genita ex parallelogrammis, idest cylindricos, vel ex triangulis, idest conicos, vel ex trapezijs, idest frusta conica, genita inquam iuxta easdem regulas, quæ amplius dilucidabimus singula, quæ opportuna fuerint, Theorematibus denuò assumptis.

B. SECTIO II.

IN Prop. 9. igitur exposita denuò eius figura, intelligantur bases, GM, MH, describere similes figuras planas, quæ sint, GIMR, MTHS, ut eorum lineæ, vel latera homologa, æquè erectas planis, AM, MC, & in ijs, tanquam in basibus consistere cylindricos. AM, BH, quorum latera sint, AG, CH. Erunt igitur hi



Corol. 3. cylindrici solida similia genita ex parallelogrammis, AM, ant. MC, iuxta regulas, GM, MH, igitur erunt, ut omnia quadrata eorum.

eorundem regulis eisdem, GM, MH: sunt autem omnia eorum quadrata, ut quadrata basium, GM, MH, ergo cylindrici, AM, MC, erunt ut quadrata basium, GM, MH, id est ut figuræ similes, GIMR, MSHT, igitur cylindrici in eadem altitudine, & similibus basibus insistentes sunt, ut ipse bases. 9. huius.

C. SECTIO III.

IN Prop. 10. consimiliter procedentes colligemus, cylindricos in eadem, vel æqualibus, ac similibus basibus consistentes esse, ut altitudines, vel ut latera æqualiter eorundem basibus inclinata.

D. SECTIO IV.

IN Propos. 11. deducemus cylindricos similibus basibus insistentes habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter dictis basibus inclinorum.

E. SECTIO V.

IN Prop. 12. colligemus cylindricos, quorum similes bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocè respondent, esse æquales; & cylindricos æquales, similibus basibus insistentes, bases habere altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

F. SECTIO VI.

IN Prop. 13. habebimus similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum.

G. SECTIO VII.

EX Prop. 14. colligimus si prædicti cylindrici insistant basibus dissimilibus, adhuc prædictas passiones de ipsis verificari; in quibus tamen non numerantur similes cylindrici, cum oporteat eosdem similes bases habere.

H. SE-

H. SECTIO VIII.

Ex hac
Propos.

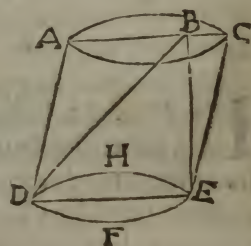
IN Prop. 22. habemus in eius figura, solida similia genita ex parallelogrammis, AS, T β , iuxta regulas, ES, Z β , eandem rationem habere ad solida similia genita ex triangulis, OES, & Z β , idest cylindricos genitos ex, AS, T β , ad conicos genitos ex triangulis, OES, & Z β , eandem rationem habere, unde, cum conici sint partes proportionales cylindricorum in eadem altitudine cum ipsis existentium, quæcunq; de cylindricis in huius Coroll. Sectionibus 2. 3. 4. 5. 6. & 7. collecta sunt, eadem & pro conicis tamquam collecta recipiemus.

I. SECTIO IX.

Coroll. 6.
& 16. l. 1.Coroll. 3.
34. huius.

24. huius.

IN Prop. 24. habemus quemcumq; cylindricum esse triplum conici in eadem basi, & altitudine cum ipso. Sit expositus quicumq; cylindricus, AE, in basi, DHEF, in eadem autem basi, & altitudine sit conicus, DBE, sic tamen basi insistent, ut ducto plano per latera conici, idem transeat per latera cylindrici, AE, sit autem ductum tale planum, quod faciat in conico, DBE, triangulum, DBE, & in cylindrico, AE, parallelogrammum, AE, erunt igitur, AE, & triangulum, DBE, genitricæ figuræ eorundem solidorum, quæ similia ad inuicem vocantur, genita iuxta communem regulam, DE, quod ergo gignitur ex, AE, ad genitum ex triangulo, DBE, erit ut omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata trianguli, DBE, regula, DE, idest triplum. Solidum verò simile genitum ex, AE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ sint similes figuræ, DFEH, est cylindricus, AE, & solidum simile genitum ex triangulo, DBE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ sint similes pariter figuræ, DFEH, est conicus, DBE, ergo cylindricus, AE, triplus erit conici, DBE, & consequenter triplus erit cuiusvis alij in eadem basi, DFEH, & altitudine, cum conico, DBE, existen-



existentis, quoniam, ut ostensum est, conici in eadem altitudine stantes sunt, ut bases, unde cum bases sunt æquales, & conici sunt æquales, verum ergo est, quod proponebatur.

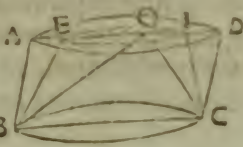
34. huius
Per B. C o
rol. 27. hu
ius.

K. S E C T I O X.

IN Prop. 27. habemus solida ad inuicem similiaria genita ex trapezijs in eadem basi (quæ sit vnum laterum æquidistantium) & altitudine constitutis, quorum oppositæ bases sint æquales, genita, inquam, iuxta communem regulam ipsam basim, idest frustra conicorum quorum oppositæ bases sunt figuræ descriptæ à lateribus dictorum trapeziorum æquidistantibus, esse æqualia.

L. S E C T I O XI.

IN Prop. 28. habetur cylindricum in eadem basi, & altitudine cum frusto conici constitutū, ad idem, esse (sumptis duabus homologis in oppositis frusti conici basibus) ut quadratum maioris dictarum homologarum ad rectangulū sub dictis homologis vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiarum eorumdem homologarum. Sit cylindricus, AC, in basi figura quacunque plana, BC, in eadem autem basi, & altitudine sit frustum conici, EBCI, sic tamē se habens, ut ducto plano per latera cylindrici, AC, idem trāseat per latera frusti conici, BEIC, sit autem ductum tale planum, quod faciat in cylindrico, AC, parallelogrammum, AC, & in frusto, BEIC, trapezium, BEIC, erunt igitur rectæ, BC, EI, lineæ oppositarum basium frusti inter se homologæ, & quia cylindricus, AC, est solidum simile genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, & frustum, EBCI, est solidum prædicto simile genitum ex trapezio, EBCI, sunt autem hæc solida similiaria, ut omnia eorumdem quadrata, & omnia quadrata, AC, regula, BC, ad omnia quadrata trapezij, EBCI, regula eadem sunt, ut quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, EI, vna cū $\frac{1}{3}$. quadrati differentiarum eorumdem. Ergo cylindricus, AC, ad frustum



Corol. 21.
1.1.
Coroll. 3.
34. huius.
33. huius.
27. huius.

K. huius.
Cor. gen.

Cor. 2. r.
h. r.

frustum conicum, $EBCI$, & ad quoduis aliud in eadem basi, & altitudine cum hoc constitutum, (quoniam existet huic æquale) erit ut quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , EI , una cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentie earumdem, BC , EI , quæ sūt duarum oppositarum basium, EI , BC , homologæ utcumq; sumptæ, nam planum eadem solida secans ductum est utcumque, dummodo per eorumdem latera transeat.

M. S E C T I O XII.

I. huius.
Cor. gen.

H Incipat si in eadem basi, BC , figura, fuerit conicus, & eadem altitudine cum frusto, idest cum cylindrico, AC , qui sit conicus, BOC , quod hic erit $\frac{1}{3}$. cylindrici, AC , & ideò ad frustum, $EBCI$, erit ut $\frac{1}{3}$. quadrati, BC , ad rectangulum sub, BC , EI , una cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentie, BC , EI , idest ut totum quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , & tripla, EI , una cum toto quadrato differentie earumdem, BC , EI . Vide igitur quam sit amplior hæc demonstratio ea, quæ alij ostenderunt cylindrum esse triplum coni, & prisma pyramidis in eadem basi, & altitudine cum ipso constitutæ, nam ad tot varia solida hæc se extendit, quot sunt figurarum planarum variationes, quæ nullo assignato coarctantur numero, cuiusmodi demonstrationis vniuersalitem in alijs figuris quoque in posterum considerandis prosequemur, ut amplius infra patebit.

N. S E C T I O XIII.

I N Prop. 29. & eius Corollario tandem edocemur solida similia genita ex parallelogrammo, vel triangulo eodem, iuxta duas regulas latera angulum continentia, idest cylindricos ab eodem parallelogrammo, & conicos ab eodem triangulo genitos, iuxta dictas regulas, esse inter se, ut easdem regulas.

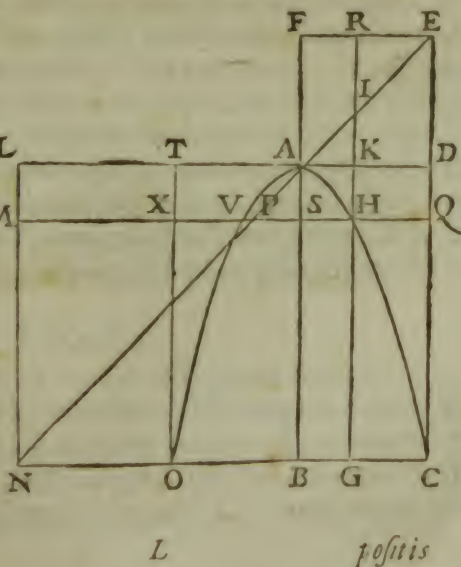
XXXIV.

Per supraposita Corollaria fructum huius doctrine Indivisibilem amplius percipere potest Studiosus, etsi eorum maior pars fuerit.

fuerit & superius declarata. Sequentes verò Propositiones à 35. usque ad finem dicti Libri secundi, cum sint lemmatica ad alios Libros, propterea relinquuntur. Per ea ergo, quæ hic allata sunt potuit Lector vim prioris methodi Indivisibilium experiri, primò in parallelogrammis secundo in triangulis, tertio in eorum trapezys, quarto in cylindricis, quinto in conicis, sexto, & ultimò in eorundem conicorum frustis. Hæc, puto, sufficere potuissent, ut huius prioris methodi fieret capax, sed ad maiorem eiusdem intelligentiam, de eadem quoque periculum faciemus in arca inuestiganda alicuius insignis figuræ planæ, & soliditate corporis illustris: Ut ad eorum normam percipiat & reliquarum figurarum tam planarum, quam solidarum mensuram obtineri posse. Inter omnes ergo à me delecta est Parabola, & Conoides parabolicum ab eadem genitum, præcipuè cum mihi facilius captus visa fuerint. Hæc metitur quoque Liber 4. dictæ Geometria, sed ut pateat quoque exemplum operandi sine abscissis, residuis &c. ut ibi fit, propterea iuxta sequentem rationem earum mensura patefiet.

XXXV.

Sit enim quæcunque Parabola, OAC, cuius vertex, A, basis, OC, & diameter, AB, ita ut sit semiparabola, ABC. Cum enim, AB, dividat bifariâ omnes ipsi, AC, æquidistantes, sit ut omnes lineæ ipsius, AOB, sint æquales omnibus lineis ipsius, L ACB, regula, OC, quare per Prop. 3. AOB, æquatur ipsi, ACB, atque, ACB semiparabola. Compleantur nunc parallelogramma, ABC, ABO, ut fiant parallelogrammum, TC, ipsi parabola, OAC, & BD, BT, semiparabolas, ACB, AOB, circumscriptæ. His sup-



positis dico parallelogrammū, TC, esse ipsius parabola, OAC sex-
 quialterū. Producat, BA, in, F, ita ut, AF, sit equalis, AD, &
 cōpleatur parallelogrammum, FADE, ducaturq; in eo diameter,
 AE, & intra, CE, BF, agatur earū alteri, ut ipsi CE, tamquā re-
 gula quacumq; parallela, GR, secans, BC, in, G, curuā, AC, in, H,
 AD, in, K, AE, in, I, & FE, in, R; sitque per, H, ducta, QS, ipsi,
 BC, æquidistans. Est ergo quadratum, CB, ad quadratū, HS,
 ut, BA, ad, AS, per Prop. 20. Primi Conicorum. siue ex Prop. 38.
 & Scholio Prop. 40. Libri Primi Geometrie Ind. Cum verò, BC,
 æquetur ipsi, AD, seu, AF, hoc est, RK, & SH, ipsi, AK, idest, KI,
 (ut enim, AD, est ipsi, DE, equalis, ita, AK, æquatur ipsi, KI,) &
 GK, ipsi, AB sicuti, KH, ipsi, AS; ideo ut quadratum, RK, ad qua-
 dratum, KI, ita erit, Gk, ad, kH. Inuenimus ergo quatuor has
 magnitudines, utcumq; sumptas, proportionales, ergo per Cor. 3.
 Propositionis 26. adhibitum sine abscisses &c. iuxta premonita
 num. 30. quatuor magnitudinum ordines, iuxta quatuor dictas
 magnitudines, assumptarum in quatuor figuris, quarum prima
 est parallelogrammum, FD, secunda triangulum, ADE, tertia
 parallelogrammum, DB, & quarta trilineum, ADC, erunt pro-
 portionales. Hoc est ut omnia quadrata parallelogrammi, FD,
 ad omnia quadrata trianguli, ADE, regula, CE, ita erunt omnes
 lineæ parallelogrammi, BD, ad omnes lineas trilinei, ADC, re-
 gula cadem, CE. Sed omnia quadrata, FD, omnium quadrato-
 rum trianguli, ADE, ostensa sunt tripla esse in Prop. 24. & de-
 monstratione directā, num. 26. superiori. Ergo omnes lineæ pa-
 rallelogrammi, DB, triplæ erunt omniū linearum trilinei, ADC.
 Verum ut omnes lineæ ad omnes lineas duarum figurarum, ita
 sunt ipsæ figuræ per Prop. 3. Ergo parallelogrammum, BD, triplum
 erit ipsius trilinei, ADC & subinde sex quialterum semiparabo-
 le, ABC; unde parallelogrammum, TC, sexquialterum erit pa-
 rabola; OAC, sunt enim hæc predictorum dupla. Quod &c.

XXXVI.

Producat nunc, DT, in, L, ita ut, AL, sit equalis ipsi, AB,
 & compleatur parallelogrammum, ALNB, in quo agatur dia-
 meter, AN. Dico omnia quadrata, TC, dupla esse omniū qua-
 dratorum parabola, OAC, regula, NC. Esto enim, QS, producta
 in, M, tanquam una ex æquidistantibus regule, NC, ad libitum
 assum-

strata solum in omnibus quadratis earundem figurarum, illicò in iuxta dictam Prop. 33. euidenter perspicimus infinitum lucrum ex eisdem fecisse, nempe in infinitis solidis similaribus à dicto parallelogrammo, & parabola genitis: quæ non inutile erit paulisper contemplari. Considerabimus autem primo duo solida, quæ nobis sunt magis familiaria, nempe quorum omnia plana sunt circuli, seu solida rotunda. Si ergo figura à basi, OC , descripta fuerit circulus, eiusq; diameter, OC , quem rectè secet planum, TC , innotescit ex, TC , fieri cylindricum, immo cylindrum, illumq; rectum si, AB sit perpendicularis circulo ipsius, OC , vel scalenum, si sit illi inclinata, & hoc per dicta in Cor. pr. Prop. 34: Similiter ex parabola fiet conoides parabolicum circa axem, AB , rectum, vel inclinatum circulo, OC , prout se habebit pro dicto cylindro, eius enim omnia plana sunt circuli per monita in Scholio Prop. 51. Libri Quarti Heo. Ind. & per dicta in Prop. 46. 47, Libri primi, quæ à Lectore supponi poterunt. Hinc ergo fit manifestum cylindrum ex, TC , genitum, conoidis parabolici geniti ex parabola, OAC , iuxta regulam circulum, OC , duplum esse, siue, AB , sit ipsi circulo, OC , perpendicularis siue non. Hucusque autem Veteres cum Archimede, & alij postea ad hæc usque tempora progressi sunt.

XXXVIII.

Vtrum per hanc priorem methodum Ind. poterit Studiosus tam angustos limites in infinitum extendere, hoc est inuentam proportionem ad infinita solida transferendo. Namque si circulus, OC , mutetur in quadratum ab eodem, OC , tanquam à latere descriptum, cui planum, TC , supponatur erectum, vel quomodocunque inclinatum: nihilominus duo solida ad inuicem similaria descripta à TC , & parabola, OAC , iuxta regulam quadratum ipsius, OC , habebunt eandem rationem duplam Horum primum erit prisma, seu paralleleppipedum rectum, aut scalenum ex Coroll. primo Prop. 34. secundum verò erit solidum basim habens quadratam deficiens versus, A , iuxta parabola, OAC , deficientiam, terminansq; ad idem, A , in quo parallelis basi planis utcumque secto, fiant semper quadrata descripta à lineis in parabola, OAC , ordinatim ductis. Videtur autem hoc solidum sui

sui concavo assimilari semicirculo, vel seminaui, aut potius Textorum semiradio. Sic mutato quadrato ipsius, OC , in triangulum, pentagonum, hexagonum &c. seu in quamcunque figuram rectilineam, aut curvilineam, seu mixtilineam, ab eadem, OC , quomodocunque descriptam, per dictam Prop. 33. admonemur solidum simile ex, TC , genitum (quod erit in rectilincis figuris semper prisma, vel in alijs saltem cylindricus per Prop. 34.) duplum esse solidi predicto similis geniti ex parabola, OAC , iuxta regulam descriptam ab, OC , basim, quod idcirco infinitis modis variari potest.

XXXIX.

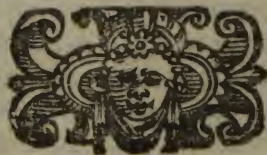
Perpendat nunc Studiosus quam fertilis hinc evadat Geometria solidorum, & quam late pateat hic demonstrandi modus, quem ingiter prosequimur in omnibus figuris planis in dicta Geom. Ind. tamquam solidorum genitricibus consideratis. Hoc est Libro 3. expendimus solida quæ oriuntur à circulo, & ellipsi, eiusque portionibus. Libro 4. quæ gignuntur à Parabola, ut & ab eius portionibus: ac Lib. 5. genita ab Hyperbola, oppositis sectionibus, necnon similiter ab earundem portionibus, considerantur: & hoc sine diametri figurarum genitricium sint perpendiculares basibus factorum solidorum sine eisdem inclinata. Denique Libro 6. agitur de spatijs helicis, aliaque ratione ab Archimedeo Libro de Spiralibus, eorum mensura inuestigatur, prius nempe per Indivisibilia, quæ sunt circulorum omnes peripheriæ, si eisdem concentricæ, deinde per circumscriptionem, & inscriptionem figurarum, etiam more Veterum: superaddunturque nonnulla Theoremata, ac Problemata ex universa dictæ Geometria doctrina emanantia: Est autem in Problematibus hoc summè notandum, nempe. Dato quocunque ex solidis in dicta Geometria consideratis, inuenire ex quacunque specie solidorum nedum dato æquale, sed etiam quod ad illud datam rationem habeat. Excipe tamen, quæ supponunt circuli aut Hyperbolæ quadraturam, in quibus proximè tantum dicta ratio inuenitur. Ita ut ex his tandem Studiosus animadvertere possit quantum ultra Veterum limites per hanc priorem Indivisibilium methodum prodierit Geometria.

Denique

XXXX.

Denique ex modo, quo num. 35. & 36. ostendimus ibi proposita, innotescere potest, qualiter sine abscissis, residuis &c. operandum sit. Vbi enim dicendum fuisset in eorum Schemate iuxta stylum consuetum in dicta Geometria, omnes lineas, BD, ad omnes lineas trilinei, ADC, regula communi, EC, esse ut quadrata maximarum ipsius, AD, ad eiusdem quadrata omnium abscissarum; hic dictum est esse ut quadrata omnium linearum, FD, ad quadrata omnium linearum trianguli, ADE, et enim ista eisdem maximis, & abscissis adequatur. Sic pro omnibus lineis parallelogrammi, LB, & trianguli, ANB, regula communi, NC, adhibenda fuissent maxima abscissarum, AB, eiusque omnes abscissae. Liberum tamen cuique erit si voluerit, etiam ipsas abscissas, residuas &c. iuxta priorem stylum retinere, nullus enim hinc error, nisi illa perperam accipiantur, emerget.

Hac ad intelligentiam prioris methodi Indivisibilium sufficere puto, in sequenti Exercitatione posterior quoque explicabitur, necnon & confirmabitur, quapropter nonnulla è Libro Septimo dicta Geometriae Ind. desumpta, eidem inserenda erunt.



EXER.



EXERCITATIO

SECUNDA.

In qua agitur de Posteriori Methodo
Indiuisibilibium.



HACTENVS innotescere potuit Studio
dioso quæ sit ratio procedendi iuxta prio-
rem methodum Indiuisibilibium: nunc
verò posteriorem aggredimur in hac
Exerc. 2. in qua, ni fallor, habebit, quo
sibi amplius satisfaciat, si ab infinitate
Indiuisibiliū abhorreat, collectiue sumptorū. Is .n. in Exerc.
ant. nu. 6. addiscere potuit hic tantū distributiue eadem In-
diuisibilia comparari. Porro de hac posteriori methodo tra-
ctat ex professo Geometriæ Ind. Liber 7. quapropter ex eo
præcipua illius desumentur fundamenta, veluti in antece-
denti Exerc. nobis opportuna suffecit eiusdem Liber 2. De-
nuò igitur hic exponetur dicti Libri 7. Prop. prima cum sub-
sequentibus Lemmatibus, necnon Propos. 2. & 3. reliquo
eiusdem doctrinæ postmodum summarie tantum explicato.
Denique his adiungentur ea, quæ præcipue ad confirmatio-
nem dictarum Proposit. pr. tertie, ac totius Libri 7. à me
nuper ostensa sunt. Et ut hac quoque clariora fiant, ubi
congruet interijcientur pariter Nota, ut in Exerc. ant. con-
suetum fuit.

Sub.

I.

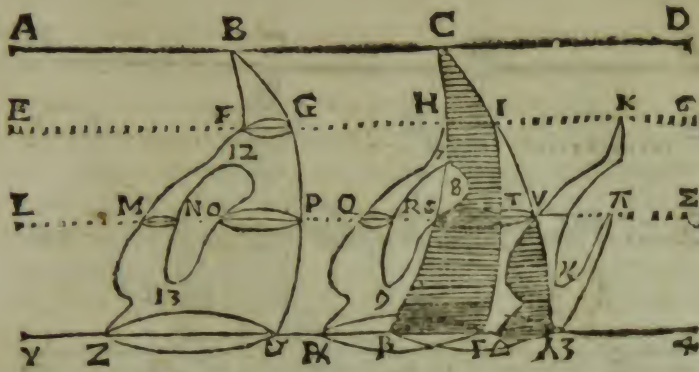
*Subsequens Propositio est præcipuum huius posterioris metho-
di Ind. fundamentum: quapropter haud Lectori mirandum erit
si per tot, quot adijciuntur Lemmata, videbit eandem confirma-
ri. Non ergo perfunctoriè, sed attentè erit examinanda. Est
autem huiusmodi.*

P R O P O S I T I O I.

Libri Septimi Geometriæ Indivisibilium.

Figuræ planæ quæcunque in eisdem parallelis constitu-
tæ, in quibus, ductis quibuscunque eisdem parallelis
æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscunque rectæ li-
neæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt.
Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis cõ-
stitutæ, in quibus, ductis quibuscunque planis eisdem pla-
nis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunque sic
ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pari-
ter inter se æquales erunt. Dicantur autem figuræ æquali-
ter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se compara-
tæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in qui-
bus esse supponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

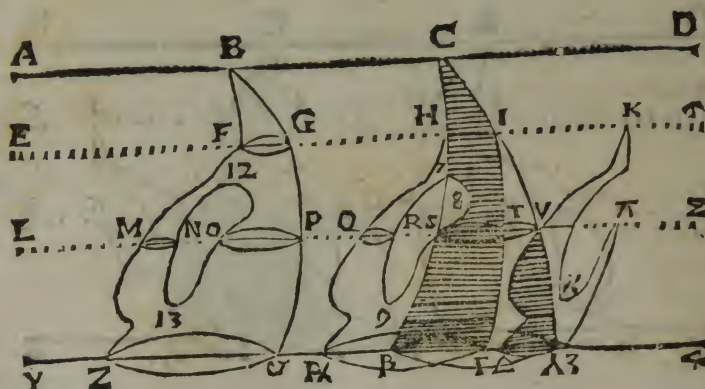
Sint quæcunque planæ figuræ, $BZ\&$, $C\beta\Lambda$, in eisdem pa-
rallelis, $AD, Y4$, constitutæ, ductis autem ipsis, $AD, Y4$, qui-
buscunque parallelis, $E6, L\Xi$, portiones ex. g. ipsius, $E6$,
in figuris conceptæ, nempe, FG, HI , inter se sint æquales,
necnon ipsius, $L\Xi$, portiones, MN, OP , simul sumptæ (sic
enim figura, $BZ\&$, ex. g. intus caua secundum ambitum,
 $\frac{12}{13}, N, \frac{13}{13}, O$) ipsi, SV , sint pariter æquales, & hoc contingat
in quibuscunque alijs ipsi, AD , æquidistantibus. Dico figu-
ras, $BZ\&$, $C\beta\Lambda$, inter se æquales esse. Assumpta ergo alte-
rutra figurarum, $BZ\&$, $C\beta\Lambda$, ut ipsa, $BZ\&$, cum parallelarum,
 $AD, Y4$, portionibus ipsi conterminantibus, nempe cum,
 $AB, Y\&$, superponatur reliquæ figuræ, $C\beta\Lambda$, ita tamen ut ip-
sæ, $AB, Y\&$, cadant super, $BD, \& 4$: vel ergo tota, $BZ\&$, con-
gruit



gruit toti, $C\beta A$, & ita cum sibi congruant æquales erunt, vel
 non; aliqua tamen pars esto quod congruerit alicui parti,
 vt, $Clr\beta$, 87, pars figuræ, $BZ\&$, ipsi, $Clr\beta$, 87, parti figuræ,
 $C\beta A$. Manifestum est autem superpositione figurarum tali-
 ter effecta, vt portiones parallelarum, $AD, Y\&$, ipsis figuris
 conterminantes sint inuicem superpositæ, quod quæcumq;
 rectæ lineæ in figuris conceptæ erant sibi in directum, manet
 etiam sibi in directum. Vt ex. g. cum, MN, OP , essent in di-
 rectum ipsi, SV , dicta superpositione facta, manent etiam sibi
 in directum, nempe, QR, ST , in directum ipsi, SV , est enim
 distantia ipsarum, MN, OP , ab, AD , æqualis distantia, SV ,
 ab eadem, AD ; vnde quotiescunque, AB , extendatur super,
 BD , vbicunque hoc fiat, semper, MN, OP , manebunt in di-
 rectum ipsi, SV , quod & de cæteris quibuscunque ipsi, AD ,
 parallelis in vtraque figura liquidò apparet. Quod verò
 pars vnius figuræ, vt, $BZ\&$, congruat necessariò parti figu-
 ræ, $C\beta A$, & non toti, dum fit superpositio tali lege, quali di-
 cti est, sic demonstrabitur. Cum enim ductis quibuscunque
 ipsi, AD , parallelis, conceptæ in figuris ipsarum portiones,
 quæ erant sibi in directum, adhuc post superpositionem ma-
 neant sibi in directum, illæ verò ante superpositionem essent
 ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem portiones
 parallelarum ipsi, AD , in figuris superpositis cõceptæ, erunt
 pariter æquales, vt ex. g. QR, ST , simul sumptæ, æquabun-

M

tur



tur ipsi, SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &, QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ: TV, verò in residuo figuræ, CβA, cui fit superpositio. Eodem modo ostendemus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, quod sit, Hβ. 597, respondere in directum æqualem rectam lineam, quæ erit in residuo figuræ, CβA, cui fit superpositio. Ergo superpositione hac lege facta, cum superest aliquid de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit superpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiâ superesse, super quod nihil sit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelæ, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, CβA, superpositæ, respondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ, CβA, alia recta linea, manifestum est has residuas figuras, siue residuarum aggregata, esse in eisdem parallelis. Cum ergo residua figura, Hβ 597, sit in parallelis, E 6, Y 4, etiam residua figura, vel residuarum aggregatū, ipsius, CβA, (quod sit ipsa frustra, IΓA, 785,) erit in eisdem parallelis; E 6, Y 4: si enim non pertingeret hinc inde ad parallelas, E 6, Y 4, vt ex. g. si pertingeret quidem vsque ad, E 6, non tamen vsque ad, Y 4, sed tātum vsque ad, LΣ, conceptis rectis lineis in frusto,

Q 1x β

QR, 59R, ipsi, AD, parallelis non responderent in residuo figuræ, C β λ, seu ex residuis aggregato, aliæ rectæ lineæ, ut superius necesse esse probatum est. Sunt ergo hæc residua, vel residuorum aggregata in eisdem parallelis, & in illis conceptæ parallelarū ipsi, AD, Y γ , portiones inter se sunt æquales, ut supra ostendimus; ergo residua, seu residuorum aggregata, sunt eius conditionis, cuius ipsas, BZ&, C β λ, figuras iam esse suppositum fuit, id est æqualiter analogæ. Fiat ergo denuo residuorum superpositio, ita tamen ut parallele, GH, & β, super parallelas, Hk, β γ , sint constitutæ, & congruat pars, VΔλ, frusti, HR, 597, parti, VΔλ, frusti, IΓλ, ostendimus ergo ut supra, dum unius habetur residuum, haberi etiam alterius; & hæc residua, siue residuorum aggregata, esse in eisdem parallelis. St autem ad figuram, BZ&, spectans residuum, kVλ, πX; ad figuram autem, C β λ, sint pertinentia residua, IΓΔV, 785, quorum aggregatum est in eisdem parallelis cum residuo, kVλ, πX, nempe in parallelis, E6, Y γ . Si ergo horum residuorum fiat denuo superpositio, ita tamen ut parallele, in quibus existunt, sint semper ad inuicem superpositæ, & hoc semper fieri intelligatur, donec tota figura, BZ&, fuerit superposita, dico totam debere ipsi, C β λ, congruere: alioquin si esset aliquod residuum ut figuræ, C β λ, cui nihil esset superpositum, esset etiam aliquod residuum figuræ, BZ&, quod non esset superpositum, ut supra ostendimus necesse esse: ponitur autem tota, BZ&, esse superpositam ipsi, C β λ, ergo ita sunt ad inuicem superpositæ, ut neutrius residua habeantur, ergo ita sunt superpositæ, ut sibi congruant. Ergo figuræ, BZ&, C β λ, inter se sunt æquales.

Sint nunc in eodem schemate duæ figuræ solidæ quæcunque, BZ&, C β λ, in eisdem planis parallelis, AD, Y γ , constitutæ, ductis autem quibuscunque planis, E6, I γ , præfatis æquidistantibus, sint conceptæ in solidis figuræ, quæ iacent in eodem plano, semper inter se æquales, ut, FG, æqualis, HI, & MN, OP, simul sumptæ (sit enim solida figura ex.g. BZ&, intus utcunque caua secundum superficiem, I γ , N, I γ , O,) æquales ipsi, SV. Dico easdem solidas figuras æquales esse. Si enim solidum, BZ&, cum portionibus, AB, Y&, planorum, AD, Y γ , ipsi continuantibus, solido, C β λ, ita su-

perposuerimus, ut planum, AB, sit in plano, AD, & Y&, in plano, Y4, ostendemus (ut fecimus superius circa parallelorum ipsi, AD, conceptas in figuris planis, BZ&, Cβλ, portiones) figuras in solidis, BZ&, Cβλ, conceptas, quæ erant in eodem plano, etiam post superpositionem manere in eodem plano, & ideo adhuc æquales esse figuras in superpositis solidis conceptas, & ipsis, AD, Y4, parallelas. Nisi ergo totum solidum toti congruat in prima superpositione, relinqueretur residua solida, vel ex residuis composita in utroque solido, quæ non erunt ad inuicem superposita, cum enim ex.g. figuræ, QR, ST, sequentur figuræ, SV, dempta communi figura, ST, reliqua, QR, equabitur reliquæ, TV, hocque continget in quouis alio plano ipsi, AD, parallelo occurrente solidis, Cβλ, Cβλ. Ergo semper habentes residuum vnus solidi, habebimus etiam residuum alterius, & patebit; iuxta methodum adhibitam in priori parte huius Propositionis circa figuras planas, residua solida, vel residuorum aggregata semper esse in eisdem parallelis planis, ut residua, Hβ597, ITΔ, 785, esse in planis parallelis, E6, Y4, ac æqualiter analogæ. Si ergo hæc residua adhuc superponantur, ita ut planum, EH, locetur in plano, H6, & Yβ, in, β4, & hoc semper fieri intelligatur, donec quod superponitur, ut, BZ&, totum fuerit assumptum, tandem ipsum totum, BZ&, congruet toti, CΔA, nisi enim toto solido, BZ&, ipsi, Cβλ, superposito, ipsa sibi congruerent, esset aliquod residuum vnus, ut solidi, Cβλ, ergo etiam esset aliquod residuum solidi, Cβλ, seu, BZ&, illudque non esset superpositum, quod est absurdum, ponitur enim iam totum solidum, BZ&, esse ipsi, Cβλ, superpositum. Non ergo erit aliquod residuum in ipsis solidis, ergo sibi congruent, ergo dictæ figuræ solidæ, BZ&, Cβλ, inter se æquales erunt, quæ fuerunt demonstranda. Prefatæ autem figuræ, ut supra innuimus, dicantur æqualiter analogæ, & si opus erit, iuxta regulas lineas parallelas, seu plana parallela, AD, Y4.

SCHO-

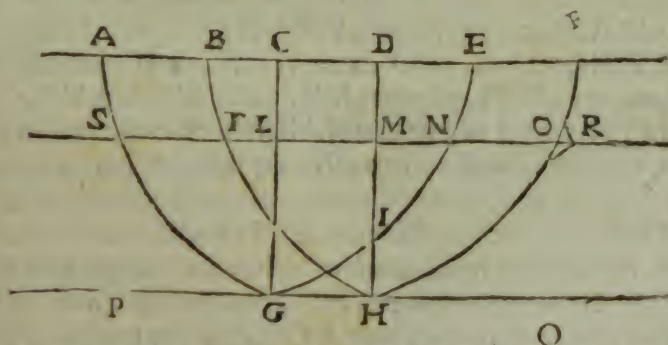
S C H O L I U M.

Cum antecedens Propos. maximi sit momenti, ut in sequentibus apparebit, aliusque modus priorem partem demonstrandi, stylo Archimedeo haud absimilis, menti succurrerit, id ipsum ne pereat in Lemmata distributum hic subiungere placuit.

L E M M A P R I M U M.

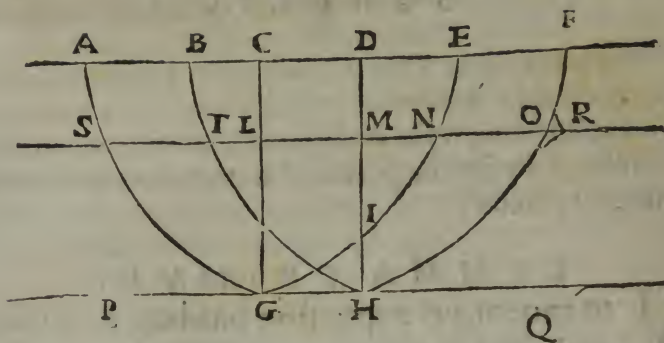
Si in eadem, vel æqualibus basibus, & in eisdem parallelis figuræ planæ æqualiter analogæ iuxta easdem bases fuerint constitutæ, ita tamen ut quæcunque æquidistantium basibus linearum portiones in eisdem conceptæ figuris integræ sint, ac eisdem basi, vel basibus æquales, ipsæ pariter figuræ inter se æquales erunt.

Sint eadem basi, GH, seu in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis, AF, PQ, figuræ planæ, AGHB, EGHF, æqualiter analogæ iuxta eandem basem, GH, seu bases æquales iā dictas: extensa verò quacunq; ipsis, PQ, AF, pa-



rallela, SR, eiusdē portiones capte in præfatis figuris, ut, ST, NO, integræ sint, ac æquales basi, GH, seu dictis æqualibus basibus. Lico etiam præfatas figuras inter se æquales esse.

In ca-



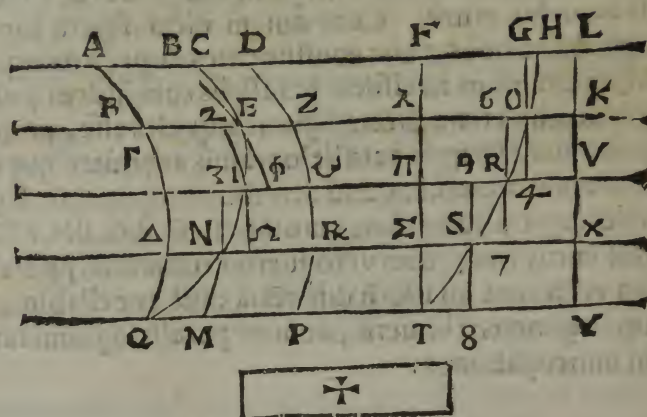
In eadem enim basi, GH , seu in altera dictarum æqualium basium, sit constitutum, & in eisdē parallelis, AF , PQ quodcunque parallelogrammum, CH , in quo portio concepta ipsius, SH , sit, LM , quæ erit æqualis ipsi, GH , & consequenter ipsi, NO , unde addita communi, MN , fiet, LN , æqualis, MO . Eodem modo autem ostendemus, CE , esse æqualem, DF , & reliquas huiusmodi similiter adæquari. Nunc assumpto trilineo, ECG , & posito, C , in, D , & CG , in, DH , cadet, G , in, H , quia, CG , DH , sunt æquales, cadente verò trilineo, ECG , super, FDH , extendetur, CE , super, DF , cum angulus, FDH , exterior sit æqualis interiori, ECG , parallelarum, DH , CG , & punctum, E , erit in, F , ambitusque, ENG , cadet super ambitum, FOH , si enim non, esto quod aliquod punctum ambitus, ENG : non cadat super, FOH , cadet ergo vel extra trilineū, FDH , vel intra, cadat extra, ut in, R , ita ut ambitus, ENG , cadat ut, FRH , erit ergo, MR , maior, MO , sed, MR , est æqualis, LN , ergo, LN , erit maior, MO , sed est etiā æqualis eidē MO , ex demonstratis, ergo esset æqualis, & maior eadem, MO , quod est absurdum. Non ergo aliquod punctum ambitus, ENG , cadit extra trilineum, FDH . Eodem modo probabitur, nec cadere intra eundem trilineum, ergo ambitus, ENG , cadet super ambitum, FRH , congruens totus toti, & consequenter etiam trilineus, ECG , cōgruet trilineo, FDH , & illi æqualis erit, unde ablato communi trilineo, DIE , & addito communi trilineo, GIH , fiet, $EGHE$, figura æqualis parallelogrammo, CH . Eodem modo ostendemus figuram, $AGHB$,

AGHB, æquari eidem, CH, ergo figuræ, AGHB, FGHF, inter se æquales erunt. Cum autem dictæ figuræ fuerint in æqualibus basibus, tunc constituentes super vnamquamq; parallelogramum in eisdem parallelis cum iisdem positum, concludemus etiam dictas figuras æquales esse, probantes eodē modo descriptis parallelogramis adæquari, quæ quidē inter se erunt æqualia, quod demonstrare opus erat. Hæc autē vocetur parallelograma curvilinea, cū, AG, BH, EG, FH, fuerint curvæ lineæ, cum verò fuerint rectæ lineæ, parallelograma rectilinea ad illorū differētiā eadē appellabimus, sed utraq; in genere, si libuerit, nomine parallelogrami tantum etiam nuncupabimus.

LEMMA II.

SI in æqualibus rectis lineis, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, fuerint quæcunque planæ figuræ, æqualiter analogæ iuxta dictas bases; portiones autem æquidistantium quotcunque ipsis basibus linearum in figuris conceptæ integræ fuerint, ac in altera dictarum figurarum sic se habentes, ut quælibet propinquior basi sit maior remotiori: dictæ figuræ inter se æquales erunt.

Sint in æqualibus rectis lineis, QP, TY, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, AL, QY, quæcunque planæ figuræ, CQPD, HTYL, æqualiter analogæ iuxta dictas bases, QP, TY, ductis autem quotcunque basibus parallelis, ut, AX, rV, æk, earum in figuris conceptæ portiones integræ sint, ac in altera figurarum propinquior basi maior remotiori. Ut si conceptæ in, CQPD, sint, NB, l&, EZ, & in, HTYL, p&, SX, RV, Ok, istæ quidem integræ sint, necnon ex. g. in figura, CQPD, NB, maior, l& l&, maior, EZ, & sic in ceteris (erit enim etiam, SX, maior, RV, & RV, maior, Ok, & sic in ceteris



Ellicit. ex
unt. 1. em.

cæteris, cum sint æqualiter analogæ iuxta bases, QP, TY,) dico figuras, CQPD, HTYL, inter se æquales esse. Si enim non sint æquales, altera earum maior erit, sit maior, HTYL, ipsa, CQPD, spatio, \dagger , tunc minoris figuræ basis, QP, moueatur versus, AD, semper ipsi, AD, æquidistanter, ac manente iugiter puncto, P, in linea, PD, donec congruat ipsi, AD, igitur punctum, Q, describet lineam, Qr A, & QP, describet parallelogrammum, AP, rectilineum, seu curvilineum, prout, AQ, DP, fuerint rectæ, vel curvæ: erit autem, Qr A, tota extra figuram, CQPD, cum parallelæ, QP, in figura, CQPD, ipsi, QP, propinquiores remotioribus sint semper maiores (quo pacto data basi, & curua linea, tota in eodem plano cum ipsa basi, ac vni extremorum eiusdem cōterminante, parallelogrammum curvilineum, ab eisdem apprehensum, describere docemur) similiter compleatur parallelogrammum, FY, ducaturque, rV, parallela, QY, bifariam diuidēs altitudinē figurarū, CQPD, HTYL, respectu, QY, sumptā, secansq; AQ, in, r, CQ, in, l, DP, in, &, FT, in, n, HT, in, R, &, LY, in V. Per, rV, igitur diuidetur parallelogrammū, AP, in æqualia parallelogramma, A&, & Q: Rursus autem per alias ipsi, QY, parallelas diuidantur dictæ altitudines portiones bifariam, & sic semper fiat (sectis insimul constitutis parallelogrammis, quæ idcirco etiam bifariam diui-

diuidentur) donec ad parallelogrammum, ut ad, RQ , deueniatur minus spatio, \star , sit igitur sectum, AP , in parallelogramma æquæ alta, AZ , $\beta\epsilon$, rR , ΔP , per æquidistantes lineas, αK , rV , ΔX , quæ secant lineas, AQ in punctis, β , r , Δ , CQ , in, E , I , N , DP , in, Z , ϵ , R , FT , in, $\Delta\pi\epsilon$, HT , in, O , R , S , & tandem, LY , in, k , V , X , compleanturq; parallelogramma, BZ , 2ϵ , $3R$, ΔP , iuxta descriptionem superius traditam, erunt enim lineæ, BE , $2r$, $3N$, ΔQ , extra figuram, $CQPD$, quod patebit, veluti, AQ , extra, $CQPD$, similiter cadere ostensa est, & consequenter figura ex parallelogrammis, BZ , 2ϵ , $3R$, ΔP , composita comprehendet spatium, $CQPD$. Sint autem etiam completa parallelogramma, $E\epsilon$, $I\beta$, NP , quorum descriptæ lineæ, $E\epsilon$, $I\alpha$, NM , intra figuram, $CQPD$, quidem cadere ostendemus ex eadem ratione, quod dictæ parallelæ ipsi, PQ , propinquiore remotioribus sint semper maiores, & subinde patebit figuram ex parallelogrammis, $E\epsilon$, $I\beta$, NP , compositam comprehendere à figura, $CQPD$. Tandem compleantur parallelogramma quoque, Gk , $6V$, $9X$, ϵY , ex quibus compositam figuram spatium, $HTYL$, eadem methodo comprehendere demonstrabimus. Cum ergo figura comprehendens spatium, $CQPD$, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, BZ , 2ϵ , 3α , ΔM , hoc est parallelogrammo, ΔP , quod est minus spatio, \star , dicta comprehendens figura superabit, $CQPD$, multò minori spatio, quam sit, \star , sed, $HTYL$, superat, $CQPD$, ex hypotesi spatio, \star , ergo figura comprehendens, $CQPD$, minor est, $HTYL$, & multò minor figura ipsum, $HTYL$, comprehendente, quæ iam, descripta fuit. Hoc autem est absurdum, cum enim parallelogrammum, BZ , æquetur ipsi, Gk , 2ϵ , ipsi, $6V$, $3R$, ipsi, $9X$, & ΔP , ipsi, ϵY , tota tota adæquatur contra prædemonstrata, non ergo figura, $HTYL$, maior est, CQP .

Sit nunc eadem minor, si possibile est, eodem spatio, \star , igitur descriptis circa, $CQPD$, eisdem figuris, ita ut comprehendens, $CQPD$, superet ab eo comprehensam minori spatio, quam sit, \star , compleantur parallelogramma, OV , RX , SY , ex quibus compositam figuram, ut supra à spatio, $HTYL$, comprehendendi ostendemus. Igitur si comprehendens, $CQPD$, superat figuram comprehensam minori spatio,

1. Decimi
Elem.

Ex antec.
Lem.

N

tio,

Ex antec.
Lem.

tio, quam sit, ✱, ipsum spatium, CQPD, superabit ab eo comprehensam figuram multò minori spatio, quam sit, ✱, idem autem superat, HTYL, spatio, ✱, ergo figura comprehensa à spatio, CQPD, maior erit spatio, HTYL, & multò maior erit figura iam descripta, ab eodem spatio, HTYL, comprehensa, quod est absurdum. Cum enim parallelogramum, E&, æquetur, OV, I&, ipsi, RX, necnon, NP, ipsi, SY, tota toti adequatur contra prædemonstrata, nec ergo figura, HTYL, minor esse potest figura, CQPD, sed neque eadem maior, ut ostensum est, ergo eidem æqualis erit, quod demonstrare oportebat. Vnamquamque autem dictarum figurarum, CQPD, HTYL, præfatas condiciones habentium, figuram in alteram partem deficientem appellabimus, regula basi, seu quacunque illi æquidistante.

LEMMA III.

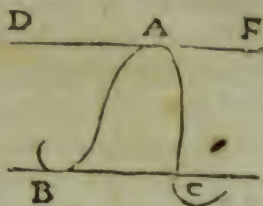
SI curua lineâ quæcunque tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis, aut rectis lineis, vel in recta, & puncto, poterimus aliam rectam lineam præfatæ æquidistantem ducere, quæ tangat portionem curvæ lineæ inter duos prædictos occurfus continuatam.

DEFINITIO. ✱

TAngere autem dico rectam lineam aliam quamcunque curvam totam in eodem plano cum ea existentem, cum ipsa recta lineâ siue in puncto, siue in recta lineâ, curvæ occurrente, eadem curva vel tota est ad eandem partem, vel illius nihil est ad alteram partem illi occurrētis rectæ lineæ.

Sit curva lineâ, BAC, tota in eodem existens plano, cui recta, BC, occurrat in duobus punctis, seu rectis lineis, vel in recta, & puncto, B, C. Dico nos aliam rectam ipsi, BC, æquidistan-

distantem ducere posse, quæ tan-
gat portionem curvæ lineæ in-
ter duos occurfus, B, C, cōtinua-
tam. Quoniam ergo recta est,
BC, & curva, BAC, ideò inter se
spatium comprehendent, figu-
ramque, vt, BAC, constituent, er-
go possibile erit figuræ, BAC, re-
spectu rectæ, B C, verticem inuenire, sit is punctum, A, per
quod ducatur, DF, parallela, BC, igitur, BF, tanget figuram,
BAC, ergo totus ambitus, BAC, est ad eandem partem rectæ,
DF, vel nihil est saltē ad alterā partem, si enim aliqua illius
portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, se-
caret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tan-
git curuam, BAC, igitur possibile est, &c.



Alb. 1.

C O R O L L A R I U M.

Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea
datam curuam totam in eodem plano cum ea exi-
stentem contingens, quæ quidem datæ rectæ lineæ sit æqui-
distant.

L E M M A IV.

SI proposita quæcumque figura plana vni regu-
læ parallelis quorcumque lineis ita secari pos-
sit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper
existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut
curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficiē-
tibus, regula eadem, componetur.

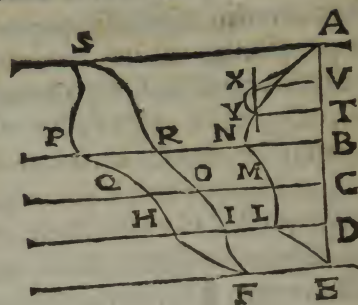
Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta
quotcumque vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa
rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam vel ex parallelogrā-
mis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram par-

N 2

tem

1. lib. 2.

tem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint. n. ductæ, SA, FE, oppositæ tangentibus figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumque recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi congruat, interim verò



Ex antec.
Lem.

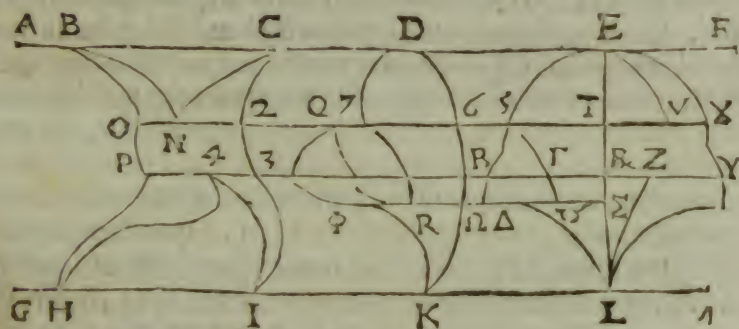
punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE; in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter, donec totam pertransierit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis in ambitu, ANE, vel enim tanget in linea, aut lineis, vel in punctis, & lineis, vel tantum in punctis, esto quod fiat contactus in recta, LM, & in puncto, N, transeantq; per puncta, L, M, N, rectæ lineæ regulæ, FE, parallelæ, HD, QC, PB, secantes ambitum figuræ, SPFR, in punctis, P, Q, H, I, O, R, & rectam, AE, in punctis, B, C, D, nullusq; alius factus fuerit contactus in ambitu, ANMLE. Quoniam ergo à puncto, N, ad, A, nullus datur contactus, erit, ANB, figura in alteram partem, nempe versus, A, deficientis, hoc est quælibet in figura, ANB, parallela, NB, erit maior remotiori, si enim non, esto quod aliqua, vt, YT, non sit maior remotiori, XV, ad ambitum terminata, vel ergo erit illi æqualis, vel eadem maior, sit illi æqualis, & iungatur, YX, hæc ergo erit parallela, AE, & occurrit ambitui in duobus punctis, Y, X, ergo possibile erit ducere rectam lineam ipsi, YX, seu, AE, parallelam, tangentem portionem curvæ lineæ, hoc est ambitus, AN, inter duos occurfus, Y, X, cōtinuatam, quod est contra suppositum. Quod si dicatur, YT, esse minorem, XV, multò magis conuincetur præfatum absurdum, ergo, YT, erit maior, XV, & quælibet, NB, propinquior remotiore maior, ergo figura, ANB, erit in alteram partem deficientis:

ciens. Eodem modo autem ostēdemus etiam, NMCB, LED, esse figuras in alteram partem deficientes, L M C D, autem manifestum est esse parallelogrammum rectilineum, ergo in figura, SPFR, ipsa, SPR, quæ est æqualiter analogæ ipsi, ANB, erit figura in alteram partem deficiens, sic etiā, PQOR, HFI, QHIO, verò erit parallelogrammum rectilineum, seu curvilineum, prout, QH, OI, rectæ, vel curvæ, esse possunt ergo figura, SPFR, componitur ex figuris in alteram partem deficientibus, ac ex parallelogrammo rectilineo, seu curvilineo, regula, FE, quod ostendere opus erat.

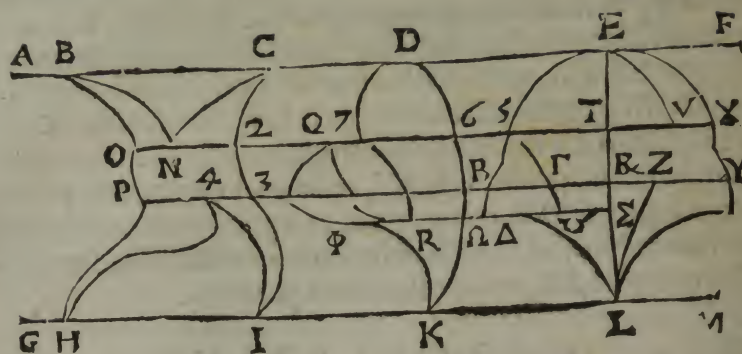
COROLLARIUM.

Hinc habetur figuram, SPFR, ipsi, ANE, æqualem esse, & vniuersaliter figuras planas æqualiter analogas, in quibus earum regulæ æquidistantium quotcunq; linearū conceptæ portiones integræ sunt, inter se æquales esse.

Propositio antecedens, aliter, quoad priorem partem, ostensa.



Sint quæcumq; figuræ planæ æqualiter analogæ iuxta regulam, GM, ipsæ, BHIC, I Qk, quarum oppositæ tangent, AF, GM, regula pariter, GM, parallelarum autem ipsi, GM, quotcumque portiones in vnaquaque dictarum figurarum integræ sint, siue non. Dico easdem æquales esse. Incidat ergo parallelis, AF, GM, quomodocumque recta linea,



linea, EL, in eisdem terminata, moueatur autem, GM, versus, AF, semper eidem, AF, æquidistanter donec illi congruerit, interim autem vnum punctum moueatur in eadem, GM, sic mota, describens ambitum, LβE, figuræ æqualiter analogæ ipsi, DQk, & aliud punctum in eadem motum ad aliam partem, EL, describat ambitum figuræ, EYL, æqualiter analogæ ipsi, BHIC, in quibus quidem sic descriptis figuris conceptæ ipsi, GM, parallelarum portiones quęcumque integrę sint. Erit ergo figura, EβL, æqualis figuræ, EYL, esto autem quod in figura, DQk, conceptæ portiones parallelarum ipsi, GM, non omnes sint integrę, sed aliquę fractę per interiorē ambitum, nempe, quę intercipiuntur parallelis, Q6, φα, in quibus habeantur duo figurę frusta, 67 Rα, QφR, in quorum tamen vnoquoque dictę parallelarum portiones integrę habeantur, sit autem in motu, GM, à quodam puncto descripta linea, & r5, nempe ambitus figurę, 5 & ζT, eodem modo, quo descripti fuerunt ambitus, EβL, EYL, figurę inquam, 5 & ζT, æqualiter analogę frusto, 7Rα6; erit ergo reliqua figura, 5Δ&, æqualiter analoga frusto, QφR, cum tota, TSΔζ, sit toti composito ex frustis, QφR, 7Rα6, æqualiter analoga, & sunt portiones ipsi, GM, parallelarum in vnaquaque figura, 5Δ&, 5 & ζT, integrę omnes, sicut cōtingere supposuimus in frustis, QφR, 7Rα6, ergo cum, QφR, 5Δ&, sint figurę etiam æqualiter analogę, inter se æquales erunt: Eadem ratione patebit frustū, 7Rα6, æquari figurę, S& ζT, gero

Ex antec.
Lem.

ergo frustra, $Q \cdot R$, $7R\alpha 6$, simul sumpta æquabuntur figuræ $T\beta\Delta\Sigma$, sed & figuram, $76D$, ipsi, EST , ædequari, necnon, $\Phi k\alpha$, ipsi, $\Delta L\Sigma$, pariter adæquari manifestum est, cum sint figuræ æqualiter analogæ, & portiones parallelarū ipsi, GM , in eisdem conceptarum integræ sint, ergo tota figura DQk , toti, $E\beta L$, æqualis erit. Consimili modo in figura, $BHIC$, ducentes rectas lineas ipsi, GM , parallelas, nempe O_2 , P_3 , quibus ipsa distinguatur in frustra, capientia dictas parallelarum portiones integras, scilicet in frustra, BON , CN_2 , PH_4 , $4I_3$, OP_3 , PH_4 , $4I_3$, easdem, O_2 , P_3 , producentes ut secant ambitum figuræ, EYL , velut in, T , X , R , Y , descriptisq; lineis, EV , ZL , ut fuit descripta, $5T\&$, ut constituatur figura, ETV , æqualiter analogæ frustra, CN_2 , (ex quo remanet, EVX , æqualiter analogæ ipsi, BON ,) & figura, $Z\beta L$, æqualiter analogæ ipsi, $4I_3$, (ex quo, ZLY , remanet etiam æqualiter analogæ ipsi, PH_4 ,) cum in his capta parallelarum dictæ portiones integræ sint, manifestum erit fig. ETV , æquari ipsi, CN_2 , EVX , ipsi, BON , $Z\beta L$, ipsi, $4I_3$, ZLY , ipsi, PH_4 , & tandem, $XT\&Y$, ipsi, OP_3 , ex quo concludemus figurā, $BHIC$, æquari ipsi, EYL , hoc est ipsi, $E\beta L$, sed eidem, $E\beta L$, ostensa est æqualis etiam, DQk , ergo figuræ, $BHIC$, DQk , inter se æquales erunt, igitur quæcumque planæ figuræ æqualiter analogæ inter se æquales erunt, quod ostendendum erat. Per hæc autem priori parti Propos. I. huius iam satisfactum esse manifestum est.

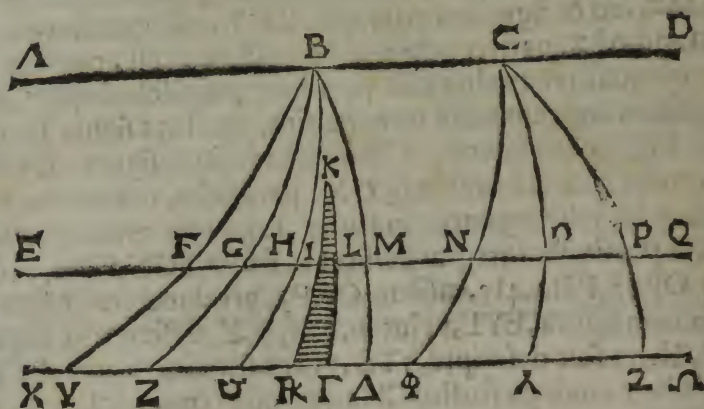
Ex antec.
Lem.

Ex antec.
Lem.

PROPOSITIO II.

Figuræ planæ quæcumque in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscumque eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumque rectæ lineæ portiones sunt inter se, ut cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptæ portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus) eandem inter se proportionem habebunt, quam dictæ portiones. Dicantur autem proportionaliter analogæ, ac etiam, si libuerit, iuxta regulas ipsas parallelas, in quibus existunt.

Sint



Sint duæ quælibet figuræ planæ, $B\&K r\Delta$, $C\phi\lambda$, inter parallelas, AD , $X\Omega$, constitutæ, ducta verò utcumque, EQ , prædictis parallela, eiusdem portiones in figura, $B\&\Delta$ conceptæ, quæ sint, HI , LM , simul sumptæ sint ad eam, seu ad eas, quæ concipiuntur in figura, $C\phi\lambda$, ut aliæ quælibet similiter sumptæ, nempe ex.g. vt, $\& R\Gamma\Delta$, ad, $\phi\lambda$. Dico figuram, $B\&K r\Delta$ ad figuram, $C\phi\lambda$, esse vt, HI , LM , ad, NO , vel vt, $\& R\Gamma\Delta$, ad $\phi\lambda$, vel vt quælibet aliæ similiter sumptæ. Accipiantur in, $\phi\lambda$, producta versus, λ , quotcumque eidem, $\phi\lambda$, æquales, vt, λ_2 , similiter quælibet linearum figuræ, $C\phi\lambda$, producat, & in ipsa intelligantur tot assumptæ æquales unicuique productarum, quot assumptæ sunt æquales ipsi, $\phi\lambda$, ex.g. vnica tantum, & per omnium terminos ex parte, 2 , trāseat linea, CP_2 , similiter in alia figura, $B\&\Delta$, sumantur quotcumque in ipsa, $\Delta\&$, producta versus, $\&$, æquales ipsis, $\& R\Gamma\Delta$, simul sumptis, & productis reliquis in fig. $B\&\Delta$, ipsi, $\&\Delta$, parallelis, aliæ tot æquales suis productis in directum capiantur, per quorum omnium terminos transeant lineæ, $B\Gamma Z$, $B\Phi Y$. Quoniam ergo figuræ, $B\Phi YZ\Gamma$, $B\Gamma Z\&H$, $B\&K r\Delta$, sunt in eisdem parallelis, AD , $X\Omega$; & ductis in eisdem quomodocumq; ipsis, AD , $X\Omega$, parallelis, interceptæ in figuris portiones sunt æquales, ideo ipsæ figuræ, $B\Phi YZ$, $BZ\&$, $B\&K r\Delta$, equaliter analogæ, & subinde æquales, erunt. Quo pacto etiam ostendemus figuras, $\phi C\lambda$, λC_2 , æquales esse: Quotuplex

Per ant.

plex ergo est aggregatum ex, $YR, \Gamma\Delta$, aggregati ex, & $R, \Gamma\Delta$, totuplex erit aggregatum ex figuris, $BYZ, BZ\&, B\&R, \Gamma\Delta$, seu figura, $BYR, \Gamma\Delta$, figure, $B\&R, \Gamma\Delta$: similiter quotuplex erit, $\phi 2$, ipsius, $\phi\lambda$, totuplex erit, aggregatum ex figuris, $C\phi\lambda$. $C\lambda 2$, hoc est figura, $C\phi 2$, ipsius figuræ, $C\phi\lambda$. Habemus ergo æquæ multiplices primæ, & tertiæ utcumque assumptas, similiter, & æquæ multiplices secundæ, & quartæ. Quoniam verò ex.g. $YR, \Gamma\Delta$; FI, LM , sunt æquæ multiplices ipsarum, & $R, \Gamma\Delta$; HI, LM ; similiter, 2ϕ ; PN , sunt æquæ multiplices ipsarum, $\phi\lambda$, NO , ipsæ verò, & $R, \Gamma\Delta$, HI, LM ; $\phi\lambda$, NO , sunt proportionales, ideo si aggregatum ex, $YR, \Gamma\Delta$, adæquabitur ipsi, $\phi 2$, etiam aggregatum ex, FI, LM , adæquabitur ipsi, NP , ut & reliquæ omnes similiter sumptæ, & consequenter etiam figura, $BYR, \Gamma\Delta$, adæquabitur figuræ, $C\phi$: si verò aggregatum ex, $YR, \Gamma\Delta$, superet, $\phi 2$, eodem modo patebit figuram, $BI, R, \Gamma\Delta$, superare figuram, $C\phi 2$; vel superari ab eadem, si, $YR, \Gamma\Delta$; superetur à, $\phi 2$. Ergo prima ad secundam erit, ut tertia ad quartam, scilicet figura, $B\&R, \Gamma\Delta$, ad figuram, $C\phi\lambda$, erit, ut aggregatum ex, & $R, \Gamma\Delta$; ad, $\phi\lambda$, vel ut aggregatum ex, HI, LM , ad, NO , seu ut quælibet aliæ duæ similiter sumptæ, quod erat ostendendum. Dicantur autem dictæ figuræ proportionaliter analogæ iuxta regulam, AD , vel, $X\alpha$.

Ex ant.

PROPOSITIO III.

Figuræ solidæ quæcumque in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus ductis quibuscumque planis dictis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscumque sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt inter se, ut eiusmodi cuiuslibet alterius plani in eisdem solidis conceptæ figuræ (homologis tamen in eodem solido semper existentibus) eandem inter se, quam dictæ iam conceptæ cuiuscumque plani figuræ, rationem habebunt. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas ipsa plana parallela, in quibus existunt.

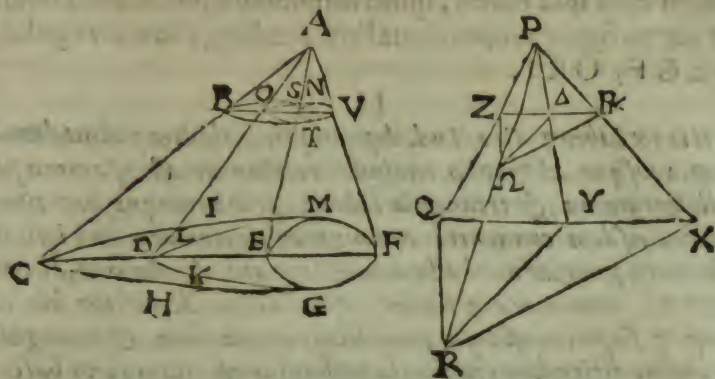
Sint duæ quælibet fig. solidæ, $AMEGF, PQRY$, in eisdem planis parallelis constitutæ; ductis verò quibuscumque pla-

O

nis

nis præfatis parallelis equidistantibus, eorum conceptæ in solidis figuræ sint vnus plani ex.g. figuræ, NSTV, Z $\Delta\Delta$, alterius autem, MEGF, QRY, vel contingat has esse solidorum bases, ac in altero planorum parallelorum, solida, AMEGF, PQRY, contingentium, sit verò figura, MEGF, ad figuram, QRY, vt figura, NSTV, ad figuram, Z $\Delta\Delta$, homologis nempe in eodem solido existentibus. Dico solidum, AMEGF, ad solidum, PQRY, esse vt, NSTV, figura, ad figuram, Z $\Delta\Delta$, vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur enim in figura, MEGF, vtcumque recta, EF, ad illius ambitu terminata, cui ducta parallela, SV, in figura, NSTV, producatur ambæ indefinitè versus puncta, S, E, in quibus sumantur vtcumq; æquæ earum multiplices, BS, CE. Similiter in eisdem figuris ductis alijs eisdem, SV, EF, æquidistantibus, sumantur earum pariter æquæ multiplices iuxta prædictarum multiplicatam, & omnium termini sint in lineis, NBT, MICHG, sicut ipsarum partium termini sint in lineis, NST, NOT, NBT, MEG, MDG, MCG: traductis verò alijs quocumq; planis præfatis parallelis, ac ipsa solida secantibus, hoc idem fiat circa ipsorum figuras in ipsis solidis conceptas, omniū verò ita resultantium figurarum termini sint in superficiebus, AMCG, AMDG, AMEG. Similiter in alio solido esto quod plana, quæ produxerunt in solido, AMEGF, figuras, MEGF, NSTV, genuerint figuras, QRY, Z $\Delta\Delta$, ad quas illæ habeant eandem rationem: ductis autē, vel assumptis rectis, QY, Z Δ , inter se parallelis, illæ producantur versus eandem partem, ΔY , in ijsq; productis accipiantur quæcumque æquæ multiplices, vel æquales, YX, ΔB , & idē fiat in ceteris ipsis parallelis in figuris, QRY, Z $\Delta\Delta$, sic productis, & omnium termini sint in lineis, YXR, ΔB , hę verò lineę, sicut & reliquarum figurarum eodem modo producibilium, sint in superficiebus, PYR, PYXR. Manifestum est autem figuras, MEGF, MDGE, MCGD, esse æqualiter analogas, & idē inter se æquales; sicut etiam figurę, NSTV, NOTS, NBT O, pariter inter se sunt æquales, & quæcunque alię sunt in eodem plano: ex quo habemus etiā solida, AMEGF, AMDGE, AMCGD, esse æqualiter analogā, & idē inter se æqualia. Eodē modo ostendemus solida, PQRY, PRXY, pariter

Ex annex.



pariter inter se equalia esse. Quotuplex est ergo solidū AM CGF, ex tribus, AMCGD, AMDGE, AMEGF, cōpositū solidi, AMEGF, totuplex est figura, MCGF, ex tribus, MC GD, MDGE, MEGF, cōposita, figurę, MEGF. Similiter quotuplex est solidum, PQRX, ex duobus, PQRY, PYRX, cōpositum ipsius, PQRY, totuplex est basis, QRX, ex duabus, QRY, YRX, cōposita, fig. QR γ ; ita ut habeamus quę multiplices primę, & tercię, necnon secundę, & quartę magnitudinis. Cum autem figurę, FMG, VNBT, sint æquę multiplices figurarum, MEGF, NSTV, & pariter figurę, QRX, Z Δ R, sint æquę multiplices figurarum, QR γ , Z Δ , ipsę verò figurę, MEGF, QR γ , NSTV, Z Δ , sint proportionales, & homologę, MEGF, NSTV: ideo si figura, MCGF, fuerit æqualis figurę, QRX, etiam figura, NBTV, erit æqualis figurę, Z Δ R, & quęlibet alia in solido, AMCGF, sibi respondentem in alio solido, PQRX, unde & solidum, AMCGF, æquabitur solido, PQRX. Et si figura, MCGF, superauerit figuram, QRX, eodem modo ostendemus, quod solidum, AMCGF, superabit solidum, PQRX, & si illa superabitur, etiam hoc superabitur. Ergo prima ad secundam erit, ut tertia ad quartam, hoc est solidum, AMEGF, ad solidum, PQRY, erit ut figura, MEGF, ad figuram, QR γ , vel ut figura, NSTV, ad figuram, Z Δ , vel ut alia quęlibet cuiusmodi in solido, AMEGF, ad sibi respondentem

Conuerf.
Defin. 5.
Qui Elem.

Ex 1. huius.

Defin. 5.
Qui Elem

dentem in alio solido, $PQR Y$, hoc est ad existentem in eodem cum ipsa plano, quod ostendere opus erat. Dicantur autem figure proportionaliter analogę, iuxta regulas, $MEGF$, QRY .

II.

His ex Libro 7. Geo. Ind. deprumptis, ibidem postmodum à Prop. 4. usque ad Prop. 9. exclusivè recoluntur ostensa circa parallelogramma, & triangula Libro 2. probanturque hac nova ratione eisdem convenire communia symptomata, quę ipsis in esse iuxta priorem methodum in Exerc. ant. dicebantur, ac numero 21. enumerata fuere. Hoc autem deducitur hic ex Prop. 3. superius ostensa; parallelogramma enim & triangula in eadem altitudine existentia probantur esse inter se ut bases, quia sunt figure proportionaliter analogę: & ex hoc reliqua symptomata inferuntur via geometrica consueta, ac transferuntur ad triangula, quia hæc sunt dimidia parallelogrammorum sub duobus quibuscunque eorum lateribus completorum. Non dissimili ratione infertur ex eadem Prop. 3. cylindricos & conicos in eadem altitudine existentes esse inter se ut bases (quod & hic aliter infra probabimus) quapropter ostenso prisma triangulare esse triplum pyramidis in eadem altitudine, & basi cum eo existentis, (quod & aliter ostensum est in Exercit. ant. numero, 27.) concluditur universaliter omnem cylindricum triplum esse conici in eadem altitudine, & basi cum eo stantis. Hinc subinfertur cõmunia symptomata cylindricorũ in Exerc. ant. num. 22. enumerata, etiam ipsis conicis convenire.

III.

A Propositione 9. usque ad 11. exclusivè agitur de frustis conicis, ut præcipuè demonstretur Prop. 28. Libri 2. translata ad cylindricos, & conicorum frusta. Hac autem deducitur ex præostensis in eodem Libro 7.

IV.

Cum ante Propositionem 11. solidorum examen aggressi iuxta hanc posteriorem methodum, cylindricos, conicos, & eorum frusta solum attigerimus, orientia ex parallelogrammis, triangulis, & trapezijs, ut pararetur aditus iuxta eandem ad alia quocunque

quoque solida, necesse fuit aliā ab adhibita in Lib. 2. rationem iustificare. Manifestum est illi, qui attentè Libri secundi Geometriae Ind. doctrinam perlustravit, ut plurimum ibi considerari omnia quadrata talium, & talium figurarum iuxta datas regulas, eorumque ad invicem proportionem. Id verò non ab re factum esse intelligit Philogeometra: cum enim, habita ratione omnium quadratorum datarum planarum figurarū iuxta propositam regulam, illicò habeatur ratio quarumcumque similium figurarum à datis figuris iuxta eandem regulam descriptarum, & consequenter solidorum similarium ab eisdem figuris iuxta eandem regulam genitorum, ut probatur in Exerc. ant. Prop. 33. idè opere pretium fuit prius examinare proportionem omnium quadratorum datarum figurarum, iuxta earum assumptam regulam, ut inde lucraretur eandem pro alijs quibuscumque similibus figuris, & solidis similaribus ab eisdem genitis iuxta eandem regulam. Similis ratio currit in hac posteriori methodo, habita enim ratione inter ea, quae aequivalent dictis omnibus quadratis, illicò huiusmodi infiniti lucri nobis sit accessio. Equivalens verò omnibus quadratis tale adinvenimus, quod facillè intelliget, qui doctrinam numeri 17. Exercitationis ant. non fuerit oblitus. Assumatur in exemplum, maioris intelligentiae gratia, quaecumque figura plana, ut ex. gr. parallelogrammum, sicuti fit in eodem numero 17. supponamusq; regulā basim, & ab ea describi quadratum, rectum, vel inclinatum plano eiusdem parallelogrammi, hocque quadratum sit ducendorum planorum quoque regula. Rursus ab omnibus lincis dicti parallelogrammi regula basi intelligatur describi quadrata, basis quadrato parallela: scimus ergo iuxta priorem methodum hæc vocari omnia quadrata dicti parallelogrammi, regula basi. Concipiamus nunc solidum quoddam adiacens prefato parallelogrammo in basi eodem quadrato ab illius basi iam descripto, in quo, si secetur regula parallelis quocumque planis, gignantur semper quadrata, descripta à lincis parallelogrammi eius basi parallelis. Nulli ergo dubium erit (si quocumque plana duci possunt assumi supponantur) hæc coincidere cum dictis omnibus quadratis ipsius parallelogrammi, & eadem esse omnia plana dicti solidi quod erit parallelepipedum. Quapropter illud voco, Quadratum solidum dicti parallelogrammi, regula quadrato

drato illius basis, unde conceptui omnium quadratorum substituo conceptum soliditatis dicti parallelepipedi, seu Quadrati solidi, quo hac ratione utor. Hoc est si proponantur ex. gr. duo parallelogramma in eisdem parallelis, quorum bases describant quadrata ad eandem partem eisdem erecta, seu æque inclinata, ubi iuxta priorem methodum querenda esset proportio inter omnia quadrata eorundem; potius inuestigo rationem quadratorum solidorum eorundem parallelogrammorum, regula eadem; & hoc traiectis quomodocumq; planis regule equidistantibus, & collato quolibet quadrato unius solidi cum sibi respondente quadrato in alio solido: ubi enim inuenero inter ea singillatim comparata unam, & eandem esse rationem, nempe quam habent quadrata basium, illico pronūciabo iuxta Prop. 3. superiore hæc esse solida proportionaliter analoga, & ideo habere eandem rationem, quam earum bases.

V.

Quando ergo proposita figura est parallelogrammum, eiusque regula tam basis, quam ab ea descriptum quadratum, iam intelligimus quale nam sit, quod vocamus quadratum solidum eiusdem parallelogrammi & consequenter dictis in præfato num. 17. Exercit. ant. appellamus quoque genitum ex eodem parallelogrammo tamquam ex sua genitrice figura, estq; eiusdē solidum simile, ut patet ex B, Definitionis 8. traditæ in Exercit. ant. si modo pro omnibus figuris similibus substituantur quocumque in eo conceptibiles. Quod si mutetur figura genitrix, quæ fuit parallelogrammum, in triangulum, trapezium, & uniuersaliter in aliam quācumque figuram planam, in qua sit assumpta quælibet regula, & ab ea sit descriptum quadratum rectum, vel inclinatum plano dictæ genitricis figura, nunc puto, facile intelligi poterit quale nam sit illius quadratum solidum, & quomodo inter quarumcumque genitricium figurarum quadrata solida sit ratio querenda, illaque inuenta ad alia quæcumque similia solida ab eisdem genita figuris, transferatur. Sciendum tamen est à lineis, quæ pro regulis assumuntur, vice quadratorum posse describi rectangula altera parte longiora, & consequenter his parallela plana tunc nō esse quadrata, sed rectan-
gula

De Posteriori Methodo Indivisibilium. III

gula præfatis æqualia, & similia, ac similiter descripta, in eoque casu pro quadrato solido nos ipsum appellare rectangulum solidum. Vtrique autem possumus hac generali definitione comprehendere.

DEFINITIO RECTANGULORVM
SOLIDORVM.

SI, propositum quodcumque solidum parallelis quocumque planis ita secari possit, ut conceptæ ex secantibus planis in eo figure sint semper parallelogramma rectangula; latera vero eadem describentia sint omnia uni cuidam lateri, ut regula æquidistantia: dicantur ea communi nomine Rectangula solida. Verum si dicta rectangula fuerint quadrata, dicantur speciali nomine Quadrata solida; & Rectangula solida, cum illa non fuerint Quadrata.

VI.

Porro istorum solidorum quedam proprietates in eodem Libro 7. demonstratur. Ut in Prop. 11. ostenditur eadem semper superficiebus cylindraceis (hoc est quæ sunt portiones superficierum cylindricorum) comprehendi. Ex quo supposito illico intelligimus ad minus 4, & ad summum 6, superficiebus illa circumdari posse. Quatuor inquam erunt, desinentibus rectangulis ad duo opposita puncta; quinque, si ex una parte terminentur ad punctum, & ex alia ad rectangulum; sex eadem, quando utrinque limites erunt ambo rectangula. Sicuti vero quodcumque rectangulum etsi habeat in suo ambitu quatuor latera, dicitur nihilominus contineri tantum sub duobus angulum rectum in eo constituentibus, iuxta Def. præ. Lib. 2. Elementorum, quia opposita eisdem duo latera sunt semper ipsis æqualia: ita quodcumque ex dictis solidis etsi quatuor superficiebus ad minus contineatur, in quibus iacent semper latera descriptorum rectangulorum, congruenter tamen dictæ Definitioni Euclidianæ ipsum dicimus quoque comprehendi sub duabus tantum superficiebus, capientibus duo latera rectangulorum invicem perpendicularia, quia alia duo prædictis opposita exhibent & ipse præfatis æqualia latera. Aliqua tamen hic interest cum Euclidianæ Def. differentia, etsi enim infinita latera reperiri possint

possent illis duobus equalia, sub quibus rectangulum dicitur contineri, quæ ad angulum rectum componi possunt, & ipsum rectangulum continere, illa tamen sunt semper recta linea. At pro istis solidis infinite quidem superficies reperiri possunt exhibentes equalia latera ijs, quæ iacent in illis duabus, sub quibus rectangulum solidum continetur (ut ostenditur in eodem Lib. 7. Prop. 11, 12.) quas omnes propterea inuicem homologas voco: verum non omnes poterunt in ambitu dicti solidi reperiri, ita ut quodammodo potentia, non actu ipsa solida continere æquius dicerentur. Hocque oritur ex varietate homologarum superficierum, quæ non omnes sunt planæ, sed & curvæ, & illa infinitis modis variabiles. Quæ cum ita sint, fit ut ille tamen in ambitu aliorum solidorum reperiri possint, illaque actu continere, unde & infinita solida sub superficiebus homologis contenta, dari possint, quoad ambientem quidem superficiem diuersa, sed quoad soliditatem omnia inuicem equalia: quod ostendit Propositio 12. dicti Lib. 7. media Prop. prima; hoc tamen & infra aliter demonstrabitur.

VII.

In Prop. 13. eiusdem probatur quoque quadratum, vel rectangulum solidum sub parallelogrammo, & alia quacunque figura eiusdem cum eo altitudinis, contentum; regulis duabus rectis, quarum una sit basis parallelogrammi, fore cylindricum, eiusque basim dictam figuram. Quod si præfata figura fuerit & ipsa parallelogrammum, regulaque eius basis, tale solidum erit parallelepipedum. Hinc infertur in Corollario primo eiusdem: si fuerint duo rectangula solida communiter sub dato parallelogrammo, & singillatim sub duabus figuris contenta, regulis &c. ea, cum sint æquæ alti cylindrici, in basibus dictis figuris, ideo fore ut dictæ bases. Similiter in Prop. 14. ostenditur, si figura continentes fuerint triangula in eisdem parallelis, & verticibus ad eandem partem constitutis, contenta sub eisdem solida rectangula, regulis basibus eorundem, fore pyramides, rectangulas bases habentes; & contenta sub trapezijs, pyramidum frusta.

VIII.

Sequitur ibidem Propositio 15. similis Propositioni 23. Lib. 2. eiusdem Geometriæ Ind. quapropter in ea primò probatur, si fuerint

De Posteriori Methodo Indivisibilium. 113

fuerint due quaelibet plana figura in eisdem parallelis, quarum altera sit regula, supponaturq; altera dictarū figurarū indivisa, & reliqua diuisa, prout dicitur in præcitata Prop. 23: rectāgulum solidū sub indivisa, & diuisa tāquā integra, æqua ut rectangulis solidis sub indivisa, & sub partibus diuisæ. Hoc verò demonstrato facile inferiuntur ijs similia, quæ in Coroll. præfata Prop. 23. colliguntur, hoc est si ea iuxta hanc methodum adaptam supponantur. De his tamen in sequentibus pariter agemus.

IX.

His demonstratis probantur denuò per hæc noua fundamenta Prop. 30, 31, 32, quæ cum sint in gratiam doctrine reliquorum Librorum dictæ Geometriæ, quam hic totā prosequi nentiquam intendimus, propterea & in Exerc. ant. prætermisæ sunt, & hic quoque relinquuntur; ut & reliquæ ex Libro 3, 4, 5, eiusdæ Geometriæ, restaurata iuxta hanc posteriorem methodum.

X.

Ut verò colligi posset fructus, quem ex consideratione solidorum rectangulorum sub datis figuris pendere superius diximus, necesse fuit adhuc ostendere ut Quadrata, vel rectāgula solida sub duabus quibuscumque figuris iuxta datas regulas ita esse quæcunq; solida similaria genita ab eisdem figuris iuxta easdem regulas. Hoc autem probat Prop. 22. dicti Libri 7. simili demonstratione ei, quæ allata est ad ostendendam Propos. 33. Libri 2. quam attulimus in Exercit. ant.

XI.

Denique ut modus procedendi iuxta hanc posteriorem methodum in omnibus alijs figuris aliquantulum appareat, eadem exempla afferemus, quæ in fine Exerc. ant. num. 35, 36, circa Parabolam, & ab ea genita solida iam allata sunt. Assumpta igitur denuò figura eiusdem num. 35, prius & hic ostendemus parallelogrammum, TC, sexquialterum esse parabolæ, OAC, tali ratione. Suppositis iisdem ibi constructis, manifestum est ut ibi probabatur, GK, ad KH, esse ut quadratum, Rk, ad quadratum, KI: sed ut GK, ad kH, ita sumpta communi altitudine, GK, est quadratum, GK, ad rectāgulum, CKH; ergo quadratum,

P

Gk, ad

XII.

Sit nunc in eadem figura probandum quadratum solidum, TC, duplum esse quadrati solidi parabola, OAC, regula, QC. Suppositis ergo iisdem constructis num. 36. Exerc. ant. constar, BA, ad, AS,

ad AS , seu MS , ad SP , esse ut quadratum, BC , vel, QS , ad quadratum, SH : unde, sumpta communi altitudine, MS , erit quadratum, MS , ad rectangulum, MSP , ut quadratum, QS , ad quadratum, SH . Quapropter ut supra, tam quadratum solidum, LB , concludetur esse proportionaliter analogum quadrato solido, DB , quam rectangulum solidum sub, LB , & triangulo, ABN , quadrato solido semiparabolæ, ACB , & subinde hæc quatuor solida esse proportionalia. Sic igitur quadratum solidum, LB , ad rectangulum solidum sub, LB , & triangulo, ABN , erit ut quadratum solidum, DB , ad quadratum solidum semiparabolæ, ACB . Sed quadratum solidum, LB , ad rectangulum solidum sub, LB , & triangulo, ABN , est ut, LB , ad triangulum, ABN , per numerum 7. superiorem, hoc est duplum. Ergo quadratum solidum, DB , quadrati solidi semiparabolæ, ACB , duplum erit; & consequenter etiam quadratum solidum, TC , duplum erit quadrati solidi parabolæ, OAC : sunt enim illa horum quadrupla. Nam per D. Sectionis 4. Propos. 23. Exerc. ant. huic stylo adaptatæ, iuxta superius dicta num. 8. quadratum solidum TC , æquatur quadratis solidis, TB , BD , & duobus rectangulis solidis sub, TB , BD , hoc est quatuor quadratis solidis ipsius, TB . Qua ratione pariter constat quadratum solidum parabolæ, OAC , quadruplum esse quadrati solidi semiparabolæ, ACB . Porro ex dictis num. 10. superiori manifestum est hanc eandem rationem reperiri inter quæcumque alia solida genita ex parallelogrammo, TC , & parabolæ, OAC , iuxta eandem regulam, OC , quod probat dicti Lib. 7. Prop. 22. ad normam Propos. 33. Lib. 2. allatæ in Exerc. ant. & examinatæ num. 37. 38.

XIII.

Ex iam dictis ergo satis credo percipi posse omnibus quadratis datarum figuram iuxta quandam regulam, rectè substitui earundem quadrata solida iuxta eandem regulam: ut & omnibus rectangulis sub duabus figuris iuxta datas regulas, rectangula solida sub eisdem iuxta easdem regulas. Hæc enim, collatis inuicem distributiue eorundem Indivisibilibus, facildè enucleatur quæ rationem habeant. Etenim habentur semper & hic quatuor solida proportionaliter, analogæ quorū duo sunt genitæ ex parallelogrammis æqualis reliqua vero ex figuris eisdem in

scriptis, regulis basibus: & hæc sunt æquivalentia quatuor magnitudinum ordinibus in Exerc. ant. num. 29. consideratis. Patet ergo ratio procedendi per hanc quoque posteriorem methodum.

XIV.

Quoniam verò Prop. 1. 2. & 3. superius traditæ totius huiusce methodi sunt fundamenta, idè ad earum veritatem confirmandam in solidis, non dissimili ratione ei, quam post eandem Prop. pr. immediatè adhibuimus superius in planis, hæc quæ subsequuntur nuper ostensa, duxi superaddenda. Ea tamen is, præterire poterit, qui iã demonstratis aquiescat: quæ cum sint in gratiam præcipuè dictarum Propositionum, inseruiant tamen & toti doctrinæ Libri 7. dictæ Geo. Ind. propterea sub titulo Lemmatum exhibentur.

XV.

Antequam verò ad hæc Lemmata accedamus, quoniam passim nomen cylindrici, eiusque nonnullæ proprietates in ijs usurpantur, ut multoties fit & pro ipsis, & pro conicis in superioribus, etsi putem non obscure hucusque hæc intelligi potuisse, dum dictum est cylindricos esse corpora columnaria, & conicos pyramidalia, attamen ut eorum singulas conditiones exactè percipiat studiosus, omnisq; circa hæc ab eo tollatur ambiguitas, eorum definitiones Libro primo Geo. Ind. traditas hic consultò repetere volui.

XVI.

Definitio Cylindrici, quæ est tertia
Libri Primi Geo. Ind.

Exposita quacunq; figura plana, & in eiusdem ambitu sumpto utcunque puncto, ab eoque ad alteram eiusdem partium ducta quadam recta linea terminata, & super planum propositæ figure eleuata, si hæc per ambitum talis figure semper æquidistanter cuidam rectæ lineæ moueri intelligatur, donec omnem percurrerit ambitum: alterum eiusdem extremum punctum, quod non fertur per ambitum propositæ figure, describet circuitum planæ figure ipsi propositæ æquidistantis, ut probabitur. Solidum ergo, quod comprehenditur utrisque figuris iam dictis,

& scilicet

De Posteriori Methodo Indivisibilium. 117

& superficie linea, quæ revolvitur, descripta dicetur, *Cylindricus*. Superficies in revolutione descripta, necnon quodlibet illius frustum, superficies cylindracea. Cylindrici oppositæ bases, dicta figura plana inter se æquidistantes. Latus autem cylindrici, quavis recta in superficie cylindracea oppositas bases pertingens, cui congruit in revolutione ipsa linea revoluta. Et tandem regula lateris cylindrici dicetur illa, cui revoluta semper manet æquidistans.

XVII.

Definitio Conici, quæ est quarta
Libri Primi Geo. Ind.

Exposita plana quacunque figura, extra cuius planum ad verticem eiusdem partium quodcumque sit assumptum punctum: si ab eo ad quodvis punctum illius ambitus recta linea ducatur, quæ indefinitè quoque sit producta; & hæc per eiusdem ambitum moveatur donec ipsum totum percurrerit ambitum; sumptum punctum erit vertex solidi, quod comprehenditur superficie descripta à linea, quæ revolvitur, inter ambitum propositæ figuræ, & sumptum punctum clausa, vertex, inquam, sumptus respectu propositæ figuræ, ut probabitur. Tale solidum autem dicatur, *Conicus*, cuius basis proposita figura, & vertex dictum punctum. Superficies descripta à linea, quæ revolvitur, & iacet inter ambitum propositæ figuræ, ac dictum punctum, & quodlibet illius frustum dicatur, *Superficies Conicularis*. Ille verò rectæ lineæ, quæ in eadè reperiuntur, & quibus congruit revoluta inter verticem, & ambitum basis conclusa, vocentur; *Latera eiusdem Conici*.

XVIII.

Proprietates quædam Cylindricorum demonstratæ eodem
Libro Primo Geo. Ind.

SI à quocunque puncto basis cylindrici, per quam fit revolutio, versus cylindricum ducta fuerit recta linea, parallela regulæ lateris cylindrici: hæc erit latus cylindrici in tali basi constituti. Prop. 5. eiusdem.

In cy-

In cylindrico, traiecto per eiusdem latera quomodocunque plano creatur in ipso parallelogrammum, vel parallelogramma. Corollarium Prop. 6.

Concursus planorum per latera cylindrici transeuntium, fit in recta parallela eiusdem cylindrici lateri. Prop. 7.

Traiectis per latera cylindrici quocunque parallelis planis ipsum secantibus, sunt in eo parallelogramma equiangulara. Propos. 8.

Et si plano per latera ducto equidistet planum, cylindricum tangens: fiet contactus in recta, vel rectis, qua erunt latera cylindrici; vel in parallelogrammis, equiangularis per latera ducto. Prop. 9.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto, dividitur in cylindricos. At si secetur parallelis planis, omnibus eiusdem lateribus coincidentibus, comprehensa ab illis, & inclusa superficie cylindracea, solida erunt pariter cylindrici. Propos. 10.

Cuiusvis cylindrici oppositæ bases sunt similes, æquales, & similiter positæ. Prop. 11.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto eiusdem oppositæ bases secantur quoque in figuras similes æquales, & similiter positas. At si secetur parallelis planis, omnibus eiusdem lateribus coincidentibus, concepta in eo figura erunt pariter similes, æquales, & similiter positæ. Prop. 12.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto, nec non planis oppositis eiusdem basibus parallelis: eorum communes sectiones erunt lineæ homologæ similium figurarum ex tali parallelor. oppositis basibus planorū sectione orientiū. Prop. 13.

Si due figura plana, non existentes in eodem plano, fuerint similes æquales, & similiter positæ: illæ erunt cuiusdam cylindrici oppositæ basis.

XIX.

Proprietates quædam Conicorum ibidem ostensæ.

Punctum manens, cui in revolutione inicitur latus conici, est illius vertex respectu eiusdem basis. Prop. 15.

Si conicus secetur ut cunq; per verticē ducto plano, fiet in eo triagulus, vel triangula. Prop. 16.

Secto

Sec̃to conico per verticē ducto plano, diuiditur in conicos. At eo sec̃to plano omnibus eiusdem lateribus coincidente, abscissum ab eo versus verticem solidum erit conicus, eiusque basis abscondens figura. Prop. 17.

Si per verticem conici, & rectam tangentem eius basim extēdatur planum; hoc tanget ipsum conicum in recta, vel rectis lineis, quæ erunt latera eiusdem conici; vel in plano, aut planis, quæ erunt triangula. Prop. 18.

Si conicus secetur quomodocunq; plano basi æquidistante, fiet in eo figura similis eidem basi, & similiter posita. Prop. 19.

Si conicus secetur quomodocunque parallelis planis, omnibus eiusdem lateribus coincidentibus: conceptæ in ipso figuræ erunt similes & similiter posita. Prop. 20.

Sec̃to conico per verticem ducto plano, vel aliquo ipsum tangente in plano, vel planis; si deinde secetur alijs planis utcunq; parallelis: communes dictorum planorum sectiones erunt lineæ homologæ figurarum, quæ ab ipsis æquidistantibus planis in eo producuntur. Prop. 21.

Si duæ figuræ similes & similiter posita, inæquales tamen, non existerint in eodem plano: illæ erunt cuiusdam frusti conici oppositæ bases. Prop. 22.

Quoniam vero hic, ut & in superioribus sæpè fit mentio similium planarum figurarum, ut Lector nedum has intelligat iuxta particulares definitiones de similibus figuris ab alijs traditas, sed et iuxta meam definitionem generalem, cui particulares cōcordare in eodē Lib. 1. ostēdi ideo hanc quoq; hic subiungendam duxi.

XX.

Definitio generalis similium planarum figurarum, quæ est decima eiusdem Libri primi.

Similes figuræ planæ in uniuersū vocētur, in quarū singulis oppositæ tangētes ita duci pōt & in easdē tangētes ita incidere ad eundē angulū, ex eadē parte rectæ lineæ in illis terminatæ, ut si intra dictas oppositas tangētes, eisdē æquidistāte, utcumq; ductæ fuerint rectæ lineæ, eas, quæ incidunt dictis tangentibus (quæ uocantur earum Incidentes) similiter ad eandem partem secantes; reperiāmus harum parallelarum, necnon & opposi-

oppositarum tangentium eas portiones, quæ inter dictas incidentes, & circuitus figurarum ad eandem partem sitæ sunt, eodem ordine sumptas, eandem interserationem habere, quam rectæ lineæ, quæ dictis tangentibus inciderunt, & in easdem terminantur. Iste autem dicuntur lineæ homologæ dictarum figurarum.

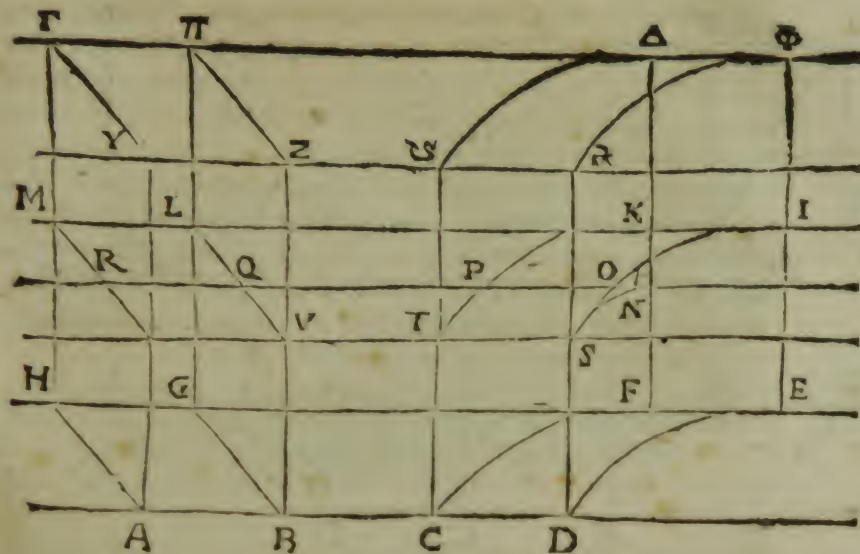
Cum verò duæ similes figure planæ in eodem plano, vel in æquidistantibus planis ita posite fuerint, ut earum incidentes vel sint inuicem superpositæ, vel æquidistantes homologis lineis dictarum figurarum, & homologis partibus ipsarum incidentium ad eandem partem constitutis: ipsæ dicuntur similiter posite, vel à suis lineis, aut lateribus similiter descriptæ.

His verò præmissis nunc ad ipsa Lemmata accedamus.

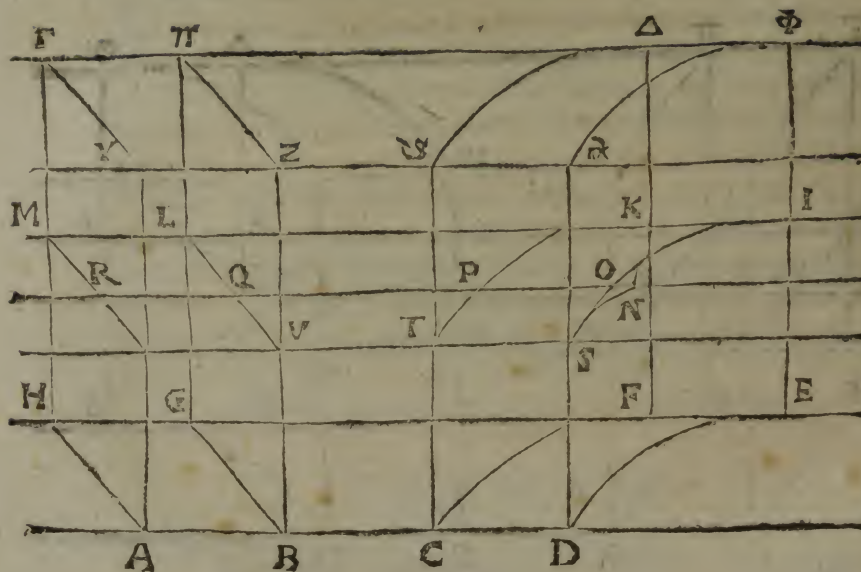
LEMMA I.

Cylindrici æquealti, & in basibus parallelogrammis æqualiter analogis iuxta regulas bases (quorum vnum saltem sit rectilineum) in iisdemq; parallelis planis per parallelogrammorum bases transeuntibus conclusi, inter se sunt æquales.

Sint duæ quæcumque inter se parallelæ rectæ lineæ, vt, HE, AD; & in ijs duo quælibet parallelogramma æqualiter analogæ, HABG, FCE, iuxta regulam, AD, quorum alterum saltem, vt, HABG, sit rectilineum; extendantur autem per, HE, AD, duo indefinita plana parallela ambo recta, vel inclinata ad planum per, HE, AD, transiens; quæ tangent duos cylindricos, RB, & E, æquealtos, & in basibus ipsis, HB, CE, constitutos, existente cōtactu in planis, YB, & C, vnius, & alterius in planis, rG, DE, ipsis, AB, CD, HG, FE, insistentibus. Dico prædictos cylindricos inter se æquales esse. Quoniam ergo oppositæ bases, rZ, ΔB, sunt in eodem plano (cum cylindrici supponantur æquealti) ideò dictū planum extendatur indefinitè, & concurrat cum planis parallelis tangentibus, in rectis, rΠΔϕ, YZ & B. Manifestum est ergo paral-



parallelogrammorum, HB, CE, bases, AB, CD, ut & oppositas, HG, FE, inter se, necnon prædictis æquales esse, per definitionem figurarum æqualiter analogarum traditam in Prop. pr. Lib. 7. Geometriæ Indivisibilium. Et per eam quæ tradita est ad finem demonstrationis Lēmatī primi, ibidem subsequentis pro parallelogrammis, tam rectilineis, quam curvilineis. Erunt insuper contactu plana, YB, & D, rG, ΔE, parallelogramma, per Prop. 9. Lib. Primi eiusdem, & reliqua plana, rA, rZ, ZG, pariter parallelogramma, rZ, quidem per Prop. 11. eiusdem primi, & reliqua ex revolutione lateris cylindrici, vno extremo per rectam, HA, seu, GB, properate, quod idcirco cogitur describere parallelogrammum. Ex quo pater, rB, esse parallelepipedum. Sicuti etiam erit, ΔD, si, FCDE, supponatur pariter esse parallelogrammum rectilineum. Quoniam ergo, AB, æquatur ipsi, CD, apposita communi, BC, erit, AC, æqualis ipsi, BD; eadem ratione ostendemus, HF, æquari ipsi, GE. Si ergo mente intellexerimus solidum, quod comprehenditur superficiebus, FHAC, ΔrY&, & YAC, ΔrHF, rHAY, Δ&CF, superponi solido comprehenso superficiebus, EGBD, φπZ R₂ R₂ZBD, φπGE πGBZ, Q φR₂DE,



ΦBDE , ita ut punctum, H , ponatur in, G , recta verò, HF , extendatur super, GE , punctum, F , erit in, E , quia, HF , GE , sunt æquales. Quod si figura, $FHAC$, cadat super figuram, $EGBD$, linea, HA , erit in GB , propter æqualitatem angulorum, AHF , BGE , & punctum, A , in, B , quia, HA , GB , sunt æquales. Similiter ex æqualitate angulorum, HAC , GBD , & linearum, AC , BD , concludemus, AC , cadere super, BD , & punctum, C , in, D . Vltcrius cum sint æquales anguli, AHF , BCN , inter se, ut &, rHF , nGE , in superpositione solidorum, extendatur, Fr , in, Cn , & punctum, r , erit in, n , ut &, $r\Delta$, in, $n\Phi$, &, Δ , in, Φ ; & similitudine, rY , congruet ipsi, nZ , AY , ipsi, BZ , & planum, rA , ipsi, nB . Iisdem modis ostendemus planum, ΔrY , congruere plano, ΦnZ , &, $rHF\Delta$, ipsi, $nGF\Phi$; sicut & $Y\&CA$, ipsi, $Z\&DB$. Remanet solum probandum superficiem, $\Delta\&CF$, congruere superficiem, ΦBDE . Si ergò, CE , ponitur esse parallelogrammum rectilineum, erunt rectæ, CF , DE , & Δ , Φ , & quia probatum est punctum, Δ , esse in, Φ , &, in, B , C , in, D , &, F , in, E , idcò & rectæ rectis, & planum plano congruent. Ex quibus concludetur solidum, $rACF$, solido, $nBDE$, congruere, & subindè illi æquale esse, vnde sublato

sublato communi solido, π & GBCF, remanebit parallelepipedum, τ B, æquale parallelepipedo, Δ D. Si verò, FD, fuerit parallelogrammum curvilineum, & dictæ lineæ curvæ erunt, tuncq; superficiem, Δ C, congruere ipsi, Φ D, sic probabimus. Nisi enim congruant, aliquod saltem punctum in superpositione cadet extrâ, vel intrâ solidum: cadat prius extrâ, & sit, ex. gr. punctum, N, per quod trajecto plano ipsi subiecto plano æquidistante, illud secet plana cylindricos tangentia, & erecta, vel inclinata eidem subiecto plano, in rectis, MLKI, XVTS, per quod creabuntur in parallelepipedo, τ B, parallelogrammum, MV, & in cylindrico, Δ D, parallelogrammum curvilineum, KS, per Cor. Prop. 12. Lib. Primi Geo. Indivisibilium. Rursus in plano parallelarum, MI, XS, per punctum, N, extendatur indefinitè, NOPQR, parallela ipsis, MI, XS, cuius pars concepta in, MV, sit, RQ, & in, KS, ipsa, PO, quæ erunt inuicem æquales, & subinde, addita communi, QP, erunt ipsæ, RP, QQ, pariter æquales, sed, RP, eadem est ipsi, QN, quæ venit in superpositione ex hypotefi, ergò, QQ, QN, hoc est pars toti æqualis erit, quod est absurdum. Non ergò, N, seu vllum punctum superficiem, Δ & CF, cadet extrâ superficiem, Φ & DE. Eodem modo ostendemus nullum cadere intrâ, ergò multò magis nihil superficiem, Δ C, cadet extrâ, vel intra superficiem, Φ D, quapropter tota, Δ C, toti, Φ D, congruet, & totum solidum, τ ACF, toti, π BDE, pariter cōgruet, ac ideo illi æquale erit. Sublato ergò communi solido, π & GBCF, remanebit parallelepipedum, τ B, æquale cylindrico, Δ D. Quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM I.

EX hoc patet si parallelogramma, HB, FD, fuissent in eadem basi; vel si pro duobus vnum tantum esset parallelogrammum, in quo tanquam in communi basi existere suppositi fuissent prædicti cylindrici, quod nihilominus eadem ratione æquales ostensi fuissent. Unde siuè sint in eadem, siuè in æqualibus basibus, habentes reliquas condi-

Q 2 tiones

tiones superius dictas, semper æquales erunt. Casum autem assumpsi æqualium basium, ut minus Schema confunderetur.

COROLLARIUM II.

Vterius si in basi, FCDE, & in eadem altitudine cum parallelepipedo, rB, concipiamus esse parallelepipedum, seu cylindricum, qui quomocunque protendatur extrâ plana, YD, rE, habebit ipse duas facies, veluti sūt, & D, ΔE, quæ erunt parallelogramma insistentia ipsis, CD, FE, ut de eisdem, & D, ΔE, probabatur. Si ergo eorum plana, velut & plana, Ar, Bπ, cum plano per, rB, rE, transeūte ad partem suppositi cylindrici indefinitè extendantur, orietur figura similis proposito schemati. Nempè habebimus alia duo plana parallela per, AD, HE, transeuntia, & inclinata subiecto plano, HEDA, sed inclinatione diuersa ab ea, quæ in planis, YD, rE, supposita fuit, tangentia nouum cylindricum, basi, FD, pariter insistentem. Inter eadem verò erit, & parallelepipedum (si compleatur) basi, HB, insistens, quod tangetur ab eisdem duobus parallelis planis. Vnde nouus ille cylindricus erit æqualis nouo huic parallelepipedo per ipsum Lemma. Sed per idem Lemma, nouum illud parallelepipedum, cum sit in eadem basi, HB, parallelepipedo, rB, eademque altitudine, tangaturque à duobus parallelis planis, nempè planis, Ar, Bπ, indefinitè extensis, erit æquale ipsi, rB. Ergo nouus cylindricus basi, FD, insistens sub diuersa tamen inclinatione erit æqualis primo proposito, ΔD, & consequenter ipsi, rB. Quicumque ergo cylindricus in basi, FD, & in eadem altitudine cum, rB, qualitercunque sit inclinatus, erit eidem, rB, æqualis. Hoc verò de quouis alio sic disposito eodem modo probabitur.

Ergo vniuersaliter colligemus, omnes cylindricos æquealtos, & in eisdem, vel æqualibus basibus constitutos (quæ sint parallelogramma, siuè rectilinea, siue curuilinea iisdem inclusa parallelis) inter se æquales esse.

LEM-

L E M M A II.

Cylindrici æquealti, & in basibus constituti, quæ sint parallelogramma, siuè rectilinea, siuè curvilinea, proportionaliter analogæ iuxta eorū bases; erunt inter se, ut ipsæ bases.

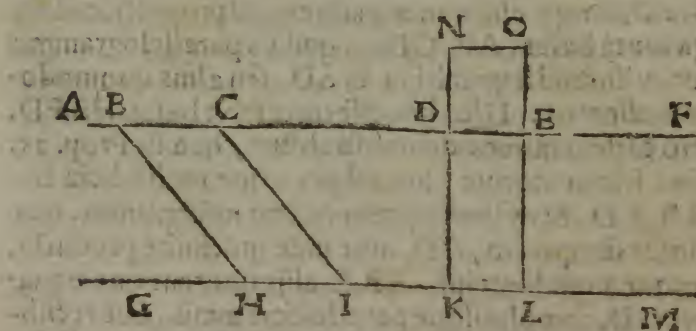
Quæ sint figuræ planæ proportionaliter analogæ explicatur in Prop. Secunda Lib. Septimi Geometriæ Indivisibilium. Ex definitione verò ibidem allata colligitur, si dictæ figuræ sint parallelogramma, & regulæ eorum bases; ipsa necessariò in eisdem parallelis esse constituta, ut considerati faciliè innotescet. Quapropter bases prædictorum cylindricorum erunt in eisdem parallelis. Supponamus ergò in Schemate Lemmatis antecedentis talia esse parallelogramma, HB , FD , nempe esse non æqualiter, sed proportionaliter analogæ iuxta bases, AB , CD , in quibus parallelogrammis insistant cylindrici æquealti, ΓB , ΔD , seu alius quomodocunque inclinatus. Dico hos esse inter se, ut bases, HB , FD . Hoc verò eadem ratione demonstrabitur, qua fit Prop. 25. Undecimi Elementorum, hoc est per æque multiplicia basium, HB , FD , & cylindricorum eisdem insistentium, quæ habebuntur sumptis in, AD , hinc inde indefinitè producta, quotcunque æqualibus ipsi, AB , & alijs quotcunque æqualibus ipsi, CD , completisque parallelogrammis, siuè rectilineis, siuè curvilineis, iuxta modum describendi parallelogramma curvilinea traditum in Lemmate 2. Propos. Primæ eiusdem Lib. Septimi. Complebuntur verò ulterius & cylindrici, iuxta ipsorum definitionem positam Lib. Primo dictæ Geometriæ. Tandem enim ostendetur, si multiplex primæ æqualis erit multiplici secundæ (nempe si duo cylindrici compositi ex descriptis cylindricis fuerint æquales) etiam multiplicem tertiæ fore æqualem multiplici quartæ: hoc est eorum bases fore æquales per Lemma ant. etsi minor minorem, & maior maiorem, &c. ex quibus, ut in dicta Propositione

tione fit, tandem concludemus, $r B, \Delta D$, seu quemcunque alium diuersimodè inclinatum, sed in eadem basi, FD , & altitudine cum, $r B$, esse vt bases, HB, FD . Vndè patet propositum. Similis modus habetur quoque inferius in Lemmate 8.

LEMMA III.

Solida parallelepippeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Hoc ostenditur ab Euclide Lib. Vndecimo Elem. Prop. 31. sed & nos ex prædemonstratis illud sic colligemus. Sint parallelogramma æqualia, $BHIC, NKLO$, quæ si essent in

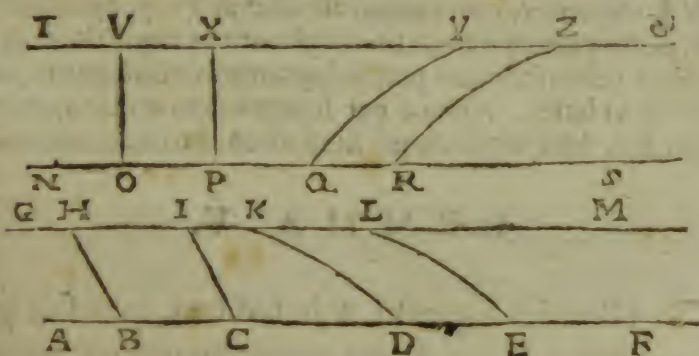


eisdem parallelis, per Corollarium 2. Lemmatis primæ cylindrici, seu parallelepippeda æque alta eisdem quomodocunq; insistentia, essent æqualia. Non sint ergo ambo in eisdem parallelis, sed, BI , in parallelis, AF, GM , & NL , protendantur extrâ ipsas, existente tamen basi, KL , in recta, GM , & secante, AF , parallelogrammum, NL , in recta, DE , vt fiat, DL , aliud parallelogrammum. Si ergo in tribus parallelogrammis, BI, DL, NL , tria parallelepippeda recta, vel inclinata insistere intelligantur, crit quod stat in, BI , ad illud, quod stat in, DL , vt, BI , ad, DL . ex Lemmate antecedenti, quia,
 BI, DL ,

BI, DE, sunt parallelogramma proportionaliter analogia iuxta bases, HI, KL, ut facile ostendi potest, cum sint in eisdem parallelis, AF, GM. Eadem ratione quod stat in basi, NL, ad illud, quod est in, DL, erit ut, NL, ad, DL, per idem Lemma, quia, NL, DL, sunt in eisdem parallelis, NK, OL. Sed, BI, ad, DL, est ut, NL, ad, DL, quia, BI, NL, ponuntur spatia æqualia; ergo parallelepippeda basium, BI, NL, eandem habebunt rationem ad illud, quod est in basi, DL. Ergo erunt inter se æqualia. Quod si, KL, non esset in recta, GM, nihilominus propositum eodem modo concluderetur, quia ab eo per duas parallelas æqualis distantia cum ea, quæ est inter, AF, GM, parallelogrammum, quale est, DL, abscindi posset, Unde patet propositum.

LEMMA IV.

Cylindrici æquealti, & in basibus parallelogrammis, siue rectilineis, siue curvilineis æqualibus, inter se sunt æquales.



Intelligentur cylindrici æquealti in basibus, KE, YR, parallelogrammis quibuscunque æqualibus. Dico eosdem æquales esse. Si ergo bases fuerint in eisdem parallelis, vel si non in eisdem, saltem in parallelis æqualis distantia; id manifestum.

manifestum erit ex Corollario 2. Lemmatis primi. At si non in iisdem, seu æqualis distantia parallelis fuerint, vt ex. gr. KE, YR, quæ sint in parallelis, GM, AF, T&, NS, quarum distantia inter se sint inæquales: itidem illud tali ratione ostendetur. Sumptis enim, OP, æquali ipsi, QR, &, BC, æquali ipsi, DE, constituemus in parallelis, T&, NS, parallelogrammum rectilinum, VP, quod erit æquale, YR, vt elici potest ex Lemm. 1. Lib. 7. Geo. Ind. & in parallelis, GM, AF, ipsum, HC, quod erit æquale ipsi, KE. Intelligemus autem in basibus, VP, HC, constituta parallelepippeda eiusdem altitudinis cum ijs cylindricis, qui in basibus, YR, KE, esse supponuntur. Erit ergo per dictum Cor. 2. Lemmatis primi cylindricus, YR, æqualis parallelepippedo, VP: vt & cylindricus, KE, parallelepippedo, HC. Sunt verò parallelepippeda, VP, HC, inter se æqualia per Lemma ant. igitur & cylindrici, YR, KE, inter se æquales erunt. Cylindrici ergo æquealti, &c. inter se sunt æquales. Quod, &c.

COROLLARIUM.

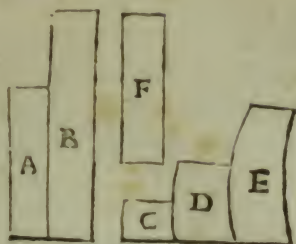
Manifestum est iuxta modum adhibitum in Lemmate secundo, quo dictum est ostendi Prop. 25. Undecimi, posse pariter demonstrari cylindricos æquealtos, & in basibus quibuscunque parallelogrammis constitutos, esse inter se vt bases. Nempè per sumptionem æquè multiplicium, &c. Hoc ergo tanquàm hic demonstratum assumemus.

LEMMATA V.

Cylindrici æquealti, & in basibus, quæ sint parallelogrammorum quorumcunque aggregata, constituti, inter se sunt, vt dicta basium aggregata.

Sint in basibus parallelogrammorum, A, B, & aliorum C, D, E. aggregatis constituti æquè alti cylindrici. Dico
eos

eos esse, ut dicta aggregata, &c. Exponatur .n. parallelogrammum quodcunque, F, in quo intelligatur cylindricus eiusdē cum prædictis altitudinis constitutus. Et quoniam cylindricus, AB, componitur ex cylindricis, A, B, (sicut cylindricus, CDE, ex cylindricis, C, D, E,)



est autem ut cylindricus, A, ad cylindricum, F, ita basis, A, ad basim, F, per Cor. Lemmatis antecedentis; & eadem ratione cylindricus, B, ad cylindricum, F, est ut basis, B, ad basim, F, idē per Prop. 24. Quinti Elem. erit cylindricus, AB, ad cylindricum, F, ut, AB, basis ad basim, F. Rursus cylindricus, F, ad cylindricus, C, erit ut basis, F, ad basim, C; & sic cylindricus, F, ad, D, ut basis, F, ad basim, D; ut & cylindricus, F, ad, E, erit ut basis, F, ad basim, E. Ideoque per definitionem 13. Primi Geo. Ind. colligendo, cylindricus, F, ad cylindricum, CDE, erit ut basis, F, ad basim, CDE. Ergo ex æquali cylindricus, AB, ad cylindricum, CDE, erit ut basis, AB, ad basim, CDE. Igitur cylindrici æquealti, & in basibus, quæ sint parallelogrammorum quorumcunque aggregata, constituta, inter se sunt, ut dicta basium aggregata. Quod ostendere propositum erat.

COROLLARIUM.

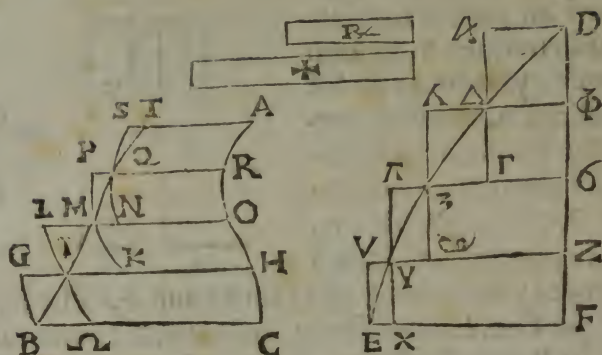
EX hoc patet, si comparetur aggregatum ex parallelogrammis cum parallelogrammo, vel e contra: cylindricos æquealtos in ipsis stantes esse pariter, ut ipsas bases.

LEMMA VI.

Cylindrici æquealti, & in basibus figuris planis æqualibus, & in alteram partem absolute deficientibus constituti; inter se sunt æquales.

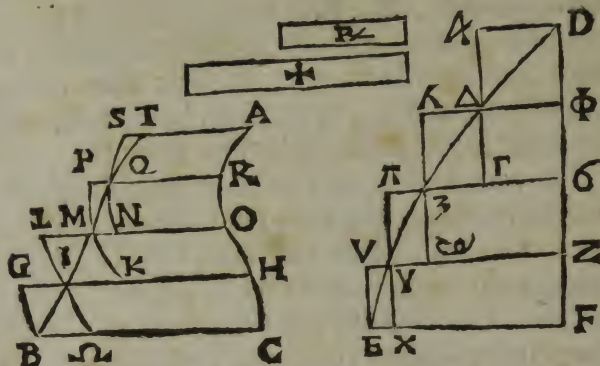
R

Sint



Sint duæ planæ figuræ æquales, $ATBC$, DEF , in basi-
bus rectis, BC , EF , quibus tanquam communibus regulis
parallelæ quotcunque ducibiles in eisdem figuris ita se ha-
beant, ut integræ sint, & earum quælibet basi propin-
quior sit maior remotiore. Has hic voco figuras in alteram par-
tem absolutè deficientes, etsi in Lemmate 2. Lib. Septimi
Geo. Ind. ibi consideratas figuras (habentes ulterius hanc
conditionem, quod sint iuxta suas bases, tanquam regulas,
æqualiter analogæ) pariter appellaverim in alteram partem
deficientes. Unde istæ hic nunc usurpatæ liberiores sunt,
cum ab ea lege solutæ sint. Intelligantur verò in dictis fi-
guris, $ATBC$, DEF , tanquam basibus æquealti cylindrici,
quomodocunq; constituti. Dico hos æquales esse. Si enim
non sunt æquales, eorum alter erit maior. Sit maior cylin-
dricus, $ATBC$, (hoc est, qui est in basi, $TBCA$, ut brevius
loquamur) & superet ipsum, DEF , cylindrico eiusdem
cum illis altitudinis, cuius basis sit parallelogrammum, $+$,
seorsimpositum. Quemadmodum ergò in dicto Lemmate 2.
Lib. 7. Geo. Ind. figuræ, $CQPD$, in alteram partem deficienti
(quæcumque essent linæ, DP , CQ ,) circumscripta, & in-
scripta est figura ex parallelogrammis composita, quarum
differentia minor esset, oblato ibi spatio, $+$ ita circa figu-
ram, $ATBC$, hic faciemus, hæc enim tota per parallelogram-
morum æquealorum descriptionem ibi traditâ expedietur.
Esto quod hoc sit factum, & quidem circumscripta sit com-
posita ex parallelogrammis, SR , PO , LH , GC , & inscripta
ex pa-

ex parallelogrammis, NR, KO, α H, quam illa superet minori spatio, quam sit, \star , Et intelligantur in dictis parallelogrammis circumscriptam, & inscriptam figuram componentibus, constituti cylindrici eiusdem cum cylindricis, ATBC, DEF, altitudinis, & quorum latera ipsorum lateribus congruant, vel sint parallela: hinc enim fiet, ut cylindricus ex illis compositus, qui insistent parallelogrammis figuræ circumscriptæ, comprehendat cylindricum, TBCA, quemadmodum basis basim continet: sicuti cylindricus insistent figuræ inscriptæ à cylindrico, ATBC, pariter comprehenditur. Quod facile ostendi potest. Cylindricus ergo figuræ circumscriptæ superabit cylindricum inscriptæ, cylindricis, qui insistent spatijs, SR, PN, Lk, G α , quæ cum sint parallelogramma, eorumque aggregatum sit minus exposito parallelogrammo, \star , ideo aggregatum ex cylindricis insistentibus spatijs, SR, PN, Lk, G α , hoc est excessus cylindrici figuræ circumscriptæ super cylindricum inscriptæ, minor erit cylindrico, \star , per Lemma 5. antecedens, hoc est minor excessu cylindrici, ATBC, super cylindricum, DEF. Cum ergo cylindricus figuræ circumscriptæ superet cylindricum inscriptæ minori excessu, quam cylindricus, ATBC, superat cylindricum, DEF, sequitur cylindricum, ATBC, (cum sit minor cylindrico figuræ circumscriptæ, quippe qui ab ea comprehenditur, ut supra dicebatur) superare cylindricum figuræ inscriptæ multò minori excessu, quam idem cylindricus, ATBC, superat cylindricum, DEF, Ergo cylindricus figuræ inscriptæ ipsi, ATBC, maior erit cylindrico, DEF, quod tamè absurdum esse sic euincemus. Sit enim eo maior cylindrico in base parallelogrammo, R, æqualis cum prædictis cylindricis altitudinis. Et rursus ut factum est in figura, ATBC, sic fiat circa figuram, DEF, nempe circumscribatur, & inscribatur illi figura ex parallelogrammis æquealtis composita, ita ut circumscripta superet inscriptam spatio minori, quam sit, R. Sit autem circumscripta, quæ componitur ex parallelogrammis, 4 ϕ , α 6 π Z, VF, & inscripta quæ componitur ex parallelogrammis, Δ 6, 3Z, YI; quibus insistant cylindrici eiusdem cum cylindrico, DEF, altitudinis, & quorum latera eiusdem lateribus, vel



congruant, vel sint parallela: hinc enim fiet, vt cylindricus circumscriptæ comprehendat cylindricum, DEF, & cylindricus inscriptæ ab eo comprehendatur. Quoniam ergo cylindricus circumscriptæ superat cylindricum inscriptæ, cylindricis insistentibus parallelogrammis, 4ϕ , $\lambda\Gamma$, $\pi\delta$, VX , quæ bases sunt minores basi, B , ideo circumscriptus cylindricus superabit inscriptum minori excessu, quam sit cylindricus, B , ex Lemmate ant. hoc est quam cylindricus figuræ inscriptæ ipsi, $ATBC$, superat cylindricum, DEF. Ergo circumscriptus ipsi, DEF, cylindricus ipsum cylindricum, DEF, minori excessu superabit, quam cylindricus figuræ inscriptæ ipsi, $ATBC$, superat cylindricum eundem, DEF. Ex quo concludemus cylindricum figuræ inscriptæ ipsi, $ATBC$, maiorem esse cylindrico figuræ ipsi, DEF, circumscriptæ; ergo ex Lemmate ant. figura ipsi, $ATBC$, inscripta maior erit circumscripta ipsi, DEF, & multò maior erit ipsa figura, $ATBC$, circumscripta ipsi, DEF. Sed talis circumscripta hac quoque maior est, cum circumscripta comprehendat ipsam, DEF. Igitur tandem euincemus figuram, $ATBC$, maiorem esse ipsa, DEF, quod est absurdum, cum ponantur æquales. Non ergo cylindricus, $ATBC$, potest esse maior cylindrico, DEF. Sed neque minor, poneretur enim esse maior, DEF, vnde incipiendo circumscriptionem, & inscriptionem à figura, DEF, vt fecimus circa, $ATBC$, & postmodum aliam perficiendo circa, $ATBC$, quam fecimus circa,

circa, DEF, eodem modo idem absurdum aduersario obtruderemus. Cum ergò neuter cylindricorum, ATBC, DEF, altero maior esse possit, superest vt sint æquales. Quod, &c.

COROLLARIUM.

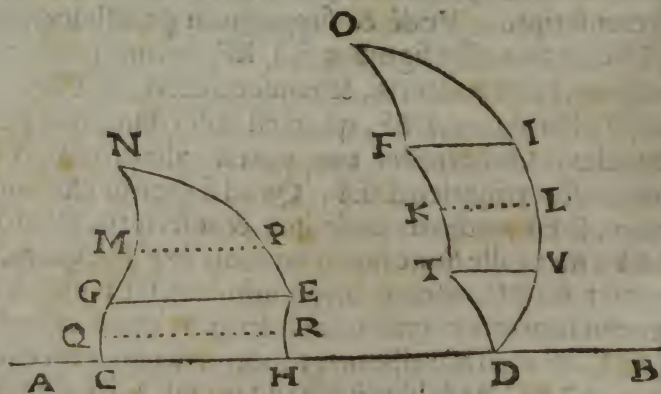
EX præfata demonstratione innotescit, quod si altera datarum basium, vt, ATBC, supponeretur esse parallelogrammum quodcunque æquale figuræ, DEF, facilius ostenderetur cylindricos æquealtos, & in ipsis tanquam in basibus constitutos, fore inter se æquales. Si enim ponatur cylindricus, ATBC, maior cylindrico, DEF, sitque ex. gr. maior cylindrico, cuius basis parallelogrammum, R, eiusdem cum ipsis altitudinis, tunc cylindricum circumscribentes, & inscribentes cylindrico, DEF, vt supra factum est, ita vt circumscriptus superet inscriptum minori excessu, quam sit cylindricus, R, concludemus circumscriptum superare cylindricum, DEF, multò minori excessu, quam sit ipse cylindricus, R, idest, quam superet cylindricus, ATBC, cylindricum, DEF: & ideò cylindricum, ATBC, maiorem esse cylindrico circumscripto. Vndè & suppositum parallelogrammum, ATBC, maius esset figura ipsi, DEF, circumscripta per Cor. Lemmatis antecedentis, & consequenter, ATBC, figura maior esset figura, DEF, quod est absurdum, cum ponantur æquales. Quapropter non potest cylindricus, ATBC, maior esse cylindrico, DEF. Quod si dicatur esse minor, erit maior, DEF, vndè circumscripto, & inscripto cylindrico ipsi, DEF, ita vt ille hunc superet minori excessu, quam, DEF, superet, ATBC, ostendetur, cylindricum, DEF, multò minor, excessu superare cylindricum inscriptum, quam cylindricum ATBC, & ideò inscriptum cylindricum maiorem esse cylindrico, ATBC, ac subindè inscriptam ipsi, DEF, figuram maiorem esse figura, ATBC, per Cor. Lemmatis ant. (quia inscripta figura est ex parallelogramis composita, & ATBC, ponitur esse parallelogrammum) & multò maiorem esse figuram, DEF, ipsa, ATBC, quod est absurdum, cum ponantur æquales. Neque ergò minor esse potest, sed nec maior; ergò

ergò illi æqualis erit. Siue ergò ambæ sint figuræ in alteram partem absolutè deficientes inter se æquales, siue earum altera sit parallelogrammum, colligimus eorum æquealtos cylindricos æquales esse.

L E M M A VII.

Cylindrici æquealti, & in basibus figuris planis æqualibus quibuscunque constituti, quarum vnaquæq; vni regulæ parallelis quocunque lineis, ità secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: inter se sunt æquales.

Sint in duabus quibuscunque æqualibus planis figuris, NGCHE, OTDV, tanquam in basibus constituti cylindrici æquealti. Sumpta autem pro vnaquaque basium pro regula quadam rectæ lineæ (siue quæ diuersæ regulæ illis seruiant, siue vna) vt, AB, vtriusque communis ductæ.



in eisdem figuris quocunque parallelæ in ipsis conceptæ integræ sint. Dico præfatos cylindricos, NGCHE, OTDV, inter se æquales esse. Quoniam ergò hanc habent conditionem, qualem quoq; postulat Lemma 4. Lib. Septimi Geo.

Ind.

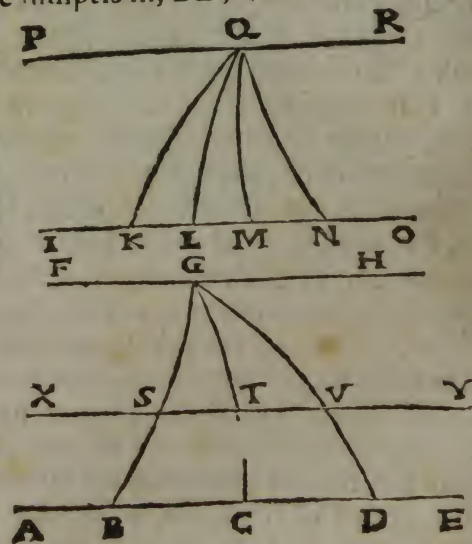
Ind. idèd per ipsummet Lēma poterit, tam figura, $NGCHE$, quam, $OTDV$, per æquidistantes ipsi, AB , scindi in frusta, quæ sint vel parallelogramma, vel figuræ in alteram partem absolutè deficientes (etsi non opus sit hic dicere absolutè, vel non absolutè deficientes, quia loquimur hic de figura solitaria, & non alteri comparata) ut ibi probatur. Eò quod figura, CNH , per GE , parallelā ipsi, AB , sit secta in figuras, GNE , GCH , quarum, GNE , sit in alteram partem deficiens, &, GCH , parallelogrammum curvilineum. Similiter, $OTDV$, per parallelas, FI , TV , ipsi, AB , sit diuisa in frusta, FOI , TDV , in alteram partem deficiētia, &, $FTVI$, parallelogrammum curvilineum. Ponatur autem, NGE , esse maiorem, FOI , & ducatur, MP , parallela, AB , quam supponamus abscindere figuram, MNP , æqualem ipsi, FOI ; similiter si, $FTVI$, non sit æqualis, sed maior, $GMPE$, ducatur, KL , æquidistans, AB , quæ pariter abscindere supponatur, $KFIL$, æqualem ipsi, $GMPE$; & tandem agatur, QR , parallela, AB , constituens spatium, $GQRE$, æquale spatio, $KTVL$, unde $QCHR$, erit æquale spatio, TDV . Erunt ergò quinq; spatia, NMP , $MGEP$, $GQRE$, $QCHR$, æqualia quinque spatijs, OFI , $FkLI$, $KTVL$, TDV , singula singulis sibi respondentibus, & eorum spatiorum quodlibet est parallelogrammum, vel figura in alteram partem deficiens. Ergò si per rectas, QR , GE , MP ; TV , KL , FI , intelligantur extensa plana per latera cylindricorum, NCH , $OTDV$, transeuntia, scindentur per ea dicti cylindrici in cylindricos prædictis decem figurarum frustis insistentes per Prop. 16. Lib. Primi Geo. Ind. & per Lemma ant. cum suo Corollario, erunt cylindrici, NMP , OFI , inter se æquales, cum & basis, NMP , pars figuræ, NGE , in alteram partem deficiētis, sit & ipsa in alteram partem deficiens. Et eadem ratione cylindricus, $MGEP$, ipsi, $FkLI$; $GQRE$, ipsi, $KTVL$, &, $QCHR$, ipsi, TDV , ac tandem totus cylindricus, NCH , toti cylindrico, $OTDV$, æqualis erit. Ergò cylindrici æquales, &c. quod ostendere opus erat.

LEM-

L E M M A V I I I.

Cylindrici æquealti, & in basibus figuris planis quibuscunque constituti, quarum vnaqueq; vni regulæ parallelis quocunque lineis, ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: inter se sunt, vt bases.

Sint in quibuscunque figuris planis, GBC , QkL , tanquã in basibus æquealti cylindrici constituti, & bases sint eiusmodi, vt sumptis ex. gr. regulis, AE , IO , ipsæ parallelæ ductæ in ipsis basibus integræ sint. Dico prædictos cylindricos esse inter se, vt ipsæ bases, GBC , QkL . Extendantur autem, FH , PR , parallelæ ipsis, AE , IO , tangentes ipsas figuras. Deindè sumptis in, BE , quocunque æqualibus ipsi, BC , (ad uerte si figuræ disternerent ad, AE , IO , in puncta, quod tunc pro ipsis, AE , IO , opus esset extēdere inter oppositas tangētes, FH , AE ; PR , IO , duas rectas ipsis parallelas, & in illis perficere, quod in his nunc præstabimus) vt, CD , æquali, BC ; & in, kO , alijs quocunque æqualibus ipsi, kL , vt, LM , MN , intelligemus, CE , ferri versus, FH , semper æquidistanter ipsi, FH , ac, decurrente puncto, C , lineam, CG , interim aliud punctum discedere à, C , versus, E , per rectam, CE , & abscindere à quacunque in, BC , concipiatur

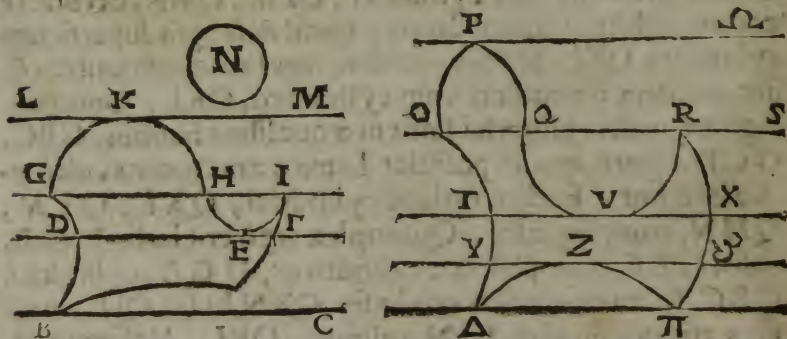


figuris, $G B D$, $Q k N$, conceptæ integræ sunt. Et si illa maior, vel minor est, &c. etiâ cylindricus cylindrico maior, vel minor est, &c. ideò prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam. Nempè vt bases, $G B C$, $Q K L$, ità erunt ipsi cylindrici, $G B C$, $Q K L$, Cylindrici ergò æquealti, & in huiusmodi basibus constituti, inter se sunt vt bases. Quod demonstrare opus erat.

L E M M A IX.

Cylindrici æquealti, & in basibus quibuscunq; planis figuris constituti, inter se sunt vt bases.

Sint duæ quæcunque planæ figuræ, $K B I$, $P \Delta \Pi R$, in quibus tanquam in basibus æquealti cylindrici quomodocunq; intelligantur constituti. Dico eosdem inter se esse, vt dictas bases. Tangant easdem figuras planas rectæ, $A B C$, $\Delta \Pi$,



quæ tanquam regulæ sumantur, quibus concipiantur duæ parallelæ quæcunque partem ambitus earundem tangere possunt, vt in figura, $k B I$, rectæ, $D E r$, $G H I$, $L k M$, & in figura, $P \Delta \Pi R$, rectæ, $Y Z$, $T V X$, $O Q R S$, $P \Omega$, per quas seindentur in frustra, in quibus duæ quæcunq; ipsis regulis, $A C$, $\Delta \Pi$, parallelæ integræ erunt. Si enim aliqua non esset integra, bis saltem posset ambitui figuræ interius occurrere, vnde posset duci tangens portionem ambitus illis duobus occurribus interceptam, per Lemma 3. Prop. Primæ Lib. Septimi

ptimi Geo. Ind. ponuntur autem ductæ quæcunque sunt ut
 hæc ducibiles, ergò non alia duci potest, & reliquæ in frustis
 ductæ integræ erunt. Estò igitur quod figura, KBI , in talia
 frusta quatuor secta fuerit, quæ sint, KGH , $GDEH$, IER ,
 DEr : & figura, $P\Delta nR$, in frusta sex, nempe, POQ , $OTVQ$,
 $R VX$, $TYZ \& X$, $Y \Delta Z$, $Zn \&$. Traiectis ergò planis per re-
 ctas, Dr , GI , $TZ \&$, TVX , $OQR S$, & per latera cylindri-
 corum, KBI , $P\Delta nR$, secabuntur & ipsi cylindrici in cylin-
 dricos prædictis frustis, tanquam basibus, insistentes. Expo-
 natur verò seorsim figura plana, quæcunque, N , sed talis
 conditionis, qualem postulat Lemma antecedens: in qua cy-
 lindricus eiusdem altitudinis cum prædictis constitutus in-
 telligatur. Ergò per lemma antecedens cylindricus, KGH ,
 ad cylindricum, N , erit, ut basis, KGH , ad, N . Similiter
 cylindricus, $GDEH$, ad, N , erit, ut, $GDEH$, ad, N . Et ea-
 dem ratione ostendemus cylindricum, IER , ad, N , esse, ut,
 IER , ad, N ; ut & cylindricum, DEr , ad, N , esse, ut, DEr , ad,
 N . Undè per 24. Quinti Elem. concludemus hos quatuor
 cylindricos, hoc est cylindricum, KBI , ad cylindricum, N ,
 esse ut basim, KBI , ad, N . Erit verò cylindricus, N , ad cy-
 lindricum, OPQ , ut basis, N , ad basim, OPQ ; & idem
 ad cylindricum, $OTVQ$, ut eadem basis, N , ad basim,
 $OTVQ$, & sic conferendò cylindricum, & basim, N , cum
 reliquis cylindricis, æ eorum basibus, quæ sunt reliqua
 frusta figuræ, $P\Delta nR$, nempe, $R VX$, $TYZ \& X$, $Y \Delta Z$,
 $Zn \&$, tandem concludemus cylindricum, N , ad hos om-
 nes cylindricos, seu ad integrum cylindricum, $P\Delta nR$, esse,
 ut, N , ad figuram, $P\Delta nR$. Sed & cylindricus, KBI , ad
 cylindricum, N , ostensus est esse, ut figura, KBI , ad fi-
 guram, N . Ergò ex æquali cylindricus, KBI , ad
 cylindricum, $P\Delta nR$, erit, ut basis, KBI , ad
 basim, $P\Delta nR$. Cylindrici ergò æque-
 alti, & in basibus quibuscumque
 planis figuris constituti,
 inter se sunt, ut
 bases.
 Quod ostendere co-
 pus erat.

SCHOLIUM.

HOc ostenso, nequaquam mihi prætereundum videtur, si quilibet cylindricus plano secetur oppositis basibus æquidistante, posse demonstrari sectas partes esse inter se, ut partes lateris cylindrici, quæ insimul per idem planum secantur. Hoc enim ad modum, quo ostenditur Prop. 13. Duodecimi Elem. de cylindricis, facile obtinebitur per æque multiplicium sectarum partium sumptionem: & per hanc veritatem, quæ ex hoc ant. Lemmate pendet, nempe, quod æquealti cylindrici, & in eadem, vel æqualibus basibus constituti inter se sunt æquales. Hoc autem, cum facile demonstratu sit, à me brevitatis causa hic præmittitur, & tanquàm demonstratum recipitur. Ex quo denique colligi posset quoscunque cylindricos in eadem, vel æqualibus basibus stantes, esse inter se, ut eorundem altitudines.

COROLLARIUM.

EX hoc ergò Lemmate patet posteriorem partem Propositionis Primæ Libri Septimi, ut & Propositionem tertiam eiusdem Libri, quoad cylindricos veram esse.

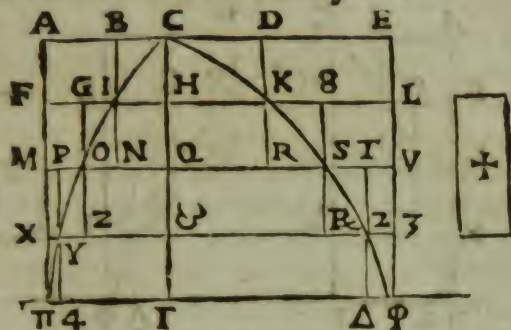
XXI.

Hucusque cylindricis iuxta hanc rationem satisfactum est. Ut verò innotescat posteriorem partem Propositionis Primæ Lib. Septimi, & Prop. 3. etiam iuxta hunc modum verificari circa alia solida, & præcipuè circa illa, quæ in dicta Geometria Ind. ut plurimum considerantur, subsequentiæ quoque Lemmata, & Annotationes hic super adduntur.

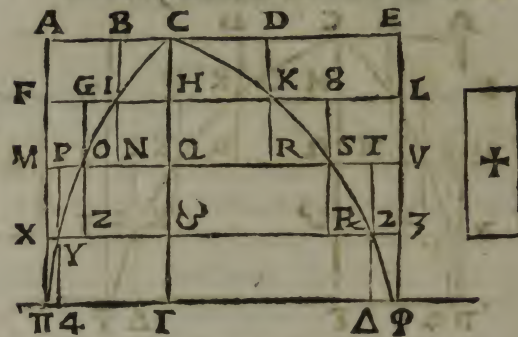
LEMMA X.

Solida quæcumq; proportionaliter analogæ iuxta regulas bases, quibus figura ex cylindricis æquealtis cōposita circumscribi, & alia inscribi potest; ita ut circumscripta superet inscriptam oblato quocumque solido: inter se sunt ut bases.

Sint



Sint duo quæcunque solida proportionaliter analoga, $\pi r, r\phi$, iuxta regulas bases, $\pi r, r\phi$, (etenim ad figuræ confusionem euitandam per lineas plana intelligemus, & per has figuras planas ipsa corpora) quæ sint inter eadem opposita tangentia plana, $AE, \pi\phi$. Concipiantur autem constituti cylindrici in eisdem basibus, $\pi r, r\phi$, ac in eadem cum solidis altitudine, nempe, Ar, rE , & sit possibile solidis, $C\pi r, r\phi$, figuram circumscribere, & inscribere, &c. ut supra propositum est. Dico præfata solida esse inter se, ut bases, $\pi r, r\phi$. Quod ut concludatur, probandum erit cylindricum, Ar , ad solidum, $C\pi r$, esse ut cylindricus, Er , ad solidum, $C r\phi$. Nisi ergo ita sit, erit ut Er , ad $C r\phi$, ita, Ar , ad, $C \pi r$, addito, vel dempto ab eodem aliquo solido: Sit primum addito solido, ϕ . More solito autem circumscribatur solido, $C \pi r$, figura ex cylindricis æquealtis composita, quæ sint, $BH, GQ, P\&, \lambda r$, & alia inscribatur ex, $IQ, O\&, Yr$, pariter composita, ita ut circumscripta superet inscriptam minori excessu, quam est solidum, ϕ : igitur circumscripta superabit solidum, $C \pi r$, minori solido, quam, ϕ , ergo circumscripta minor erit solido, $C \pi r$, cum solido, ϕ , unde cylindricus, Ar , habebit maiorem rationem ad figuram circumscriptam, quam ad solidum, $C \pi r$, cum solido, ϕ , hoc est, quam cylindricus, Er , ad solidum, $C r\phi$. Nunc ipsi solido, $C r\phi$, circumscribatur figura ex cylindricis eiusdem altitudinis cum prædictis, totque numero, quot iidem, composita, constans ex cylindricis, $Ck, HS, Q2, \&\phi$. Extensis verò hinc inde horum cylindricorum basibus, secantur cylindrici, Ar, rE , in æquealtos cylindricos, $AH, FQ, M\&, \lambda r$,



Xr, CL, HV, Q₃, &*. Quoniam ergo solida, Cπr, Cr*, supponuntur esse proportionaliter analogia iuxta bases, πr, r*, erit vt, πr, ad, π*, ita, IH, ad, HK, & ita etiam est, FH, ad, HL, ergo erit, FH, ad, HL, vt, IH, ad, HK, & per mutando, FH, ad, HL, erit, vt, LH, ad, HK. Sed vt, FH, ad, HI, ita est cylindricus, AH, ad, BH; & vt, LH, ad, HK, ita est cylindricus, EH, ad, HD, per Lemma 9. antecedens, quam sunt cylindrici æquealti: ergo cylindricus, AH, ad, HB, erit, vt cylindricus, EH, ad, HD. Eadem ratione ostendemus cylindricos, FQ, QL, ad, GQ, Q₈, eandem rationem habere, & sic de reliquis, &c. Et tandem concludemus cylindricos, AH, HM, M&, &π, hoc est cylindricum, Ar, ad figuram circumscriptam eandem rationem habere, quam cylindricos, CL, LQ, Q₃, 3r, hoc est cylindricus, Er, ad figuram solido, Cr*, circumscriptam. Sed cylindricus, Ar, ad figuram circumscriptam maiorem rationem habere superius ostensum est, quam cylindricus, Er, ad solidum, Cr*, ergo cylindricus, Er, ad figuram circumscriptam solido, Cr*, maiorem rationem habebit, quam ad solidum, Cr*, quare figura circumscripta solido, Cr*, ipsomet, Cr*, minor erit, sed est eodem maior, cum ipsum comprehendat, erit ergo eodem solido & minor, & maior, quod est absurdum. Non ergo cylindricus, Ar, habet eandem rationem ad solidum, Cr*, (addito illi aliquo solido) quam cylindricus, Er, ad solidum, Cr*. Dico neque, dempto ab eo aliquo solido, habere eandem rationem, &c. Si enim fieri potest, sit illud idem solidum, *, & denuò circūscribatur, & inscribatur ipsi, Cπr, figura, &c. deseruiantq; eadem descriptæ. Tunc ergo cum circumscri-

pra

pta superet inscriptam minori solido, quam est, \star ; ipsum solidum, $C\pi r$, superabit inscriptam multò minori solido, quam sit, \star , ergò inscripta erit maior solido, $C\pi r$, ab eo dempto, \star , vnde cylindricus, Ar , ad figuram inscriptam minorem rationem habebit, quam ad solidum, $C\pi r$, dempto, \star , hoc est, quam cylindricus, Er , ad solidum, $Cr\phi$. Denique inscripta solido, $Cr\phi$, figura ex cylindricis, HR , QR , & Δ , composita, quæ sint eiusdem altitudinis, & alijs tot, quot componentes inscriptam solido, $C\pi r$, ostendemus vt suprà fecimus circà circumscriptas, cylindricum, Ar , ad figuram solido, $C\pi r$, inscriptam esse, vt cylindricus, Er , ad inscriptam ipsi, $Cr\phi$. Sed cylindricus, Ar , ad figuram solido $C\pi r$, inscriptam minorem rationem habere ostensum est, quam cylindricus, Er , ad solidum, $Cr\phi$; ergò idem cylindricus, Er , minorem rationem habebit ad figuram solido, $Cr\phi$, inscriptam, quam ad ipsum solidum, $Cr\phi$, igitur figura illi inscripta eodem solido maior erit, sed etiam eo minor est, cū sit inscripta, ergò eodem maior, & minor esset, quod est absurdum. Non ergò cylindricus, Ar , ad solidum, $C\pi r$, habet eandem rationem, quam cylindricus, Er , ad solidum, $Cr\phi$, addito, vel detracto à solido, $C\pi r$, aliquo solido. Ergò cylindricus, Ar , ad solidum, $C\pi r$, erit, vt cylindricus, Er , ad solidum, $Cr\phi$, & permutando cylindricus, Ar , ad cylindricum, rE , erit, vt solidum, $C\pi r$, ad solidum, $Cr\phi$, sed cylindrici, Ar , rE , inter se sunt vt bases, πr $r\phi$, per Lemma 9. antecedens. Igitur & ipsa solida, $C\pi r$, $Cr\phi$, erunt inter se, vt dictæ bases, πr , $r\phi$. Ergò solida quæcunque proportionaliter analogæ, &c. inter se sunt, vt bases. Quod ostendere propositum erat.

DEFINITIO.

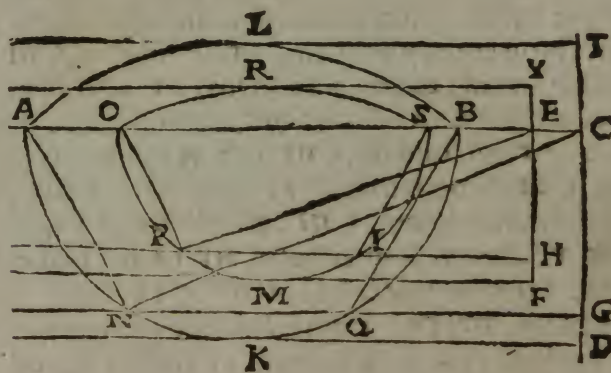
Figuram planam ordinatam voco, quæ sub ambitu eius rationis continetur, vt si in eo duo quælibet puncta sumantur, rectæ eadem iungentis nihil cadat extrâ figuram.

LEM.

L E M M A X I.

SI exposita quacunque figura plana ordinata, in eaque ducta qualibet recta linea, vsq; ad illius ambitum hinc indè terminata, ab eadem linea quæcumque portio abscindatur, à qua tanquam à prædictæ homologa similis, similiterq; figura descripta supponatur: prior figura posteriorem cōprehendet.

Sit exposita quæcunque figura plana ordinata, $A K B L$, in qua ducatur recta, AB , & ab ea sit abscissa quæcumque portio, OS , à qua tanquam ab homologa supponatur descripta similis, similiterq; posita figura, $ROMS$. Dico figuram,

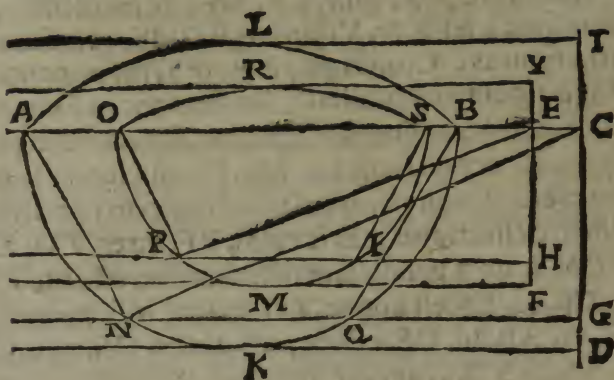


$AkBL$, figuram, $OMSR$, comprehendere. Vt hoc probetur ostendemus nihil figuræ, $ROMS$, esse extra figuram, $LAKB$, ad quod sufficiet demonstrare nullū punctum ambitus eiusdem, $ROMS$, esse extrā figuram, $LAKB$, patebit namq; subindè nihil figuræ, $ROMS$, posse extrā, $LAKB$, reperiri. Sumatur ergò in ambitu, $ROMS$: quodcunque punctum, vt, P , dico ipsum esse in figura, $LAKB$. Sint figuræ, $LAKB$, oppositæ tangentes, quæ sunt regulæ homologarum, ipsæ, LT , KD ;

KD; & ipsius, ROMS, ipsæ, RY, MF; ac incidentes, TD, quidem ipsius, LAkB, & YF, ipsius, ROMS, quæ sunt assumptæ extra figuras. Cum ergo, AB, OS, supponantur duæ homologæ figurarum similium, similiterque positarum, LAkB, ROMS, secabunt similiter suas incidentes, ut in punctis, E, C, per, D, definitionis 10. Lib. Primi Geom. Ind. quæ incidentes erunt, non coextensæ, sed inuicem parallelæ per, D, eiusdem definitionis. Erit enim, YF, inter, TD, & figuram, ROMS, quia per dictam definitionem est, ut, TD, ad, YF, ita, CB, ad, ES, est autem, TD, maior, YF, nam est, TD, ad, YF, ut, AB, ad, OS, estque, AB, maior, OS, ergo, CB, erit maior, ES, cū S, B, erunt idē punctum, & multo maior erit, CS, ipsa, ES, cum punctum, S, ut figura ostendit, erit aliud à puncto, B; ergo, YF, cadet intrā figuram, ROMS, & ipsam, TD, cum incidentes extrā figuras assumptæ supponantur, & sint ad eandem partem figurarum, quia illæ sunt similiter positæ. Patet ergo ex dictis, YF, non extendi super, TD, sed illi esse parallelam, ut dixi. Per punctum autem, P, rursus producat, PH, usque ad incidentem, YF, quam secet in, H, ambitum verò in, I. Sit etiam ducta, NQ, in figura, LAkB, parallela ipsis, LT, KD, regulis homologarum, & subinde ipsis, RY, MF, (quia figuræ sunt similiter positæ) hoc est ipsi, PI, cui sit homologa, quæ & producat, usque ad incidentem, TD, in, G. Per dictam ergo definitionem 10. ipsæ, TD, YF, secabuntur in punctis, G, H, similiter ad eandem partem, unde erit ut, TG, ad, GD, ita, YH, ad, HF, & componendo, ac permutando, TD, ad, YF, ut, GD, ad, HF. Eodem modo ostendimus, TD, ad, YF, esse ut, TC, ad, YE, nam, TD, YF, similiter ad eandem partem secantur in punctis, E, C, ut dictum est. Ergo ut, TD, ad, YF, ita erit compositum ex, TC, GD, ad compositum ex, YE, HF, ergo ut, TD, ad, YF, ita erit residuum, CG, ad residuum, EH. Est autem, TD, maior, YF, ergo & CG, ipsa, EH, maior erit, ergo punctum, P, cadet intrā parallelas, AC, NG. Iungantur nunc puncta, A, N, O, P, rectis, AN, OP, quas dico esse inter se parallelas. Ducantur verò, PE, NC. Erit ergo ut, TD, ad, YF, ita, NG, ad, PH, per dictam definitionem decimam, sed ut, TD, ad, YF, ita probatum est esse, CG, ad, EH, ergo ut, CG, ad, EH,

T

ita



ita erit, NG , ad PH , & permutando. CG , ad GN , erit vt EH ,
 ad HP , & sunt circa æquales angulos, CGN , EHP , (quia ex
 definitione incidentium ipsæ incidentes cum homologis, seu
 cum regulis homologarum, faciunt æquales angulos ex ea-
 dem parte) latera proportionalia, ergò per 6. Sexti Elem.
 æquiangula erunt triangula, CGN , EHP , ac similia, & æqua-
 les erunt anguli, GCN , HEP ; vnde, ACN , OEP , æqualium,
 ACG , OEH , residua æquales erunt. Sed & circa hos esse
 latera proportionalia sic ostendemus. Est enim, AC , ad,
 OE , vt, TD , ad, YF , seu, vt, CG , ad, EH , & permutando, AC ,
 ad CG , vt, OE , ad, EH , estque, GC , ad, CN , vt, HE , ad, EP ,
 propter similitudinem triangulorum, CGN , EHP , iam osten-
 sam. Ergò ex æquali, AC , ad, CN , erit vt, OE , ad, EP , & sunt
 anguli, ACN , OEP , æquales, ergò triangula, ACN , OEP ,
 erunt æquiangula, & æquales erunt anguli, CAN , EOP , vn-
 de rectæ, AN , OP , parallelæ erunt. Sicuti si punctum, O ,
 identificaretur ipsi, A , maneret probatum, OP , extendi super,
 AN . Ità vt quicumque sit casus, vel, OP , crit parallela ipsi,
 AN , vel illi coextensa. Est autem, AN , non extrà figuram,
 $LAKB$, est enim figura ordinata, ergò linea, OP , & subindè
 punctum, P , non erit extrà figuram ex parte, AN . Eodem
 modo iunctis, SI , BQ , ostendemus punctum, I , nò exire ex-
 trà figuram, $LAKB$, versus, BQ , ergò multò minus punctum,
 P , exibat extrà figuram, $LAKB$, versus, BQ , & est intrà paral-
 lelas, AB , NQ , ergò, P , nusquam è figura, $LAKB$, egredi po-
 test,

rest, igitur vel erit in ambitu eiusdem, vel intra ambitum. Currit autem demonstratio etiam si, PI , non secet, sed tangat figuram, $ROMS$, tunc verò & NQ erit tangens, ut ex dicta definitione facile elici potest: sicuti etiam valet si pro duobus punctis, seu recta tangente, PI , vnum tantum esset punctum contactus, illud enim ex nulla parte extra figuram, $LAKB$, exire posse eodem modo ostenderemus. Et quod de puncto, P , idem de quibuscunque alijs punctis, quæ in ambitu, $LAKB$, sumi possunt eadem ratione probaretur. Ergò nullum punctum ambitus eiusdem figure, $ROMS$, & subinde nihil illius poterit esse extra figuram, $LAKB$. Est autem maior, $LAKB$, ipsa, $ROMS$, quia, AB , est maior, OS , & per Prop. 15. Lib. Secundi Geo. Ind. restauratam in Annot. Prop. 5. Lib. Septimi, sunt ipsæ figuræ, $LAKB$, $ROMS$, in duplicata ratione ipsarum, AB , OS . Ergò, $LAKB$, necessariò ipsam, $ROMS$, comprehendet.

L E M M A XII.

SI exposita quacunque plana figura in basi recta linea, in ea sit quoque parallelogrammum eidem circumscriptum: Rectæ verò in figura ducibiles parallelæ basi integræ sint, & parallelæ lateribus parallelogrammi basi insistentibus, indefinitè productæ nonnisi semel ambitui figuræ occurrant: Et à basi descripta supponatur quæcunque figura ordinata, & erecta, vel inclinata plano expositæ figuræ. Solida ad inuicem similia genita ex parallelogrammo, & proposita figura iuxta regulam descriptam à basi figuram ordinatam, erunt inter se, ut alia duo quæcunq; solida, ad inuicem similia genita ex eisdem iuxta regulam quæcunq; aliam figuram ordinatam ab eadem basi descriptam.

T 2

Videatur

duo solida similia genita ex parallelogrammo, AR , cylindrici, quod probabitur eodem modo, quo hoc demonstratur in Prop. 34. Lib. Geo. Ind. vice omnium figurarum substitutis quocunque figuris, &c. Dico solido simili genito ex, CNR , tam iuxta regulam triangulam æquilaterum, quam quod fit iuxta regulam pentagonum descriptum à, NR ; figuram ex cylindricis æquæ altis circumscribi, & aliam inscribi posse, ita, ut circumscripta superet inscriptam excessu quovis oblato solido minore. Ductis enim planis parallelis altitudinem ipsorum solidorum, ut CR , & ipsius residua, ut moris, est bissecantibus, quemadmodum in dicto Lemmate 10. effectum est, & ut in schemate conspicitur, manifestum est deueniri posse ad cylindricum, ut, XR , minorem proposito solido, ut ipso, ✱. Pariter ex dictorum planorum sectione fiant duæ figuræ planæ, una quidem circumscripta spatio, CNR , & alia eidem inscripta, ut apparet in figura: namque æquidistantes ipsi basi, NR , in ipsa figura, CNR , integræ sunt, & æquidistantes ipsis, CR , NA , non nisi semel occurrunt ambitui, NC , ita ut lineæ, $4Y, ZO, NI$, non sint extrâ, &, PY, GO, BI , non sint intrâ figuram, CNR ; vnde figura ex parallelogrammis, $BH, GQ, P\&, XR$, composita est circumscripta; & ex parallelogrammis, $Yr, O\&, IQ$, est inscripta spatio, CNR . Si ergo regula triangulo æquilatere descripto à, NR , intelligentur solida similia genita ex parallelogrammis, $BH, GQ, P\&, XR$, figuræ circumscriptæ; & his similia solida genita iuxta eandem regulam, ex parallelogrammis inscriptæ; ista similia solida erunt cylindrici, ut superius ex Prop. 34. Lib. Secundi Geom. Ind. indicatum est. Cylindrici ergo figuræ circumscriptæ superabunt cylindricos inscriptæ, cylindrico, XR , namq; cylindricus, BH , æquatur ipsi, IQ & GQ , ipsi, $O\&$, & $P\&$, ipsi, Yr , qui tandem cum residuo ipsius cylindrici, XR , componit ipsum cylindricum, XR . Superabit ergo solidum circumscriptum ipsum inscriptum cylindrico, XR , hoc est minori excessu, quam sit solidum, ✱. Quod verò compositum ex cylindricis figuræ circumscriptæ spatio, CNR , sit circumscriptum, ac comprehendat solidum simile genitum ex, CNR , compositum verò ex cylindricis figuræ inscriptæ sit inscriptum, ac comprehendatur ab eodem solido,

COROLLARIUM I.

EX hoc manifestum est posteriorem partem Propositionis Primæ Libri Septimi, vt & Prop. Tertiam eiusdem Libri, etiam quoad huiusmodi solida similia verificari, quæ gignuntur ex figura habente conditiones ipsius, $C\Pi\Gamma$. Has verò habent ferè omnes figuræ in Lib. Secundo consideratæ, cum sint triangula, vel trapezia, quæ sunt parallelogrammis (quos patet gignere cylindricos, & de quibus iam dictum est) inscriptibilia. Similiter huiusmodi sunt figuræ assumptæ in Lib. 3. 4. & 5. cum plerumque sint circuli, vel sectiones conicæ, aut earum portiones, &, $C\Gamma$, $\Gamma\Pi$, vel sint bases, aut diametri earundem, seu ipsis æquidistantes.

COROLLARIUM II.

Quæcunque ergò ex illis supponatur esse, $C\Pi\Gamma$, cum ostensa fuerit ratio alicuius solidi similis geniti ex, $A\Gamma$, ad simile genitum ex, $C\Pi\Gamma$, iuxta regulam figuram à basi, $\Pi\Gamma$, descriptam (vt si, $\Pi\Gamma$, describat quadratum, ostensa ratione solidi similis geniti ex, $A\Gamma$, hoc est quadrati solidi ipsius, $A\Gamma$, vt illud voco Lib. 7. Prop. 11. ad def. A, & Propos. 21. ad solidum sibi simile genitum ex, $C\Pi\Gamma$, iuxta eandem regulam quadratum ipsius, $\Pi\Gamma$, hoc est ad quadratum solidum figuræ, $C\Pi\Gamma$,) illicò per hoc Lemma patet eandem rationem habere quæcunque alia solida ad inuicem similia genita ex iisdem figuris, iuxta regulam quæcunque figuram ordinatam descriptam à, $\Pi\Gamma$. Modo ei, qui dictam Geometriam Indivisibilium perlustrarit, manifestum fiet in methodo Indivisibilium consuetum semper esse reperire, quam rationem habeant omnia quadrata, $A\Gamma$, ad omnia quadrata, $C\Pi\Gamma$: Et in Lib. 7. vice proportionis omnium quadratorum, quæri proportionem quadrati solidi, $A\Gamma$, ad quadratum solidum, $C\Pi\Gamma$, iuxta regulam, semper intellige, quadratum, $\Pi\Gamma$. Vndè in omnibus illis transferri poterit inuenta ratio ad quæcunque alia solida ad inuicem similia genita ex iisdem figuris (quarum altera est semper parallelogram-

leogrammum) iuxta regulam figuram quamcunque ordinatā à basi figuræ descriptā, vt & sup. in Notis. Quæ omnia facilè patet etiā verificari, si vice figuræ, $\Pi C r$, cōem angulū, $C r \Pi$, cum parallelogramo habentis, eligeretur figura, vt $\Pi C \phi$, in basi, $\Pi \phi$, cui esset circumscriptum parallelogramum, vt, $A \phi$, reliquas habens conditiones superius enarratas. Nempè si esset semicirculus, vel semi ellipsis, parabola, hyperbola, vel eorum portio, &c. eadem pro ipsis quoque subintelligi deberent.

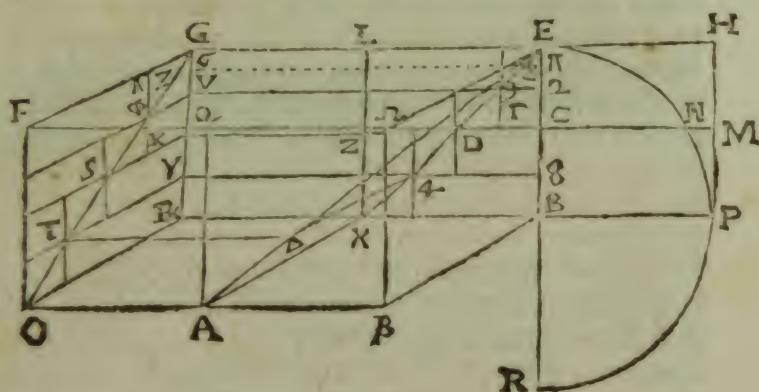
A N N O T A T I O I.

HIs intellectis superest, vt explicetur quomodo quadratorum solidorum duarum figurarum, quales in eodem schemate supponuntur, $A r$, $C \Pi r$, proportio per hic ostensa, seu per ea, quæ in Libro Septimo non pendent neque à Methodo Indivisibilium, neque à posteriori parte Propositionis primæ, seu à Propositione tertia eiusdem Libri haberi possit. Prius ergò, $C r$ supponatur esse recta linea, vt $C \Pi r$, sit triangulum rectilineum. Si ergò à, Πr , describatur quaecunq; triangulū, & quomodocunq; plano, $A r$, inclinatum, solidum simile genitum ex, $A r$, erit prisma basim habens triangularem; & genitum ex triangulo, $C \Pi r$, communi regula triangulo factò à, Πr , erit pyramis, quod ex Prop. 34. Lib. pr. vt superius in Lemmate 12. dicebatur, elici potest. Sed ex Duod. Elem. Prop. 7. dictū prisma triplum est dictæ pyramidis, & ex ostensis quoque in Exerc. ant. num. 17. ergò & quæcunq; solida similia ex iisdem genita, iuxta communem regulam figuram quamcunque ordinatam à, Πr , descriptam, sic se habebunt. Vndè nedum quadratum solidum ipsius, $A r$, triplum erit quadrati solidi ex, $C \Pi r$, geniti, vt hic probare intendimus, sed & quilibet cylindricus genitus ex, $A r$, triplus erit pyramidis genitæ ex triangulo, $C \Pi r$; in basi communi regula figura descripta à basi, Πr , iisdem existentibus. Immo & quicunque alius cylindricus in eadem basi, & altitudine cum prædicto (cum sit illi æqualis per Lemma 9.) illius pyramidis triplus erit.

ANNO-

ANNOTATIO II.

Non sit verò, $C\pi$, recta linea, sed quæcunque alia ex consideratis in Libro 3. 4. & 5. Geo. Ind. hoc est circuli circumferentia, vel conisection, videndum ergò remanet quomodo haberi possit proportio quadrati solidi, AF , ad quadratum solidum genitum ex, $C\pi r$. Sufficiet verò hoc in vna Propositione declarare, etenim in reliquis eiusdem conditionis similem procedendi modum adhibendum



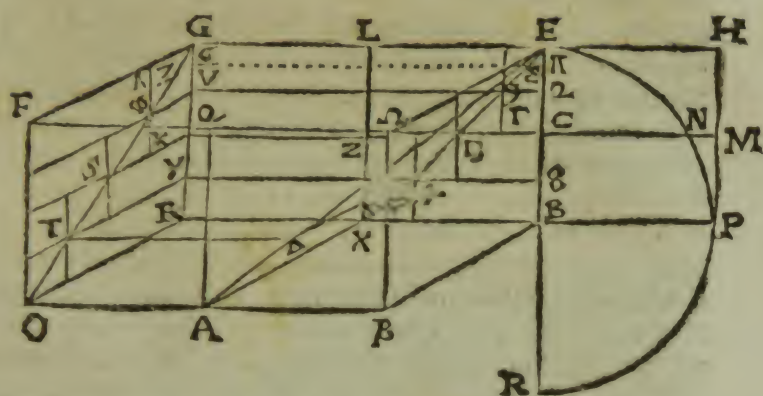
esse intelligemus. Assumatur ergò Schema Prop. 20. Lib. 7. Geo. Ind. circa quod videbimus quomodo haberi possit ratio quadrati solidi, HB , ad quadratum solidum semiportionis circuli, vel ellipsis, EPB , regula, BP . Supponatur autem hic quoque illius constructio, immò videns prius Lector illam Proposit. ex ea intelliget rectangulum solidum sub parallelogrammis, GX , XE , in circulo esse æqualiter, & in ellipsi, proportionaliter analogum quadrato solido, HB , regula, BP . Et rectangulum solidum sub trapezio, $GKXE$, & triangulo, EXB , regula eadem, BP , in circulo esse æqualiter, in ellipsi verò, proportionaliter analogum quadrato solido, EBP . Ibi enim ostenditur ex gr. rectangulum, QZC , æquari quadrato, CM , seu, in ellipsi, ad illud esse, vt rectangulum, RXB , ad quadratum, BP . Similiterque rectangulum, QDC , probatur æquari quadrato, CN ; in ellipsi verò, esse

V

ad il-

ad illud, ut rectangulum, $\mathcal{R}XB$, ad quadratum, BP . Ex quibus concluditur ea esse ut bases per posteriorē partem Propositionis primæ, & ideo rectangulum solidum sub, $G X$, $X E$, ad rectangulum solidum sub trapezio, $G \mathcal{R} X E$, & triangulo, EXB , infertur esse, ut quadratum solidum, HB , ad quadratum solidum, EBP , cum reliquis, quæ ibidem habentur. Verum quia hæc 4. solida æqualiter, seu proportionaliter analogæ, esse proportionalia, probatur ex posteriori parte Prop. primæ, & ex Prop. tertiæ, ideo opus est hoc aliter nunc confirmare. Ut ergo id fiat, & ut melius dicta rectangula solida intelligantur (quorū definitio habetur in hac Exercit. nu. 5.) supponamus descriptū solidū parallelepipedū, $G \mathcal{B}$, in basi rectangulo, OB , recto, vel inclinato ipsi, GB , & contento sub, $\mathcal{R}B$, &, $B\beta$, æquali ipsi, EB , seu, BX , eiusdemq; altitudinis cum semiportione, EBP . Per, X , verò extensum planum, LA , æquidistans ipsi, GO , secet parallelepipedum, $G \mathcal{B}$, in duo parallelepippeda, GA , AE , & iungantur, OG , AE . Intelligemus autem per dictam definitionem parallelepipedum, GA , esse rectangulum solidum sub, $G X$, $X E$, nam sicuti rectangulum, OX , continetur sub, $\mathcal{R}X$, XA , seu, XB , nam AB , est quadratum, ita, eo planis ipsi, $\mathcal{R}A$, parallelis quomodocunque secto, quæ fient in ipso rectangula (erunt enim similia, & similiter posita ipsi, $\mathcal{R}A$, per Cor. Prop. 12. Lib. pr. eiusdem Geo. Ind.) continebuntur sub parallelis ipsi, $\mathcal{R}B$, in, $G X$, $X E$, figuris per dicta plana designatis. Eadem ratione innotescet solidum in basi, $\mathcal{R}A$, duobusq; triangulis, $GO \mathcal{R}$, EAX , & duobus trapezijs, $GOAE$, $G \mathcal{R} X E$, conclusum, esse rectangulum solidum sub trapezio, $G \mathcal{R} X E$, & triangulo, EXB , regula cum præfato solido communi existente basi, $\mathcal{R}A$, seu rectis, OR , $\mathcal{R}B$; quia latera continentia rectangula in ipso ab æquidistantibus ipsi, $\mathcal{R}A$, planis producta sunt in trapezio, $G \mathcal{R} X E$, & triangulo, EXB . Estò enim quod ab vno quocunque dictorum planorum fiat in solido, $GO \mathcal{R} E$ AX , figura, $YT \Delta 4$. Quoniam ergò, TY , $\Delta 4$, ipsis, OR , AX , &, $T \Delta$, $Y 4$, ipsis, $\mathcal{R}X$, OA , parallelis æquidistant, illæ erunt inter se parallelæ, æqualesq; angulos subiectis angulis, hoc est rectos continebunt, per Prop. 10. Undec. Elem. ergò, $Y \Delta$, erit rectangulum contentum sub, $Y 4$, 4Δ , seu 48, nam istæ

acæ-



adæquantur, cum eandem habeant rationem ad æqua les
 AX, XB, nempe quam habet, 4E, ad, EX, vt ex Proposit. 4.
 Sexti Elem. elici potest. Ergo iuxta demonstrata in dicta
 Prop. 20. Septimi Libri Geo. Ind. solidum, GOB EAX, erit
 in circulo æqualiter, & in ellipsi proportionaliter analogum
 quadrato solido, EBP. Sicuti, GA, rectangulum solidum
 sub, GX, XE, erit æqualiter, vel proportionaliter analogum
 quadrato solido, HB, ad illudque, vt rectangulum, R, XB, ad
 quadratum, BP, per Lemma 9. quia sunt æquealti cylindrici,
 & ideò inter se vt bases, quod serua. Reliquum est vt ad rem
 nostram probemus solida, GOB EAX, & quadratū solidum,
 EBP, inter se esse vt bases. Hoc verò illicò patebit si osten-
 damus illis conuenire posse, quod postulat Lemma 10. quod
 hac ratione nunc demonstrabimus. Sit seorsim positū quod-
 cunq, solidum, quod vocetur, ✱, oportet ostendere præ-
 fatis solidis circumscribi, & inscribi posse figuram ex cylin-
 dricis æquealtis compositam, ita vt circumscripta superet
 inscriptam minori excessu, quam est, ✱. Ducantur more
 solito plana ipsi, OB, æquidistantia, quibus secerur paralle-
 lepipedum, GB, in parallelepippeda æqualis altitudinis,
 quorum vnumquodque, & subindè, YB, vnum ex illis, sit
 minus, ✱. Estò autem quod dicta plana insimul secue-
 rint rectas, GO, GB, EX, EB, in punctis, ✱, S, T; V, Q, Y; 3,
 D, 4; 2, C, 8, & per puncta, ✱, S, T; 3, D, 4, producantur ipsi,
 GB, æquidistantes rectæ lineæ vsq; ad proximas hinc indè
 V 2 paralle-

parallelas à secantibus planis in ipsis figuris, FB' , BE , designatas, ut in schemate apparet: quibus triangulo, GOB , & trapezio, $GBXE$, erit circumscripta, & inscripta figura ex parallelogrammis æquealtis composita. Manifestum est ergò quod, si compleretur parallelepipedum, seu solidum rectangulum, cuius habemus duas facies, $\phi G, VE$, hoc est si fieret rectangulum solidum, sub, $\phi G, VE$, (hoc verò non fit, ut neq; in reliquis eiusdem rationis figuris, nempe non compleretur figura circumscribenda, & inscribenda solido, GOB, EAX , ad confusionem in schemate evitandam, quas mente tanquam descriptas apprehendere sufficiet) comprehenderet rectangulum solidum sub triangulo, ϕGV , & trapezio, EGV_3 . Traiecto enim in his solidis ubicunque plano ipsi, BA , parallelo, ut faciente ex.gr. rectas, $\pi z 6, 67A$, perspicuum est, cum, $z 6$, sit portio ipsius, 6π , & 76 , ipsius, $6A$, rectangulum sub, $z 6, 6\pi$, comprehendere rectangulum sub, $76, 6\pi$: ex quo & rectangulum solidum sub, $\phi G, VE$, comprehendere rectangulum solidum sub triangulo, $G\phi V$, & trapezio, GV_3E , concludemus. Eadem ratione ostendemus rectangulum solidum sub, SV, Q_3 , comprehendere quod fit sub trapezio, $V\phi SQ$ & VQD_3 , & sic in reliquis huiusmodi procedemus. Simili verò ratione demonstrabitur rectangulum solidum sub, $\phi Q, VD$, comprehendere ab eo, quod fit sub trapezijs, $S\phi VQ, VQD_3$, & sic fiet in reliquis huiusmodi. Tandem enim solido, GOB, EAX , intelligemus circumscriptam esse figuram, & aliam inscriptam, ex dictis rectangulis solidis, & æquealtis compositam (quæ sunt parallelepippeda) quam inscriptam sic probabimus excedi à circumscripta minori excessu, quam fit, ϕ . Etenim rectangulum solidum sub, $2G, G\phi$, (pars dicti excessus) æquatur rectangulo solido sub, $2Q, Q\phi$, cum hæc rectangula plana illis sint æqualia, quod serua. Huic enim si addamus excessum rectanguli solidi sub, $3Q, VS$, spectantis ad figuram circumscriptam, super rectangulum solidum sub, $DV, Q\phi$, spectantis ad inscriptam, fiet rectangulum sub, CV, VS , quod sic probo. Nam per Prop. 15. Lib. Septimi Geo. Ind. quæ non pendet à priori parte Prop. primæ, neque à Prop. tertia, rectangulum solidum sub, $3Q$, tanquam figura indiuisa, & VS , tanquam diuisa per rectam,

Etia m, K ϕ , æquatur rectangulis solidis sub, 3 Q, Q ϕ , & sub, 3 Q, 5 ϕ . Sed per eandem Prop. rectangulum solidum sub, 3 Q, diuisa in figuras, DV, D3, & sub indiuisa, Q ϕ , æquatur rectangulis solidis sub, 3 D, Q ϕ , & sub, DV, Q ϕ , vnde sublato quod fit sub, DV, Q ϕ , ex eo, quod fit sub, 3 Q, VS, remanebit quod fit sub, 3 D, Q ϕ , seu sub, 3 C, Q ϕ , (nam parallelograma, D3, 3 C, sunt equalia quippe quæ sunt equalia, & in basibus æqualibus, DT, TC, cum sint æquales ipsæ, D3, 3 E, quia sunt cum æqualibus, C2, 2 E, proportionales per 2. Sexti Elem.) aut sub, 3 C, ϕ S, (cum sint pariter æqualia hæc parallelograma, S ϕ , ϕ Q, & in eisdem parallelis) vna cum eo, quod fit sub, 3 Q, ϕ S, quæ simul componunt per dictam Prop. 15. Lib. 7. rectangulum solidum sub, 2 Q, ϕ S. Huic vero si iunxerimus seruatum rectangulum solidum sub 2 Q, Q ϕ , componetur per eandem Prop. 15. Lib. 7. rectangulum solidum sub, 2 Q, VS, vt dicebatur. Porro eodem modo ostendemus, quod fit sub, 8 Q, ST, esse excessum rectanguli solidi sub, DY, QT, circumscripti, super rectangulum sub, 4 Q, YS, inscriptum. Cui si iungamus rectangulum solidum sub, 8 Q, YS, (quod est æquale ei, quod fit sub, 2 Q, VS, prius collecto) componetur rectangulum solidum sub, 8 Q, QT, seu sub, BY, BT. Et huic tandem iuncto, quod fit sub, BY, TO, (quod, vt supra factum est, ostendemus esse excessum eius, quod fit sub, 4 R, YO, super illud, quod fit, sub, XY, BT,) conficiemus rectangulum solidum sub, BY, YO, æquale omnibus præfatis excessibus simul collectis. Ex quo patebit figuram circumscriptam solido, GOEAX, excedere inscriptam, ipso parallelepipedo, YB, hoc est minori excessu, quam fit, ϕ .

Quo verò ad quadratum solidum semiportionis, EBP, patet ipsi figuram ex quadratis solidis, seu parallelepipedis æquealtis compositam circumscribi posse, & aliam inscribi, ita vt circumscripta superet inscriptam minori excessu, quocunque oblato solido. Hoc enim ad modum Lemmatis 12. ostēdetur, seu id ex eo colligi pōt, sunt. n. integræ, quæ sunt ducibiles i figura, EBP, parallelæ ipsi, BP: parallelæ verò ipsi, ER, nō nisi semel occurrūt ambitui, ENP, vt ex Conicis facillè ostēdi pōt; quæ sunt cōditiones in ipso Lemm. 12. postulatæ.

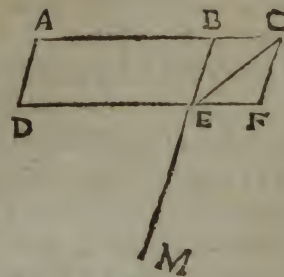
Deni.

Denique per Lemma 10. patebit idcirco solidum, $G O R$ EAX, seu rectangulum solidum sub trapezio, $G R X E$, & triangulo, $E X B$, ad quadratum solidum semiproportionis, $E B P$, esse ut basis ad basim, hoc est ut rectangulum, $R X B$, ad quadratum, $B P$: hoc est ut parallelepipedum, $G A$, seu rectangulum solidum sub, $G X, X E$, ad quadratum solidum, $E P$. Sunt ergo hæc quatuor solida proportionalia. Quapropter cum in Prop. 16. Lib. 7. ostensum fuerit rectangulum solidum sub, $G X, X E$, ad rectangulum solidum sub trapezio, $G R X E$, & triangulo, $E X B$, esse ut, $R X$, ad compositam ex dimidia, $R X$, & sexta parte, $X B$; liquet etiam quadratum solidum, $H B$, ad quadratum solidum, $E B P$, esse in eadem ratione, hoc est, ut, $R B$, ad compositam ex dimidia, $R B$, & sexta parte, $B E$, ut in Prop. 20. eiusdem Lib. 7. pariter demonstrare intentum fuit.

Consimili verò modo, præsuppositis ijs, quæ habentur in Prop. 16, 17, 18, 19, per hanc circumscriptionem, & inscriptionem, &c. quæ Prop. 20. subsequuntur, ac per eadem ibi absoluuntur, compleri posse, ad huius imitationem poterit studiosus intelligere. Cuius industriæ, ne longior sim, à me relinquuntur, si circa posteriorem partem Prop. primæ, & Prop. tertiam, adductæ in eodem Lib. sept. demonstrationes illi non satisfaciant, velitque de illarum veritate in his quoque certior fieri.

ANNOTATIO III.

Superfunt adhuc examinandæ Propositiones, 16, 17, 18, & 19, eiusdem Lib. 7. à quibus prædicta pendent, circa quas videndum est num subsistant, etiam per tantum hic ostensa. Videatur ergo Schema Proposit. 16. (quod hic denuò exponimus) eiusq; demonstratio, in qua assumitur rectangulum solidum sub, $A E, E C$, ad rectangulum solidum sub, $A E$, & triangulo, $B E C$, regula, $D F$, esse, ut $B F$, ad, $B E C$.
Pendet



Pendet autem hoc ex huiusmodi veritate, quod nempe cylindrici æquealti, (sunt enim rectangula solida sub, AE, EC, & sub, AE, & triangulo, BEC, æquealti cylindrici per Prop. 13. eiusdem Lib. 7. ipsiusque Cor. 1.) sint inter se, ut bases, quod probatum est in Lemmate 9. Porro ex eadem veritate pendet quoque rectangulum solidum sub, AE, EC, ad quadratum solidum, EC, esse ut rectangulum, DEF, ad quadratum, EF. Et tandem quadratum solidum, EC, sexcuplum esse rectanguli solidi sub triangulis, BEC, EFC, infertur ex eo, quod sit triplum quadrati solidi, tam trianguli, BEC, quàm CEF, quod patuit in superiori Annot. prima. Cætera verò pendunt ex Prop. 15. eiusdem Lib. 7. de qua in sequenti Annot. dicendum est. Non dissimili ratione autem intelligemus pariter, & sequentes ibi Propositiones, 17, 18, & 19, subsistere per hic tantum ostensa, cum per similia his, quæ attigimus circa Prop. 16. & ipsæ procedant.

ANNOTATIO IV.

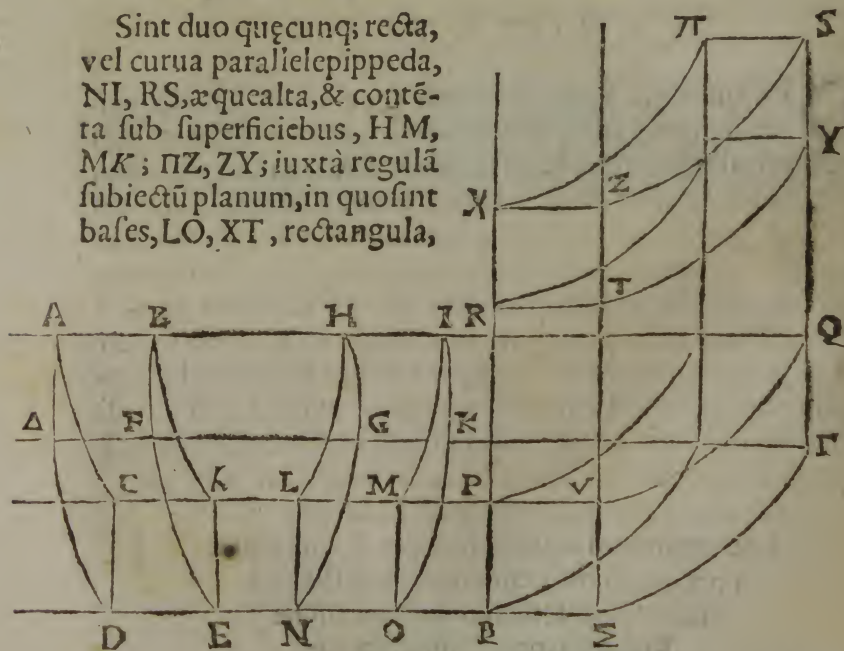
DEnique circa Propositionem 15. eiusdem Libri Septimi remanet ostendendum rectangulum solidum sub duabus quibuscunque superficiebus, iuxta datam regulam, contentum (cui ex Prop. 12. indefinita numero solida rectangula pariter dari possunt, sub homologis superficiebus prædictis contenta iuxta eandem regulam, quæ omnia inuicem esse æqualia ibidem probatur per posteriorem partem Propositionis primæ) æquari cuicunque rectangulo solido sub alijs duabus quibuslibet superficiebus, prædictis homologis, contento iuxta eandem regulam: ut circa usum eiusdem Propositionis 15. qui maximus, & creberrimus est, etiã per hunc modum omnis tollatur ambiguitas. Hoc autem per sequentia Lemmata absolucimus, in quibus numerum antecedentium Lemmatum continuabimus cum hæc, ut & illa, tendât ad posteriorem partem dictæ Propositionis primæ, tantæ molis extat, pariter confirmandam.

I. E. M.

L E M M A XIII.

R Ectangula solida sub superficiebus iuxta datam regulam contenta, quæ sint parallelogramma rectilinea, seu curvilinea, vel eisdem homologæ, dicantur parallelepippeda recta, vel curua, prout continentes superficies erunt planæ, vel curvæ. Hæc ergo si sint in eadem altitudine, & in basibus rectangulis sub æqualibus lateribus comprehensis, quorum planum sit regula, sintque latera lateribus parallela, vel sibi in directum constituta: inter se æqualia erunt.

Sint duo quæcunque recta, vel curua parallelepippeda, NI, RS, æque alta, & contenta sub superficiebus, HM, MK; NZ, ZY; iuxta regulam subiectum planum, in quo sint bases, LO, XT, rectangula,



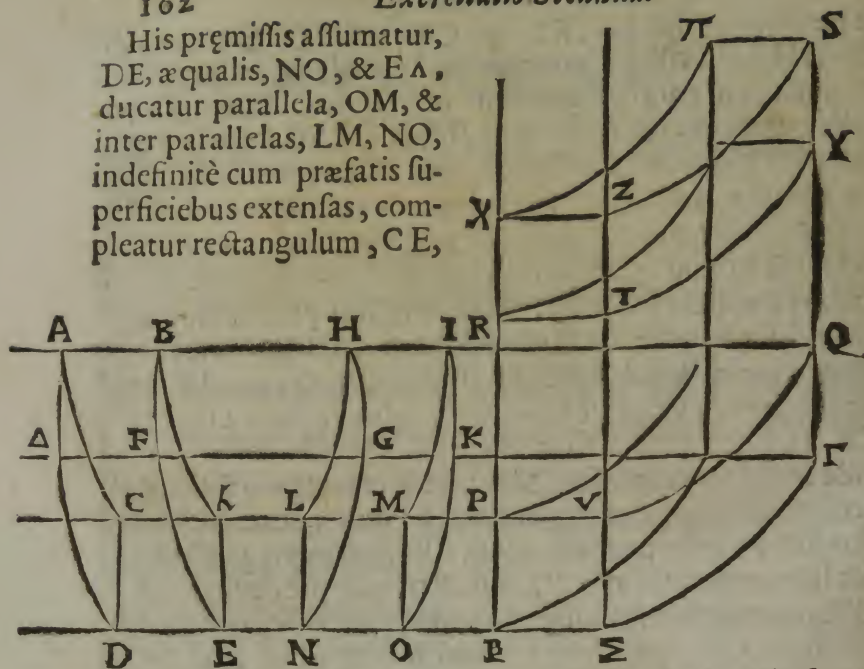
cōprehensa rectis, LM, MO; XZ, ZT; existentibus æqualibus, & paral-

& parallelis, LM; ipsi, XZ, & OM, ipsi, TZ. Sint verò dictæ, HM, MK; nZ, ZY, continentes superficies, vel parallelogramma, aut parallelogrammis homologæ. Dico ipsa parallelepippeda, seu rectangula solida, IN, SR, inter se æqualia esse. Quoniam ergò, IN, SR, sunt rectangula solida, ideò per Prop. 11. Libri Septimi eiusdem Geo. Ind. superficiebus cylindraceis comprehenduntur, vnde superficies, Hk, kN, NM, MH, erunt cylindraceæ, immò ab eodem latere descriptæ, vt ex dicta Prop. 11. facile intelligi potest: illud ergò latius describens dictas superficies, quod sit ex.gr. HI, extendatur hinc inde indefinitè, vt vsque in, A, Q, quod insimul intelligatur descripsisse superficies cylindraceas, ΔQ , QC, C Σ , $\Sigma\Delta$, hoc est dictæ superficies, Hk, kN, NM, MH, sint hinc inde indefinitè extensæ. Similiter in rectangulo solido, SR, accipiantur superficies cylindraceæ, quæ pariter indefinitè productæ versus prædictas, cum illis concurrere possunt, tales sunt enim ipsæ, nY, YZ, ZR, Rn, quæ productæ versus, Q, occurrant præfatis superficiebus, cum illisq; concludant solidum, Q β , quod erit solidum rectangulum contentum sub superficiebus, QP, Vr, iuxta regulam subiecti planum. Traiecto enim quocunque plano secante altitudinem solidorum, IN, SR, & ipsi subiecto plano, æquidistante, procreabitur in solido, Q β , rectangulum, cuius latera iacebunt in superficiebus, QP, Vr, namque illa æquidistabunt ipsis, PV, V Σ , cum sint in superficiebus cylindraceis, quorum descriptentia latera ipsis, PV, V Σ , æquidistant. Immo sicuti, PV, æquatur ipsi, RT, (est enim, RV, parallelogrammum) & V Σ , ipsi, OM, ita facile ostendemus genitam in superficie, QP, per ductum planum, æquari genitæ in superficie, YR, (quia erunt latera opposita parallelogrammi per imaginarium planum producti) quæ cum æquetur ipsi, RT, namque, RY, supponitur vel parallelogrammum, vel parallelogrammo superficies homologa (nempe habens omnes parallelas ipsi, RT, eidem pariter æquales) sequitur & productam in superficie, QP, æquari ipsi, RT. Eadem ratione probabimus eam, quæ gignitur in superficie, rV, æquari ipsi, MO. Vnde patebit ipsas superficies, rV, QP, vel esse parallelogramma, vel parallelogrammis homologas.

X

His

His præmissis assumatur,
DE, æqualis, NO, & EΛ,
ducatur parallela, OM, &
inter parallelas, LM, NO,
indefinitè cum præfatis su-
perficiebus extensas, com-
pleatur rectangulum, CE,



perque ipsas, DC, EΛ, extensis parallelis planis, illa secant
productas superius solidi, IN, superficies cylindraceas, ut
fiat solidum, AE, & ipsum cylindraceis superficiebus, DΔ,
ΔF, FA, AD, &, ΔE, AΔ, comprehensum, quod pariter, ut cir-
ca solidum, QP, effectum est, ostendetur esse solidum rectan-
gulum sub superficiebus, AΔ ΔF, contentum iuxta regulam
subiectum planum, quarum, ΔF, erit certè parallelogrammum
(ut &, AD,) nempe vel rectilineum, vel saltem curvilineum,
cum supponantur superficies planæ: ipsæ verò, ΔE, AΔ,
erunt vel parallelogramma, vel saltem parallelogrammis
analogæ: est enim, AE, cylindricus per Prop. 10. Lib. Primi
Geo. Ind. cum, AD, BE, sint plana parallela, & secantia su-
perficies cylindraceas, latere, HI, indefinitè producto descrip-
tas, hoc est cylindricum secantia, cuius illæ sunt superficies,
suntque oppositæ bases ipsæ, AD, BE. Nunc ergò osten-
dendum est solidum, IN, æquari ipsi, BD, quod sic ad modum
quasi Lemmatis primi via superpositionis exequemur. Acci-
piemus enim solidum superficiebus, AD, DL, LG, GA, &,
ΔGND, AHLC, comprehensum, illudque solido superficiei-
bus,

bus, BE, EM, MK, KB, &, FKO B, BIMA, contento ita superponemus. Cum enim, DE, æquetur, NO, addita communi, EN, ipsa, DN, æquabitur ipsi, EO, ergò posito, D, in, E, &, DN, in, EO, erit, N, in, O, & cadente basi, DL, super, EM, erit, DC, in, EA, quia recti sunt anguli, CDN, Δ EO, &, C, in, Δ , propter æquales, CD, Δ E, & punctum, L, in, M, ob æquales angulos, DCL, EAM, & rectas, CL, Δ M, &, LN, erit in, MO. Sed & solidum dico solido congruere. Cum enim superficies, AD, BE, sint planæ, & æquidistantes, propterea erunt subiecto plano æqualiter inclinatæ, & ideo cõgruente, DC, ipsi, EA, illæ constituentur in eodem plano. Est verò solidum, AE, cylindricus, eiusq; oppositæ bases, AD, BE, ut supra dicebatur, quæ ideo similes erunt, æquales, & similiter positæ per Prop. 11. eiusdem Libri Primi, quare congruente eius latere homologo, LC, ipsi, EA, per Prop. 25. eiusdem cõgruet, AD, ipsi, BE: & punctum, Δ , erit in, F, ac, A, in, B; unde, G, erit in, k, &, H, in, I, necnon, HG, in, IK, superficiesq; AG, congruet superfici, Bk; nam ambæ sunt in plano rektanguli, Hk, ipsi, LO, oppositi. Sed & superficies, G Δ DN, congruet ipsi, KTEO, si enim aliquod illius punctum caderet extra istam, nõ essent ambæ ab eodem cylindrici latere descriptæ, quia reperirentur duo puncta in plano per tale punctum subiecto plano æquidistanter traiccto, quæ non essent in eodem latere cylindrici. Nullum ergò punctum superfici, Δ GND, cadet extra superficiem, FKO E; nam &, GN, congruet ipsi, KO, quia, Δ D, congruit ipsi, FE, & quæ admodum, DN, ostensa est æqualis ipsi, EO, ita quæ a traiccto quocunque plano subiecto plano æquidistante gignentur in dictis superficiebus cylindricis, Δ GND, FKO E, ostendentur æquales, unde nullum punctum lineæ, GN, ostendetur posse cadere extra lineam, KO, quæ propter sibi congruent dictæ superficies, Δ GND, FKO E. Eadem ratione patet fieri superficies, AHLC, BIMA, sibi congruere. Et tandem superficiem, HGNI, congruere ipsi, IMOk, (quarum ambæ tus iam ostensi sunt congruere) ostendetur, ut in primo Lemmate effectum est, nempe probando nullum punctum superfici, HN, posse cadere extra superficiem, IO. Etenim traiccto plano per punctum extra cadens (si possibile esset) subiecto

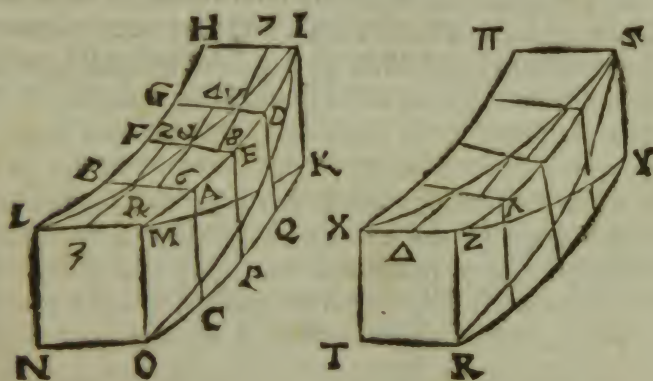
plano æquidistante, fieret parallelogrammum (veluti sunt parallelogramma, $DL, EM, \Delta H, FI,$) in quo ducta à supposito puncto recta linea parallela ipsius oppositis lateribus, maior, vel minor, & æqualis eidem rectæ ostenderetur: sicuti in figura primi Lemmatis, $QO, QN;$ & æquales, & inæquales esse probabantur. Quod cum esse non possit, ideò superficies, $HN,$ cōgruet ipsi, $IO,$ & totum solidum, $AN,$ toti, $BO,$ vnde erunt æqualia; & sublato communi, quod comprehenditur superficiebus, $BE, EL, LG, GB, BA, LH, FENG,$ remanebit solidum, $HO,$ æquale ipsi, $AE.$ Non dissimili ratione demonstrabimus & solidum, $Q\beta,$ æquari eidem, $AE,$ vnde patebit, $HO,$ æquari ipsi, $Q\beta,$ in quibus solidis sunt, $LM, PV,$ sibi indirectum, & $MO, V\Xi,$ parallelæ. Quod si intra superficies cylindræas, $P\pi, \pi Q, VS, VX,$ indefinitè versus, $\pi XZS,$ protensas, constitutum supposuerimus solidū rectangulum, quale, $AE,$ cum binis superficiebus planis ipsi, $\pi Z,$ oppositis, sicuti planæ supponebantur ipsæ, $AD, BE.$ Ostendemus simili ratione eidem æquari tam, $SR,$ quam, $TP;$ ex quo concludetur, $SR,$ æquari ipsi, $TP,$ cui cum probatum fuerit æquari & $HO,$ ideò, $HO, SR,$ proposita solida inter se æqualia erunt. Quod ostendere opus erat.

L E M M A XIV.

SI ex Schemate Lemmatis antecedentis, eiusq; parallelepipedis, $IN, SR,$ assumantur tantum bases, $LO, XT,$ & superficies, $HM, MK; \pi Z, ZY;$ sub quibus continentur: supponantur verò in alterutris superficiebus, quæ sunt homologæ, vt in, $HM, \pi Z,$ ductæ lineæ, $IL, SX,$ vt in præsentī schemate apparet, eiusque conditionis, vt cum, $IML, SZX,$ constituent figuras, $ILM, SXZ,$ quæ aut sint planæ in alteram partem deficientes (vt explicatur in Lemmate 2. post Prop. Primam Libri Septimi Geo. Ind.)
vel

vel saltem sint homologæ figuris planis in alteram partem deficientibus, regulis, LM, XZ: hoc est, ductis in dictis superficiebus, ILM, SXZ, quibuscunq; ipsis, LM, XZ, parallelis; earum, quæ sunt in eadem figura propinquior basi, ut in, HM, propinquior ipsi, LM, sit semper maior remotiore. Dico rectangulum solidum sub parallelogrammo, HM, & figura, ILM, regula basi, LO, æquari rectangulo solido sub parallelogrammo YZ, & figura, SXZ, regula basi, XR.

Si enim non, erit eorum alterum maius. Sit maius, quod sub, KM, ILM, continetur quantitate solidi, quod vocetur, \times . Tunc rectangulo solido sub, KM, ILM, figuram circumscribemus, & aliam inscribemus ex parallelepipedis,

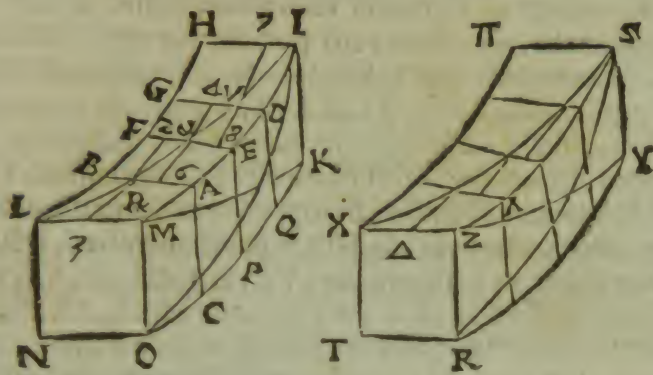


siuè rectis, siuè curvis æquè altis compositam, prout, HO, ΠR, erunt parallelepippeda recta, vel curua, ita ut circumscripta superet inscriptam minori solido, quam sit, \times .
Hoc

Hoc autem obtinebimus traiectis planis basi, LO, æquidistantibus, vt in Annotat. 2. superiori effectum est, quorum primum bifariam secet solidi, HO, altitudinem. Et alia duo subsequencia rursus diuisas altitudinis partes bifariam diuidant, sicque deinceps, deuenietur enim per primam Decimi Elemen. ad parallelepipedum minus ipso, ✱; quod sit contentum sub, LA, AO, quæ vel sunt parallelogramma, vel ijs homologa, tota enim superficies, HM, in Lemmate ant. supposita est vel parallelogrammum, vel parallelogrammo homologa, regula, LM, & BA, est parallela, LM, vt ex Prop. 9. Lib. Primi Geo. Ind. elici potest, in qua ostenditur, si planū æquidistans plano per latera cylindrici ducto, (quale est, LO, transiens per, LM, latus eius cylindrici, cuius, HM, est superficies cylindracea) tangat cylindricum, contactum fieri in recta, vel rectis lineis, quæ erunt latera cylindrici, & consequenter cuicunque eiusdem lateri parallela; quod enim ibi ostenditur de plano tangente cylindricum, idem de secante idipsum ob eandem rationem ibi allatam verificatur: vnde concludemus, BM, & simili ratione, MC, esse parallelogrammum, vel parallelogrammo homologum. Esto ergo quod dicta parallela plana secuerint superficies, HM, Mk, in rectis, FE, EP; GD, DQ: quarum quæ sunt in, HM, æquidistant ipsi, LM, & quæ in, KM, ipsi, MO, per dictā Prop. 9. Sit verò per eas secta linea, IL, in punctis, V, & R, per quæ intelligantur in superficie, HM, extensæ lineæ hinc inde vsque ad proximas parallelas, nempe, 3 R 2, 6 & 4, 8V7, constituentes parallelogramma, 2M, 4A, 7E, seu parallelogrammis homologas figuras, regula, LM, hoc enim fieri concipiemus per motum lateris cylindrici in superficie, HM, factum ipsi, LM, semper æquidistanter. Vt ex.g. pro descriptione ipsius, 23, abscissa ab, LM, recta, 3M, æquali ipsi, BA, percurrente, M, lineam, MI, punctum, 3, describet ipsam, 32, ad modū, quo in Lemmate secundo post Prop. 1. Lib. primi Geo. Ind. explicata est descriptio parallelogrammi siue rectilinei, siue curuilinei. Sicque circa alias, 64, 87, procedemus. Erunt autem, 3R, 6&, 8V, intra, & R2, & 4, V7, extra figuram, ILM, in ea enim parallelarum ipsi, LM, propinquior eidem supponitur semper remotiore maior.

Sic

Sic ergo
ex para
ris, æqu
paralle
gamus
ILM, qu
figuris
inscrip
solido
figuram
tam, i
quam si
æquabi
iuncta
lepper
æquatu
æquatu
quod si
PA, Aæ
B, con
tur di
Cum
✱, c



Sic ergò spatio, ILM, erit circumscripta, & inscripta figura ex parallelogrammis, seu parallelogrammis homologis figuris, æquealtis composita; & est, IO, parallelogrammum, seu parallelogrammo homologum, regula, MO; si ergo intelligamus compleri rectangula solida tam sub, KM, & figura, ILM, quam sub, OA, CE, PD, QI, & sibi respondentibus figuris tam circumscriptæ, nempe, LA, RE, & D, VI; quam inscriptæ, nempe, 3A, 6E, 8D, manifestum est ipsi rectangulo solido sub, KM, & ILM, fore circumscriptam, & inscriptam figuram, ex parallelepipedis, siuè rectis, siuè curvis compositam, ita ut circumscripta superet inscriptam minori solido, quam sit, ✱. Namque parallelepipedum sub, k D, D7, æquabitur ei, quod fit sub, PD, D8, per Lemma ant. Hoc verò iunctum parallelepipedo sub, PD, 84, conficiet parallelepipedum sub, PD, E4, quod facillè ostendetur, quia totum æquatur omnibus suis partibus simul sumptis. Hoc verò æquatur ei, quod fit sub, PA, A&, ergò si hoc iunxerimus ei, quod fit sub, PA, 62, componetur parallelepipedum sub, PA, A2, seu sub, CM, MB, quod cum eo, quod fit sub, CM, 3B, constituet parallelepipedum sub, CM, MB, cui æquabitur dictus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam. Cum ergò parallelepipedum sub, CM, MB, sit minus solido, ✱, etiam dictus excessus erit eodem minor. Unde circumscripta

scripta superante inscriptam minori excessu, quam sit, \star ,
 rectangulum solidum sub, kM , ILM , (quod est minus figura
 ipsi circumscripta) superabit inscriptam multò minori ex-
 cessu, quam sit, \star , idem verò ponitur superare rectangu-
 lum solidum sub, RS , SXZ , solido, \star , ergò figura inscripta
 rectangulo solido sub, OI , ILM , maior erit rectangulo
 solido sub, RS , SXZ , & subinde multò maior quacunque illi
 inscripta, quod tamen absurdum esse sic euincemus. Cum
 enim solidorum, HO , ΠR , sit supposita eadem altitudo, ex-
 tensis planis, quæ in solido, HO , æquidistanter basi, LO , du-
 cta sunt, secantur & superficies, YZ , $Z\Pi$, & linea, SX , vt in
 solido, HO , effectum est, & per puncta signata in, SX , ducan-
 tur intrà, SXZ , vsque ad proximam parallelam lineæ, qua-
 les sunt, R_3 , & 6 , V_8 , constituentes figuram ex parallelo-
 grammis seu iisdem homologis figuris, æquealtis cõposita: vt cõ-
 pletis rectangulis solidis sub his, & sibi respondentibus in,
 YZ , figuris, vt in, HO , factum est, necnon sub, YZ , SXZ , huic
 fiat inscripta figura ex parallelepipedis æquealtis compo-
 sita, quorũ vnum ex.gr. sit, quod sit sub, $R\lambda$, $\lambda\Delta$. Hoc enim
 æquari ei, quod sit sub, OA , A_3 , manifestum est per Lemma
 ant. quia sunt parallelepippeda æquealta, & contenta sub
 superficiebus, $3A$, AO ; $\Delta\lambda$, λR , quæ sunt vel parallelogram-
 ma, vel ijs homologæ, regulis basibus rectangulis, $3MO$,
 ΔZR , æqualibus, & sub lateribus æqualibus, & parallelis,
 $3M$, ΔZ ; MO , ZR , contentis. Eadem ratione reliqua sibi
 respondentia solida harũ inscriptarum figurarum adæquari
 ostendemus, ex quo integras æquales esse constabit contrà
 id, quod superius demonstratum est. Non ergò rectangu-
 lum solidum sub, OI , ILM , maius esse potest eo, quod sit sub,
 RS , SXZ . Eadem ratione ostendemus, nec posse eo minus
 esse, quia tunc poneretur, quod sit sub, RS , SXZ , esse maius,
 & fieret demonstratio incipiendo circumscriptionem, & in-
 scriptionem priorem in solido, ΠR , & prolequendo poste-
 riorem inscriptionem in, HO , ac deducendo ad absurdum.
 Quapropter constat rectangulum solidum sub, OI , ILM , nec
 maius, nec minus esse posse rectangulo solido sub, RS , SXZ .
 Ergò eidem æquale erit. Quod ostendere opus erat.

LEM-

L E M M A X V.

SI in reliquis figuris homologis, kM , YZ , in Schemate Lemmaris ant. supponantur ductæ lineæ, OI , RS , eiusmodi, quales fuerunt, LI , XS , idest constituentes figuras, IMO , SZR , in eandem partem cum, ILM , SXZ , deficientes; cæteris mantentibus. Rectangulum solidum sub figuris, ILM , IMO , regula, LO , æquabitur rectangulo solido sub, SXZ , SZR , regula, XR .

Hoc autem non aliter quam Lemma ant. probabitur. Namque per continuam bisectionem altitudinis solidi, HO , ut & in figura, ILM , factum est, ipsi, IMO , circumscribemus, & inscribemus figuram ex parallelogrammis, vel ijs homologis figuris, æquealtis compositam, sub quibus, & reliquis figuris componentibus circumscriptam, & inscriptam spatio, ILM , mente completis rectangulis solidis, ostendemus, ut in Lemmate ant. rectangulo solido sub figuris, ILM , IMO , circumscriptam esse figuram, & aliam inscriptam, quam illa superat excessu minori dato solido, ut, ✕ hocque mediante, ut suprâ, inscriptionem in rectangulo solido, sub, SZX , SZR , prosequentes, ostendemus rectangulum solidum sub figu-

ris,

IML , IMO , æquari rectangulo solido sub figuris, SZX , SZR .

Quod, &c.

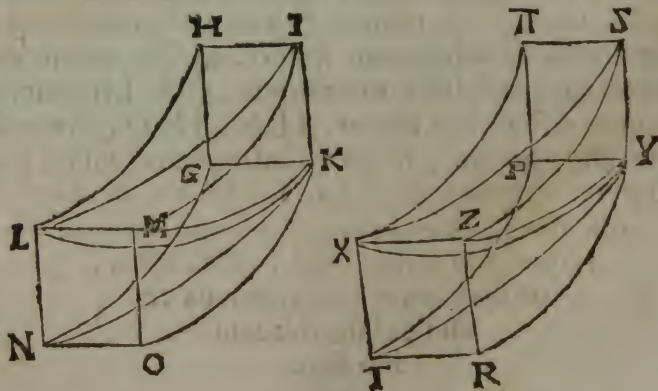
Y

L E M.

L E M M A XVI.

D Enique in eodem Schemate Lemmatis 14. & in figuris, KM, YZ ducantur lineæ, Mk, ZY, quales fuerunt, LI, XS; IO, SR, hoc est constituentes figuras, IMk, SZY, in partes tamen oppositas deficientes ijs, in quas deficient, IML, SZX. Dico, suppositis ijsdem regulis, rectangulum solidum sub figuris, IML, IMk, æquari rectangulo solido sub, SZX, SZY.

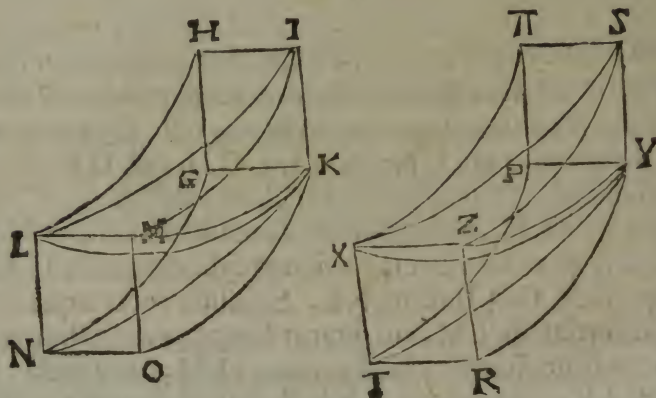
Namque ex Lemmate 14. rectangula solida sub, KM, IML, & sub, YZ, SZX, sunt æqualia. Similiter per Lemma ant. rectangula solida sub figuris, IML, MOk, & sub, SXZ, ZRY, sunt æqualia, quia, MOk, ZRY, deficient versus



easdem partes, HIK, ΠSY, versus quas deficient ipsæ, IML, SZX. Ergò residuum rectangulum solidum sub, ILM, IMk, æquabitur residuo rectangulo solido sub, SXZ, SZY. Sed ut omnis ambiguitatis locus auferatur congruet hæc rectangula solida clarius Lectori exhibere. Assumantur ergò ex Schemate Lemmatis 14. tantum superficies, LO, XR, HM, ΠZ,

αZ , MK , ZY , cum descriptis lineis, IL , SX , MK , ZY , cæteris
 omissis, & compleri intelligantur dicta solida, concurrenti-
 bus, ad , G , P , tribus cylindraceis superficiebus, GL , GO , GI ,
 tribus, MK , MH , MN , in solido, HO , oppositis: & tribus,
 PX , PR , PS , tribus, ZY , $Z\pi$, ZT , in solido, πR , pariter op-
 posititis. Describet autem ex. gr. NO , latus cylindrici ipsam
 superficiem cylindraceam, $GNOk$, dum concipietur moveri
 semper fixæ, NO , æquidistanter, manente puncto, O , semper
 in linea, Ok , donec perueniat in situm, Gk . Qua ratione &
 GL , describetur ab, LN , & GI , à GH , vel Gk . Eodem
 modo discedat recta æqualis ipsi, LN , ab ipsa, LN , mota
 semper ipsi, LN , æquidistanter, & manente semper puncto,
 L , in, LI , quæ describet superficiem cylindraceam, $ILNk$, &
 in superficie, GO , lineam, Nk . Similiter recta æqualis ipsi,
 LM , discedat ab, LM , cui feratur semper æquidistanter, de-
 scribens superficiem cylindraceam, kLM , linea recta, LM ,
 & ipsis, Lk , in superficie, $ILNk$, & kM , in superficie, $IMOk$,
 iacente conclusam. Eodem verò modo intelligemus in alio
 solide, πR , descriptas præfatis respondentes superficies.
 His peractis licet modò intueri solida superficiebus, IN , NM ,
 Mk , kNO , ILM ; & ST , TZ , ZY , YTR , SXZ , comprehensa,
 quæ sunt rectangula solida sub superficiebus, OI , ILM ; RS ,
 SXZ , prænominatis contenta: traiectionis enim quomodocun-
 que in ipsis planis basibus, LO , XR , æquidistantibus, fient
 in dictis superficiebus lineæ parallelæ lateribus ipsarum ba-
 sium per circuitam superius Prop. 9. Lib. Primi Geo. Ind. &
 subindè fient rectangula, quorum latera iacebunt in figuris,
 OI , ILM ; RS , SXZ , idcirco dicta solida continentibus. Est
 autem solidum, $IKONLM$, æquale solidis, $ILMk$, $kLNO$,
 totum nempe omnibus suis partibus simul sumptis: ut & so-
 lidum $SYRTXZ$, prædicto æquale, pariter adæquatur soli-
 dis, $SXZY$, $YXTRZ$. Est autem, $kLNO$, æquale ipsi,
 $YXTRZ$, per Lemma 15. nam hæc sunt rectangula solida
 sub superficiebus, kNO , KOM , figurisue in eandem partem
 deficientibus contenta, hoc enim, ut circa solida, $IKONLM$,
 $SYRTXZ$, processimus, pariter ostendetur. Ergò reliqua
 solida, $ILMk$, $SXZY$, æqualia erunt. Sed & hæc demon-
 strabimus esse solida rectangula sub figuris, ILM , & k , SXZ ,
 Y 2 SZY ,

SZY, contenta, eodem modo, quo circa præfata solida id ostendimus. Ergò rectangula solida sub figuris, ILM, MIK; SXZ, SZY, contenta inter se æqualia erunt.



COROLLARIUM I.

Quoniam verò in Lemmate 13. superiori parallelepipedum, HO, ΠR, supponitur siue recta, siue quomodocumque curua; idcirco propositis duobus quibuscunque rectangulis solidis æquealtis, in quorum vnoquoque duæ continentes superficies iuxta regulas bases (quæ sint rectangula, eiusque latera æqualia, & parallela seu in directum, vnum vni, & alterum alteri) sint vel duo parallelogramma, siue rectilinea, siue curuilinea; vel vna parallelogrammum, altera verò figura plana in alteram partem deficientes; aut ambæ figuræ planæ in easdem, vel etiam in contrarias partes deficientes; seu sint his homologæ; manifestum est ex his quatuor proximis Lemmatibus ea inter se æqualia esse. Possumus enim semper figuras in alteram partem deficientes, seu his homologas, ita complere, vt sint parallelogrammis, vel iisdem homologis figuris inscriptæ. Sicuti ex. gr. ipsæ, ILM, IMK, KMO, parallelogrammis, vel iisdem homologis figuris, HM, MK, sunt inscriptæ. Ex quo fit, vt & ipsis contenta rectangula solida parallelepipedis quoque siue rectis, siue

siuè curvis hant inscriptibilia. Quibus denique apparet posteriorem partem Prop. Primæ Libri Septimi Geo. Ind. etiam quoad huiusmodi solida veram esse.

COROLLARIUM II.

ET quoniam figuræ in ipsa Geometria Indivisibilium consideratæ, circà quas utimur Propositione 15. eiusdem Libri Septimi, sunt eius conditionis, qualem supra postulauimus, nempe vel parallelogramma, vel figuræ in easdem, seu in contrarias partes deficientes, aut ijs homologæ, seu in huiusmodi figuras resolui possunt, cum habeant conditionem dictam in Lemmate 12. superiori, sicuti in eius Cor. primo pariter inuimus, & ut illius Geometriæ Propositiones, in quibus usu venit Prop. 15. superius dicta, considerati innotescet: idè circà ipsius Propositionis 15. usum neuti- quam Lectori dubitandum erit, per hæc enim patet rectan- gulum solidum sub duabus quibusdam superficiebus iuxta datam regulam contentum, æquari cuicunque alteri sub su- perficiebus prædictis homologis iuxta eandem regulam con- tento, lateribus basium, vel parallelis, vel in directum exi- stentibus, ut semper in dicta Geometria usurpantur: quod & in Prop. 12. eiusdem Libri Septimi supposita veritate po- sterioris partis Prop. Primæ pariter ostensum fuit. Hoc ve- rò stabilitum etiam per hunc modum Archimedeum ferè om- nia subsistere manifestum est, paucis tantum relictis, ut est ex. gr. Lemma 12. superius, quod esset extendendum etiam ad figuras non ordinatas, & ut est Prop. 17. Lib. Secūdi, quæ sub tanta generalitate per hæc subsistere non potest, nisi uni- uersalissimè dicta posteriorem partem Prop. pr. Lib. Septimi, per hunc modum Archimedeum ostendamus, quod propter in- numerabiles solidorum varietates liquidò explicare, ac sche- matibus aperire, per vnâ generalē demonstrationē omnibus applicatā, difficillimū puto. Prædemonstrata tamen satis Le- ctori fidē facere possunt de veritate dictæ posterioris partis Prop. Primæ, ac de subsistentia allatā ibidem demonstratio- nis in omnibus solidis, quam vix aliter puto à Geometris sub tanta generalitate ostendi posse.

COROL-

COROLLARIUM III.

Hinc etiam colligitur, cum circa aliquas figuras versabimur, tanquam rectangula solida continentes, prædictas conditiones habentes, nempe quæ vel sint parallelogramma, vel figuræ in alteram partem deficientes: quod circa easdem sufficiet adhibere doctrinam Libri Septimi, tanquam germanam, ac seipsa sufficientem, absque eo quod utamur circumscriptione, & inscriptione figurarum. Satis enim erit hanc circumscriptionem, & inscriptionem hac vice tantum adhibuisse, ut posterior pars dictæ Propositionis Primæ etiam hoc pacto confirmaretur.

XXII.

Si ergo Lector supradicta omnia rectè perceperit, satis, puto, nedum in priori, sed & in posteriori methodo Ind. cruditus, poterit de iisdem iudicare, quamque sibi libuerit in demonstrando prosequi. Cum verò hic reliquum doctrinæ Geometriæ Ind. brevitatis causa, prætereamus, non inutile tamen, & iniucundum studioso fore putavi, si quædam illius selectiora, tamquam specimen huius artis, pulchriorumque fructuum messem à me collectam, breuiter hic exposuero, tum ut sciat Lector quid in reliquis dictæ Geometriæ Libris tractetur, tum etiam ut ex his intelligat Indivisibilem usum neutiquam fallacem esse, si modo rectè utatur, sed in ipsum veritatis scopum illa semper collimare. Id autem præstabimus paulò amplius explicando, quæ in Exercitat. ant. num. 39. breviori Epilogo recensuimus.

In Libro Tertio igitur, supposita revolutione circuli, vel ellipsis cuiuscumque facta circa proprium axem, considerantur solida rotunda ab illis, & earum portionibus genita, & hoc ab initio Libri usque ad Prop. 9. Deinde à Prop. 9. usque ad 11. enucleatur ratio eorundem circularum, & ellipsium, inter se comparatorum. Denique à Prop. 11. usque ad finem Libri, expenduntur circa corpora posito revolutionem eorundem figura-

rum non amplius fieri circa axem, sed circa equidistantem axi rectam lineam. siue illa tangat figuram, vel sit intra, vel extra; & hinc uberrimam solidorum messem colligere licet. Namque circulus gignit spheram, ellipsis spheroidem oblongum, & prolatum, eorum portiones planis resecta faciunt ipsorummet segmenta. Quod si sit reuolutio circa tangentem, circulus facit anulum strictum, circulearem, & ellipsis ellipticum. At circa non tangentem, & extra figuram, circulus producit anulum latum, & ellipsis ellipticum. Hunc Keplerus anulum arduum appellat, veluti serio rusticarum puellarum similem. Denique supposita reuolutione circa parallelam axi intra figuram, portio maior circuli efficit Malum roseum, & ellipsis, Malum coronatum; portio minor circuli, Malum citrium, & ellipsis Oliuam. Sic ex reuolutione ellipsis circa tangentem sed non inter terminis coniugatorum axium, fit annulus strictus ellipticus altera parte latior; & circa illi parallelam extra figuram oritur annulus latus ellipticus altera parte strictior, similis Tiarae, seu globo Turcico. Verum ultra haec solida rotunda patet quoque infinitorum solidorum similarium mensura, quae ab eisdem figuris genitricibus dictorum corporum rotundorum pariter generantur.

In Quarto Libro statim in Propos. Prima exhibetur quadratura parabola, deinde portionum eiusdem per equidistantes axi, vel diametro ipsius constitutarum, usque ad Propos. 20. In reliquis vero, supposita reuolutione parabola tam circa axem, quam circa aliam quancunque axi parallelam emergunt nuda Conoidea parabolica sed & apices semianuli, semibases, & alia huiusmodi solida, ut & infinita similaria ab eisdem genita figuris.

In Libro Quinto denique, suppositis eisdem figurarum reuolutionibus patet solida rotunda ab hyperbola, eiusque portionibus, necnon ab oppositis & coniugatis sectionibus genita; hoc est Conoidea hyperbolica semianuli stricti, & lati hyperbolici (quos, ut & parabolicos idem Keplerus Crateres vocat) semibases ac alia huiusmodi quamplura solida rotunda, & subinde infinita solida similaria, ab eisdem cum rotundis genita figuris, pariter notificantur. Doctrina vero Libri Sexti satis apparet qualis sit ex num. 39. Exercitat. ant. In tot ergo figuris, quot

Lector

Lector hic, & in his duabus Exerc. intelligere potuit, immo & in plurimis alijs, quas intactas preterimus, de Indivisibilibus utraque methodo periculum fecimus, nec unquam in aliquod incidimus, quod vel latum unguem discederet, seu ab aliorum inuentis discreparet. Quoniam verò non satis est proposita evidenti ratione probare, pluribusque confirmare, nisi ea quoque dubia è medio tollantur, quæ in oppositum allata. Lectoris animum pulsare possunt, propterea huic muneri obcundo sequentem Exercitationem destinamus.

Aduerte autem in superioribus Lemmatibus etsi pro aliquibus veritatibus aliquando citatur Liber Septimus Geo. Ind. attamen plerasque in præmissis Notis pariter haberi posse, ut studioso facile innotescet.



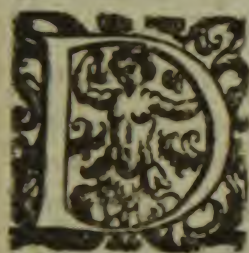
EXER-



EXERCITATIO

TERTIA.

In qua discutiuntur ea, quæ à Paulo Guldino
è Societate Iesu in eiusdem Centrobarica
præfatæ Geometriæ Indiuifibilibum
obiiciuntur.



*U*m eas omnes, quâs in hucusq; declara-
ratam Indiuifibilibum Doctrinam diffi-
cultates euulgarat Guldinus mente ob-
uoluebam, ac pleniori rationum volu-
mine, quæ responsionis loco afferrî posse
videbantur retexere aggrediebar, qui-
nimo & iam ipsius Operis aliquot folia prælo comissem,
repentè mihi cum fama, tum litteris amicorum nunciatum
est ipsum de Geometria quidem benemeritum fato conces-
sisse. Indolus vehementer cum ob publicum Respublicæ lit-
terariæ damnum, tum ob mihi præceptam laboris penè con-
fectis materiam, quam uiuenti conseruam. Mors enim
ipsa ingrato n.e silentio damnans multa ueluit prodere, quæ
disserendi campus opportunitior, si uixisset, aperuerat. Ve-
rum tamen & eadem alio, nec leuiore me maculauit incom-
modo; hinc enim factum est ut cum à pluribus distractus
Z curis,

curis, tum ut alter Oedipus pedibus lēsis, ac podagra claua-
tis ad huiusce Sphingis enigmata dissoluenda animum negli-
gentius intendens, tardius quam mihi proposueram hanc res-
ponsum attulerim. Iam verò, Lector erudite, erit mihi
plenius factum satis, si in eodem nulli me vel odio, vel fūco
obnoxium credideris. Veritatis augmento enixè studere ne-
mo non debet, qui inter veros Mathematicos, quorum certis-
simè requiruntur ΑΠΟΔΕΞΕΣ, recenseri haueat. Quamuis
autem nihil ferè à Guldino in oppositum allatum sit, quod ipse
mihimet prius nō obiecerim in Prefatione Libri Septimi Geo-
metriæ Induisibilibum, eaq; soluerim ratione, quam equani-
miter iudicanti satisfacere posse videbatur: quinimmodò ipse-
met quodammodo in ancipiti positus (cum neq; accuratè, neq;
totam induisibilibum Geometriam, sed tantum exiguam il-
lius partem se vidisse non semel fateatur) nihil dixerit se
contra eandem diffinituè proferre; quin & amplius pro-
pter rationes in contrarium à se productas minime respuen-
dam censuerit Libro Secundo ipsius Centrobarycæ, Pagina
tertia; attamen ne præstantis huiusce Geometriæ auctoritate
circa hæc Induisibilia aliquantulum dubitantis, si quid ab
ijsdem utilitatis in Litterariam Rempublicam emanare po-
teat, illud tenebris obrutum deliteſcat, excusso diuturniore
veterno, hic rationes adglomeravi, quibus ad omnia illius
obiecta ratus sum abundè factum iri satis. Id tamen à me
velim excipias saluo nomine præclari huiusce Viri, cuius in-
dustria non solum in inuentis iam ab alijs tantum illustran-
dis, quibus plerumque vulgaris quædam gloria comparatur,
sed & in nouis detegendis, æternum etiam post fata viuet.
Sed se postremum velim, Lector beneuole, in hoc præloquio

mo-

monitum, ne operosius ageres in exquirendis eius Centrobaryce obiectionibus, huc fideli calamo me ex eadem traducenda curasse quacumq; ipse protulit contra huiusmodi Indivisibilia. Hæc autem, ut ordine quodam expendere, libuit in Sectiones XLII. distribuere, quæ per Capita in sequenti Exercitatione digesta singillatim examinantur, ut ea commodius ad libitum possis intueri. Vale Lector, & æqui consule.

CAPVT I.

In quo fit examen eorum, quæ afferuntur à Guldino in Sectione prima, ac secunda.

CUm ipse Guldinus in sua Centrobaryca intactam Geometriam Indivisibilium præterisset, in tribus postea subsequenter Libris quædam sparsim attulit, & quasi per transennam inspiciens obiecit, aliqua verò ex professo, ac dedita opera exposuit, ut in Libro quarto Cap. quinto, quæ omnia maiori qua fieri poterit breuitate, iuxta ordinem dictarum Sectionum seruatò processu, nunc examinabuntur. In Præfatione ergo Libri Secundi cum Vsum Centri gravitatis, quem vocat *Compositionem, & Resolutionem Potestatum rotundarum* explicasset, atq; in Keplerum, tanquam in absurdè locutum parumper inuehisset, præfatam Geometriam Ind. sic aggressus est Pag. tertia.

Seçtio I. Immo cum huic ipsi Libro Secundo publicis typis exscribendo manum supremam imposuissem, Tertiumque ipsum ad umbilicum deduxissem, inspexi per transennam veluti (obire enim singula penitus, vires, quas gravi tum languore collapsas erigere caperem, extra domum libertiore sub Cælo versabant) Geometriam Promotam Bonaventuræ Cavalieri Ordinis Iesuatorum Geometra Insignis, à Galileo (quem eodem tempore licuit videre) in suis Dialogis de motu locali, &c. laudatæ, cui palmariam olim famam inter excellentes Aui no-

stri Mathematicos pollicebatur. Et ut verum fatear, quem Galileus mihi ex facie, & indole notus laudauit, nunquam mordaciori Iudicio, distringendum censui; qui si tot habuisset laudis fautores, quot habuit obtrectatores, per ipsum floridior, angustiorque staret honos disciplinarum mathematicarum.

Ex his ergo verbis tibi, ò Lector, palam fit quænam fuerit illi occasio dictam Geometriam inspiciendi, qui & insimul quid de laudibus à Galileo ex sui tantum humanitate in me collatis sentiendum sit apertè fatetur. Id verò postrema huiusce Sectionis verba satis declarant, de quibus tibi iudicium relinquens, ad secundam Sectionem accedo, quæ talis est in eadem Pagina Tertia.

Sectio II. *Reperi autè in his libris Geometriae promota Auctorem ansam arripuisse ex Keplero, ut suam non tam inueniret, quam ab umbris in lucem publicam vindicaret methodum Indiuisibilem; quæ tamen methodus quomodo purioris Geometriae studiosis probetur non edicam; eam tamen propter rationes hic minimè importuno silentio supprimendas respuendam non censeo. Galileus profectò in eodem Dialogo de motu locali disputans de Infinito, de proprietatibus finitorum, quas infinitis applicare minimè liceat contra ipsum concludit.*

In hac ergo Sectione primò dicitur me huiusce Methodi Ind. inueniendæ ansam arripuisse ex Keplero. Secundò sententiam suspendit an purioris Geometriae studiosis probetur, licet eam respuendam non censeat. Tertiò vero citat contra me Galileum in præfatis Dialogis.

Quoad primū ergo videtur hic Auctor amplius declarare se Libros dictæ Geometriae accuratè legere nō potuisse, ut ipse fatetur in Indice rerū præcipuarū Tomi Secundi, si enim eos quæ congruebat diligentia examinasset, tunc quoq; potuisset animaduertere quā diuersa sint vtriusq; methodi fundamenta. Keplerus enim ex minutissimis corporibus quodammodo maiora cōponit, ijsq; vtitur tanq̃ concurrētibus, quæ admodum & ipse Guldinus asserit in subsequenti Sectione Tertia, vbi ipse tantum dico plana esse ut aggregata omnium linearū æquidistantiū, & corpora, ut aggregata omnium plano rū pariter æquidistantiū, veluti in Exercit. 1. n. 7. 8. 9. explicabatur. Hæc autē nemo non videt quam sint inter se diuersa.

De

De eo, quod secundo loco dicitur amplius loquendi offertur occasio in multis, quæ inferius attingentur.

Quoad tertium denique, etsi in mathematica Schola lege veritum sit iurare in verba Magistri, ita ut illius alumni puram, ac sinceram veritatem respicientes, ingenuè iactare soleant. *Amicus Plato, sed magis amica veritas.* Quapropter nec ipse teneat quascunq; Galileus in suis Dialogis de motu locali protulit conclusiones (quarum non paucas solummodò tanquam probabiles Lectori proponere intendit) mordicus tueri. Attamen ne debita erga tantum Præceptorum per me videatur intermissa reuerentia, æquo Lectori considerandum propono Galileum loco supracitato hæc duo sustinere: Nempe continuum ex Indivisibilibus componi, & subinde lineam ex punctis, ipsq; numero infinitis; lineamq; dari altera maiorem, ut dictum Dialogum perlustranti manifestum erit. Concedit ergo aliquam infinitorum congeriem altera maiorem esse posse, quod non aduersatur, sed facit positioni meæ. Ne ergo admittatur hic in eodem Galileo expressa contradictio, fortè non incongruè dici potest in eo loco, in quo ait proprietates finitorum non esse infinitis applicabiles, in alio sensu de infinito locutum fuisse, ut potè hæc de infinito simpliciter, vel in ratione totius, ut dicunt philosophi, subintellexisse, cum ei nihil addi possit; ubi infinitis linearum punctis, quamvis infinitis (cum non sint infinita simpliciter) potest tamen iugiter fieri additio, ut per se patet.

CAPVT II.

De ijs, que discutiuntur circa Sectionem tertiam.

TRanſeamus nunc ad Sectionem tertiam, quæ sic se habet in eadem Præfatione Pag. 4.

Seçtio III. *Hic ergo Cavalerius secutus tam Bartholomæum Souerum, qui Libro quinto de Curui, ac Rectis proportionem promota, parallelarum, ac figurarum analogarum virtutes, ac proprietates tradit, quam Keplerũ, qui per infinita plana, & corpora minutissima maiora componit (si quidem componit) ut videbimus Lib. 4. cap. 4. putabat se sensum attigisse Archimedis*

dis, quo ille sua facile quidem proponat, demonstret autem, & spinosè, & laboriosissimè per nouam istam resolutionem & compositionem facillimo modo demonstrare se, ipso etiam Archimede consentiente indicat. Sed hoc refellit Alexander Anderssonius Scotus, ut in loco patebit. Hos igitur Cavalerius non solum imitari, sed & ea que ipsi in paucis dumtaxat, & sigillatim tantum persecuti sunt, ipse generatim in pluribus, immò in infinitis, & uniuersè demonstrare conatus est. Plana autem illa Kepleriana cum in punctum omnia, & corpora in axem coirent, minus ad rem facere visa sunt Cavalerio; utitur ergo lineis, & parallelis planis indiuisibilibus, & infinitis, deque illis concludit id, quod de finitis quaritur.

Hic ut vides, benigne Lector, nisi Keplerus sufficiat, adiungitur & Bartholomæus Souerus, à quò dicta Methodus Ind. desumpta fuisse perhibetur, ex eo quod in Libro de Curui, ac Recti proportionem promota, parallelarum, ac figurarum analogarum virtutes, ac proprietates tradiderit. Inculcat autem hic Guldinus iuxta eundem Souerum prefatus eam, quam appellauì posteriorem Methodum Ind. de qua egimus in Exerc. secunda, cui nonnihil affine redolere videtur eiusdem Soueri figure analogæ. Sed utinam aliquid & maioris momenti in publicam utilitatem ope fundamenti prædictorum Auctorum inuenissem, nec enim erubescerem hoc publicè testari, deque meis inuentis tam benemeritos palam profiteri. At mihi non opus fuit hos Auctores sub hoc titulo recensere (quemadmodum voluisset Guldinus, miraturq; de Souero me non declarasse) à quibus nihil mihi mutuatum est, præterquam pauca aliqua solidorum nomina à Keplero, de quibus in præfata Geometria fit mentio. Sola enim admiratio, qua solèt incipere philosophi philosophari, & nō Kepleriana, vel Soueriana doctrina, occasione Methodi Indiuisibiliū inueniēdg, ea ratione, qua in eiusdem Præfatione aperitur, mihi suppeditauit. Hoc verò quoad Souerū sic amplius confirmari potest. Cum enim anno 1629. degerem Parmę, iamq; Illustrissimi huius inclitę Urbis Bononię Senatores publicum Mathematicum ea, qua solent circūspecta prudētia deligere statuissent, eorū nomine mihi eisdem seruire in hoc munere cupienti, indictū est

est vt aliquod specimen Matheſis, quam audierant me profiteri, eiſdem præberem, quò tali gnomone, ac regula me vel vt idoneum eligerent, vel tamquam ineptum reprobarent. Vt ergo eorundem iuſſis obtemperarem, iſſdem miſi eodem anno 1629. dictę Geometrię 7 Libros, etſi manuſcriptos, attamen abſolutos, ſimul cum meo Speculo Vſtorio, quę paulò poſt in lucem edita ſunt. Ii autem nedum oſtenſi fuere f. r. Oſtauiano Zambeccario tunc temporis Iuſtitie Vexillifero, ſed & eius ſucceſſori Achilli Volte, alijsq; Illuſtriſſimis Senatoribus, qui vt varia eruditione reſerti, non parum quoque Mathematicis Studijs delectabantur. Eos quoq; viderunt Excellentiſſimi Viri Matheſeos Profeſſores Ouidius Montalbanus, Carolus Antonius Manzinus, vt & Cęſar Marſilius, & Antonius Maria Bonalonius. Quinimmo & P. Bettinus è Societate Ieſu, præteris eiſdem lucubrationibus Apianiſ illuſtris, Alphoſus de Iſè, Io. Baptiſta Parmeggianinus Archipreſbiter Carpaneti in Agro Placentino, & alij quāplures (quorū non pauci adhuc ſuperſutes extāt) Parmę ante annum 1629. eiſdem abſolutos non ſemel perſpexerunt. Cum tamen Souerus nonnifi anno 1630. publicis typis apparuerit. Quì ergo fieri potuit vt eum ſecutus fuerim, qui non dum proceſſerat ad lucem?

Sed eſto quod Guldini rationes efficaciter conuincant me ex Keplero, ac Souero Methodum Indiuſibilibium inueniſſe, propter aliquam conuenientiam, quam mei infinita Indiuſibilia cum minutiffimis, & infinitis corporibus Keplerianis habere videntur, nec non figurę analogę etſi generaliffimę cum ſpecialiffimis à Souero conſideratis. Pari ergo ratione vbicumq; inter duorum Auſtorum principia appareat aliqua ſimilitudo, affinitas, ſeu conuenientia, tunc euidenter cōcludere poterimus eum qui poſterius ſcripſit ex priori deſumpſiſſe principia. Qualem ergo ſuſpicionem ſubiret ipſe Guldinus, cuius principia, ſeu Regula generalis, quam aſſert pag. 147. & in qua tota illius Centrobaryca fundatur, adeo principijs Kepleri in Stereometria Doliorum adhibitis aſſimilantur, vt quod ipſe ſpecialiter ibi tradidit, tantum vniuerſaliter appareat extendiſſe Guldinum; quod hæc loca eiſdem Kepleri conſideranti manifeſtum

rum fiet. Is enim in dicta Stereometria Theor. 18. sic inquit. *Omnis annulus sectionis circularis, vel elliptica est equalis cylindro, cuius altitudo aequat longitudinem circumferentia, quam centrum figura circumducta descripsit, basis verò eadem est cum sectione annuli.* Guldinus verò pag. 147. afferens dictam regulam generalem ait. *Quantitas Rotanda, hoc est circulus, vel ellipsis in Theoremate Kepleri in viam rotationis ducta, nempe in peripheriam descripta à centro, quod est tam figure, quam grauitatis, producit potestatem rotundam vno gradu altiore potestate, siue quantitate rotata, scilicet producit annulum strictum, vel latum.* Videat ergo Lector quam hæc sint similia, & quã facillè iuxta normã ab eo traditã dijudicari posset ipsum ex Keplerò talem Regulã sibi construxisse. Hoc verò amplius confirmaretur ex eo quod nedum regula, sed & ratio, quã affert eiusdẽ regulę, qualiscumq; sit, simillima est Keplerianę. Etenim idẽ Keplerus vt demonstret prædictũ Theor. 18. ibidẽ sic procedit *Annulo enim inquit (in schemate 11.) GCD, sed integro, ex centro spatij, A. secto in orbiculos infinitos, ED, cog. minimos, quilibet eorũ tanto erit tenuior versus centrum, A. quanto pars eius vt, E, fuerit propior centro, A, quam est, E, & recta per, F, ipsi, ED, perpendicularis in plano secante, tantò etiam crassior versus exteriora, D, extremis verò dictis. scilicet, D, S, simul sumptis duplum sumitur eius crassitiei, quã est in orbiculorum medio. Hæc ratio locum non haberet si orbiculorum, E, D. partes cis & ultra circumferentiam, FG, lineasq; per, FG, perpendiculares, non æquales, æqualiterq; sita essent. Eadem extendit in Cor. 1. ad alias quoq; figuras eiusdem conditionis, & similia repetit ad Theor. 19. inquiens. *Nam secatur tale strictum ex, A, in orbiculos, qui in, A, habent crassitiem, nullam in, D, duplam ipsius crassitiei in, F, sicut circulus per, D, duplus est, ad circulum per, F.* Perpendantur nunc verba Guldini posita pag. 146. quam cum prædictis concordent, Ait enim. *Partes autem rotandę quantitatıs quò longius distant à centro, seu axe rotationis, eò plus etiam quantitatıs seu potestatis describunt, cum maiorem faciant circuitum; & contra quò magis partes ad axem rotationis accedunt, hoc minorem faciunt ambitum, minusq; quantitatıs efficiunt.* Inuenire ergo oportet aliquod medium,*

dium, ita ut partes hinc inde, hoc est extrorsum, & introrsum, siue ultra, & cis descriptæ aliquo modo æquentur. Hoc ergo medium paulò post ait esse centrum grauitatis, hæc subiungens. *Partes enim illæ citra, vel intra circumferentiam, quam centrum grauitatis describit, in quantum ab æqualitate deficiunt, in tantum præcisè abundant illa ultra, siue extra illam circumferentiam descriptæ; & sic per compensationem exactè perueniuntur ad æqualitatem.* Ego tamen Guldino talia vnuquam non obiecißem, neq; enim inuentoris laudem omnino tollere putandum est, quod ipsius inuenti rude aliquod exemplar artifex præcognouerit. Quinimmo ea videtur esse infirmæ hominum mentis conditio, vt nisi aliquo extrinsecus præmonente excitentur, egrè quidquam egregij inuenire possint. Quapropter mirandum non est (vt innumera, quæ afferri possent exempla prætermittam) si Poetæ quos vel finxere Deos, non aliter inuentarum ab ipsis rerum gloriam asssecutos fuisse fabulantur. Vt Hercules cum purpureum colorem ex Cane Purpuram è mare eiectam in litore vorantem didicisset. Velut Mercurius visa Testudine, cuius longa vetustate exsiccati nerui percutientibus digitis, non inamenum reddebant sonum, lyrâ adinuenit. Seu Pan ex calamis à vento agitatis, sonumq; facientibus fistulam Pastoribus compegit. Quacumq; enim ratione vtile aliquid humanæ Reipublicæ alicuius opera reuocetur ad lucem, id non sine congrua inuentoris laude hominibus excipiendum esse reor.

CAPVT III.

In quo Sectio quarta, & quinta examinatur.

IN Sectione quarta, & in eadem Pag. 4. hæc subdit Guldinus.

Sectio IV. Verum circà hanc rem graui litigio doctissimorum virorum animi iure meritò diuidi possunt; nec satis video, quis tot dissidia tamquè diuersa, aut Aæcus aut Minos componat. Agnouit Cassalerius solidorum rotundorum, quemadmodum & Keplerus, genesim fieri ex rotatione planorum cir-

Aa

cà

cà axem. sed quomodo ex hoc principio reliqua quæ intendebat purè geometricè deduceret, hoc illi non uenit in mentem, licet rem ipsam iam auspicaretur, centrum uidelicet grauitatis. Sed præstat illum ipsum Caualerium audire in suos septem Libros sic præfantem.

De hoc litigio dicetur inferius, ubi an mea geometricè ostenderim pariter discutietur. Quod verò hanc viam Centri grauitatis non fuerim profecutus, mirandum non est, Naturæ enim ordini magis conforme existimaui prius figurarum dimensionem, posterius verò earundem Centrum grauitatis inuestigare. Prius enim figura intelligitur extensa quam grauis: unde præpostero ordine videtur fieri processus à Centro grauitatis ad figuræ solidæ dimensionem, ut facit Guldinus. Licet si spectemus ordinem doctrinæ id nihil officiat. His autem subdit in Sect. 5. huiusmodi verba ibidem Pag. 7.

Sectio V. Videt ergo Lector Argo licet minus oculus, illum non attendisse ad medium illud cuius ipse meminit Centrum grauitatis, id, quod ut nemo Geometrarum inficiabitur, puritati Geometriæ non solum nihil derogat sed & auget illam, & illustrat, sic Indiuisibilia illa ea ratione sumpta, & plerisque Philosophis, & Mathematicis omnibus aduersantur. Rotationem ipse etiam admittit, sed maluit cum Archimede integras, quam cum Euclide, & alijs semifiguras circumducere; ex quo fieri potuit, ut potius de Centris illarum, quam harum cogitationem susciperet. Itaque & præ Kepleri Transformationibus, & præ Caualerij Indiuisibilibus Centrum grauitatis in Geometricis iam dudum receptum palmam feret, & rectius Stereometriam Archimedis complet, feliciusque Geometriam promouet, quam vel Kepleri figurarum inconsuetæ. & quæ ipsa demonstratione magnoperè indiget, Transformatio, vel Caualerij Indiuisibilia à Geometris nondum recepta. Centrum grauitatis intra syncerioris Geometriæ limites consistit. pedemque figit. Tantum interest primis structuris solidum substruere fundamentum, & super immotam basim attollere, quæ annorum ferre vires, & aliqua lacerata, inconcussa durare possent.

Itaque summa dictorum est Keplerianam, Caualerianamque methodum nutare ob fundamenti debilitatem. Dicta

Indi-

Indiuisibilia à Geometris nondum esse recepta, immò ple-
 risque Philosophis, & omnibus Mathematicis aduersari.
 Centrum grauitatis firmiter hæere, per ipsumque rectius,
 quam per eorum methodum Stereometriam Archimedea
 compleri, Geometriam felicius promoueri, præ eorumque
 inuentis illud palmam ferre. Cui quidem Elogio libentius
 & ipse subscriberem, veluti inuentam ab eo Regulam pluri-
 mi facio, si eam aliqua meliori ratione confirmasset. Cum
 enim hoc sit maximum sui fundamentum non congruebat
 ipsum probabilibus tantum argumentis firmare, quod vt Re-
 thoribus proprium, ita Geometris insuetum est, sed demon-
 stratiuis rationibus stabiliendum erat. Quod autem hoc
 verum sit manifestat pag. 146. vbi versus finem de sua Re-
 gula generali, seu maximo fundamento hæc habet, nempe.
*Neq. alia demonstratione res hæc indiget. sed sufficit per indu-
 ctionem hoc ipsum si non in singulis, in plerisq. tamen, quas de-
 scribemus, ac componemus Potestatibus ostendere, aut certe
 quod nostra inuenta cum alijs aliorum aliter demonstratis præ-
 cisè conueniant innuere, vel tacitè etiam periti Geometra iu-
 dicio id relinquere.* Quod & repetit Pag. 174. dum dicit. *Ne-
 què hoc scrupulosius demonstrare necesse putamus hoc loco,
 cum & aliunde clarissimè constet Potestatem rotundarum
 quantitarum ex nostra compositione ortum ducentium, cum ea
 præcisè conuenire, & exactè, qua vel ab Archimede, vel ab
 alijs, paucarum licet respectu nostrarum, alio modo & inuenta,
 & demonstrata est. Quod ipsum sufficienter arguit veritatem
 nostrarum inuentionum vniuersalem, & nos hæc vtrò, tam-
 quam opus supererogationis, annexere volumus.* At beni-
 gne Lector, si ratio à concordantia petita cum aliorum
 Auctorum conclusionibus aliter ostensis, sufficit ad princi-
 pij stabilitatem, ac veritatem indicandam, iuxta Guldinum:
 cur eadem concordantia, quæ cernitur in Geometria Ind.
 iuxta eundem sufficienter non arguet huiusce Methodi veri-
 tatem? Cur neglectis tot Philosophorum ambagibus, tot
 litigijs, ab ijs ad Mathematicum tribunal eidem appellan-
 ti pro sui fundamenti veritate ipsam Mathesim laturam es-
 se sententiam haud sperare licebit. In eo autem quod spe-
 ctat ad Philosophos, & Mathematicos, quibus hæc Indiui-

fibilia aduersari pronuntiauit Guldinus, spero eosdem equius de his fore diiudicatuos, cum accuratius, quam ipse fecit, horum Indiuisibilium Methodum inspexerint, ac examinerint. Cumq; plures haud quidem gregarios Mathematicos horum Indiuisibilium cultores, ac fautores, in medium afferre possem, hos nunc silentio pretereundos esse duxi, vt, sponte patefactis eorundem Reipublice literariae per haec Indiuisibilia inuentis, illustriora appareant ipsorum testimonia.

CAPVT. IV.

Differitur circa Sectionem 6. 7. 8. & 9.

Prefatis tamquam preludij loco à Guldino premis ac cedit nunc ad dictae Geometriae doctrinam pressius expendendam in eadem Prefatione Pag. 8. primòq; aggreditur primam Libri Primi Propositionem, eamq; non fuisse rectè absolutà his probare contendit in Sectione Sexta, quae talis est.

Seccio VI. Antequam autem à Caualerio discedamus, licet ingenium, conatusque ipsius merito iudicem aeterna fama praconium mereri, neque tamen integrum mihi sit inspicere, multò minus diligenti lectione vestigare, atque excutere ipsius septem librorum propositiones; vnā tamen in homine ad Mathematica, vt mihi videtur nato à natura quoque ficto facto, lectoris animum dimouere posse iudicari, & est Prima totius Operis, ac proinde Primi libri Propositio, qua statim in vestibulo Operis sibi ipsimet tamquam Geometra iniuriam facit, & quasi Aegometra esset, Problema hoc soluit: Cuiusuis figura plane, aut solida, quae linea recta, aut plano probasi utatur, respectu huius verticem inuenire.

Adnotet hic Lector Guldinum denuò fateri se non potuisse diligenter inspicere, & excutere meas 7. Librorum Propositiones. Reprehendit autem me vt errantem in dicta prima Propr. tali ratione in Sectione Septima inquit tiem ibidem.

Sec. VII. Rectè quidem proponit, licet non verbo sed schemate

mate saltem indicet figuram illam flexuosa linea esse contentam base excepta.

Ad quod dico non opus fuisse verbo exprimere, quod per se patebat; neque enim illa linea recta esse poterat, cum deberet cum basi, quæ recta supponitur, spatium comprehendere, unde necesse erat flexuosam esse. His in Sectione 8. hæc in eadem Pagina superaddit.

Sectio. VIII. *Estosane figura illa plana, Parabola, solida autem Conois, iubet ipsè ut Problema conficiatur assumere quoduis extra basem punctum. per quod ipsi basi agatur recta, siue planum parallelum; hoc planum siue recta ait, tangit figuram propositam, vel non: si tangit punctum contactus (supponit enim unicum tantum contactus punctum esse) erit vertex questus, & habemus quod volumus,*

Aduertat autem hic Lector me non ita supposuisse unicum punctum contactus, ut velim lineam, vel planum tangens in pluribus vno punctis tangere non possit. Sed unicum assumpsi, quia quod de vno dicitur, de reliquis quoque subauditur. Deinde sic prosequitur ibidem in Sectione 9.

Sectio VIII. *Sed o Geometra cuius ad iudicis urnam lis hæc perorabitur? oculosne arbitros esse maioris quam ab intellectu totam causam cognosci? Si non tangit, prosequitur, linea ducta, vel planum siue sit intra, siue extra figuram, ad partem illam figuræ, quam tangere possit, paralleliter basi moueatur tandiu usque dum tangat figuram, & rursus punctum contactus ostendet verticem. sed rursus quero quo indicio cognoscere queam, quando. & ubi figura tangatur? Non hæc ratione, aut methodo docuit Euclides tangentem circulum ducere, non hoc modo Appolonius magnus ille Geometra Sectiones Conicæ tangit. Corollarium uero huius Propositionis longius adhuc à uera Geometria recedit. quæ per similia nequaquam Promota. sed Remota dici poterit. Iurè merito ergo hæc Propositio morosis necdum depulsis omnino morbi fastidijs, consistenti mihi librum è manibus excussit; quæ tamen si auspice Numine prius uigor membræ redierit, auidius uersabo, & quid sentiam palam edicam.*

Ut tanto igitur Guldini dubio satisfaciam, & ad huiusmodi maculam si qua est eluendam, noto primò ex dictæ Propositionis demonstratione certissimè concludi, possibile

le esse ducere lineam, vel planum tangens quamcunque oblatam figuram. Si enim dicta linea, vel planum in presupposito ibi motu continuè parallelo, nunc extrà, nunc intrà figuram reperitur, profectò aliquando ipsam tangere necesse est. Nec ipse Guldinus hanc possibilitatem inficiatur, ut patet ex illius dictis Pag. 348. num. 4.

Noto secundò hanc possibilitatem toti meæ Geometriæ Ind. sufficere, ut illius Propositiones perlustranti, ubi de vertice, vel contactu figuræ fit mentio manifestum erit. In his autem, si geometricam scrupulositatem attendere velimus, quotiescunq; usurpatur terminus ducendi tangentes, seu vertices inveniendi pro eo tantum possibilitatem subaudire debemus. Hoc est perinde ac si diceretur, intelligantur ductæ tangentes, vel inuenti vertices, &c. talesque esse supponantur. Quemadmodum & Archimedes Libro de Spiralibus etsi nesciat quomodo ducenda sit tangens Spiralem in illius termino, supponit tamen illam tamquam ductam, & per hanc hypothesim rectè ibi propositum concludit. Vnde hæc propositio quamvis in modum Problematis proposita nihil tamen obest dictæ Geometriæ veritati, illi enim & tãquam Theorema proposita satisfacere potuisset.

Tertiò, & ultimò concludo fuisse opus supererogationis ipsam proponere tamquam Problema, ut illud ea ratione absoluerem, qua poterat absolui, siue sit absolutio geometrica, siue non. Quemadmodum enim si quis peteret ut proposita quæcunq; linea, seu magnitudo geometricè mensuraretur per aliquam regulam generalem, fortè impossibile postularet, nisi ad species linearum, seu magnitudinum descenderet: ita in hoc Problemate nisi descendamus ad species figurarum impossibile erit solutionem propriè geometricam afferre. Hoc autem non negat ipse Guldinus, cum loco supracitato asserat hanc solutionem geometricam haberi non posse nisi de ijs, *de quorum ortu, ac genesi constat*, cuiusmodi sunt circulus, ac Sectiones Conicæ, in quibus Euclides, & Archimedes geometricè lineas tangentes ducere potuerunt. Non ergo carpere me debuit, quod rem non præstiterim etiam illius dicto impossibilem, sed potius excusare, quod illud ea ratione absolvere tentarim, quo
sol-

solubile erat, & oculo, ac manu, necnon quocumq; alio ad hoc conferre posset; in subsidium accito in modum Problematis proposuerim.

CAPUT V.

In quo proceditur à Sectione 10. usq; ad 15.

CVM Auctor Centrobarycæ Pag. 207. dixisset Globi Geometriam nondum esse perfectam, aut scopum desideratum attigisse, plurimaq; adhuc inuenienda superesse, innuit mensuram triangulorum sphericorum, quam tradidi in meo Directorio Pag. 3. cap. 8. sic in Sectione 10. ibidem loquutus.

Section X. Egregiè profectò incepit & desideratas partes complere, & scientiam ipsam excolere, & tam rem præstitit, quam multis annis in votis habui Bonaventura Canalerius superiori libro à nobis productus; Aream nimirum inuenire, ac capacitatem triangulorum quorumvis Sphericorum, datis magnitudinibus angulorum siue seorsim, siue simul sumptorum. Et licet deferente nos adhuc Circuli quadratura, area illa absolute dari nequeat, eius tamen proportionem ad integram Globi superficiem clarissimè demonstrat. In Opere enim illo quod Directorium Generale Vranometricum inscribit, Parte Tertia, Capite octauo, hanc tradit Propositionem. Superficies spheræ ad superficiem cuiuscunque Trianguli spherici in eadem descripti, eandem habet rationem, quam quatuor recti ad dimidium excessus summæ angulorum eiusdem trianguli super duos rectos. Pulcherrimum sanè, & utilissimum Inuentum, Canalerioque dignum, à quo iurè meritò expectandum sit quidquid adhuc in Geometria hac Rotundi, siue Globi desideratur. Ex hac autem Propositione tamquam Corollaria deducit proportionem primo totius Spheræ ad Pyramidem Triangulatam, cuius vertex centrum spheræ, basis vero triangulum in spherica superficie occupat. Secundo proportionem triangulorum ad inuicem. Deinde septem Problematis doceat transformationem trianguli spherici propositi in superficiem integram alterius spheræ; in superficiem sectoris eiusdem Spheræ; in Zonam Polarem, &

in

in non Polarem, Zonam in superficiem sectoris; Pyramidis supradictæ in aliam Sphærâ; & tandē, quod mireris ipsius Trianguli sphericæ Quadraturam. Siquidem quod suprà monuimus Quadraturam Circuli supposueris. Maçte animo Caualeri, & ab illis infinitis Indiuisibilibus, ad finita diuisibilia stylū cōuertere. Tibi debetur hoc Geometria Rotundi supplementum, qui attulisti à me diu desideratum complementum.

Circa hæc nil mihi dicendum occurrit, nisi quod propter hoc tenue inuentum tot in me collatis laudibus, cauendum illi erat ne in Galilei errorem laberetur, quem prius indicauerat pag. 3. Libri Secundi; cuius tamen humanitati fateor me plurimum debere. Post hæc autem cum pag. 325. rationem demonstrandi Keplerianam redarguisset, eamq; dixisset non esse omninò spernendam, huius deinde reddit rationem, subdens hæc verba in Sect. 11.

Sectio XI. *Hinc enim ansam arripuit, & occasionem Bonauentura Caualerius suam Methodum Indiuisibilium; qua Geometriam promotam esse indicat, producendi, ut ipsemet innuit in Prefatione illius libri, de quo nos fusius in Prefatione ad librum secundum Centrobarycorum nostrorum &c.*

De hoc superius satis dictum est. Quod autem innuo in Prefatione meæ Geometriæ non est me ansam, & occasionem arripuisse ex Keplero meam Methodum inueniendi, sed tantum de ea iam inuenta periculum faciendi in ijs solidis, quæ à Keplero in sua Stereometria fuerant promulgata.

In eadem pag. 325. examinat Auctor Theorema Tertium Kepleri in dicta Stereometria, in quo nititur probare cylindrum ad paralleleppipedum columnare rectangulum æquealtrū, quod cylindri corpus stringit quadratis suis basibus, & parallelis lateribus, rationem eandem habere, quam circulus ad circumscriptum illi quadratum, hoc est proximè quam 11. ad 14. Dicit enim hoc idcirco esse quia præfata solida sunt veluti quædam plana corporata, vnde accidunt illis eadem, quæ planis. His ergo sequentia verba ibidem Guldinus superaddit in Sectione 12.

Sectio XII. *Quod uerò subiungit Cylindrū, & columnam esse veluti quædam plana corporata, quamuis autem nimis breuiter dictum sit hoc pro viris Archimedeis, & Euclideis, hinc tamen*

tamen Cavalierius post plures speculationes, & cum paulò profundius rem contemplatus esset, in hanc tandem devenit sententiam, nempe ad rem suam lineas, & plana, non ad invicem coincidentia, ut facit Keplerus Prop. 2. sed æquidistantia assumenda esse, quemadmodum hic, ubi per plana parallela basi progreditur Keplerus.

Hic denuò arguit Guldinus me desumpsisse ex Keplero meam Methodum Ind. per plana corporata interpretās plana basi parallela. Sed quam longè absint hæc ab ijs, quæ in mea Geometria traduntur, agnoscent illi, qui eam sedulo perlegerint. Etsi enim iam inuenta Methodo illi adaptari possit quidquid videtur cum eadem aliquid affinitatis habere: prius tamen in tenebris latitabat, quam si Keplerus animadvertisset, & eam clarius indicasset, ac eadem usus fuisset, quod tamen nullibi apparet. Subdit deinde ibidem in Sect. 13.

Sectio XIII. Nescio tamen quid Cavalierius dicturus sit ad hoc, quod habet Keplerus Theoremate quarto, quod nos de Cylindro, & Cono demonstravimus Capite precedenti Prop. 2. ubi postquam demonstrasset Columnam Pyramidis æqualem eandemque basim habentis triplam esse: Idem dicit esse de Cylindro, & Cono, hæc subiiciens.

Post hæc autem affert verba Kepleri eiusdem Theorematibus pro Cylindri, & Coni demonstratione ab eo ordinata, moxque subiungit pro me responsionem, sic inquit.

Respondebit fortasse illum hic non uti planis infinitis, sed partibus corporeis, & sic se in sua permanere sententia.

Cui responsioni & ipse subscribo, hoc; tantum addo ex hoc Theoremate amplius apparere posse dicta plana parallela longè abfuisse à mente Kepleri, ad quæ si respexisset, multò melius, & uniusversalius dictum Theorema de Cylindro, & Cono demonstrasset, sicuti illum uniusversalissimè ostendi Libro Secundo dictæ Geometriæ Prop. 24. & ad Sectionem 1. Corollarij quartigenæ Propositionis 34. ut quoq; videre licet in Exercit. prima.

At si deniq; concederem Guldino, quod toties inculcat, nempe mihi aliquid luminis ex Operibus Kepleri, & Soueri, ad procedendum per hæc Indivisibilia parallela suppedita-

Bb

tum

tum fuisse (quod tamen omninò negatur) est ne hæc summa totius artificij huiusce Methodi ? nequaquã. Ea enim sterilis, & infecunda quodammodo remansisset, nisi miram eadem fertilitatem attulissent admirandæ quædam Propositiones, eiusdem peculiarem vsum declarantes. Præ cæteris autem insignes sunt Prop. 23. Libri 2. cum suis Corollarijs, quæ habetur quoq; in eadem Exerc. 1. pag. 46. & de qua differitur ibidem num. 28. & Prop. 33. eiusdem Libri, quæ inibi posita est pag. 69. & per quam proportionēs quæcumq; inter quaslibet figuras solidas inuentæ ad infinitas solidorum species extēduntur. In his ergo, studiose Lector, vtriusq; Methodi Indivisibilium nucleus concluditur, quæ vel nunquam dicti Auctores, vt ex eorum Operibus apparet, somniarunt.

Post supradicta examinat Guldinus Pag. 327. famosæ illius Propositionis Archimedæ demonstrationem Theor. 6. Stereometriæ à Keplero allatã, quæ talis est. *Convexũ sphericum est quadruplum areæ circuli maximi.* dictaq; ratione tamquam analogijs, & verisimilitudini innixa procul reiecta; refert se hanc Propositionem, ob ipsius præstantiam non vno modo tantũ, & ex intrinsecis principijs, sed tribus ostensuè demonstrasse. Deinde hæc prosequitur ibidem in Sec. 14.

Sectio XIV. *Dum hæc ipsa scripsissem in mentem venit, vt viderem qua ratione illam Cavalieri demonstrasset, & mox relictis omnibus, omnes, & singulas pagellas septem librorum Cavalieri cursim inspexi; sed nihil reperi, neque in Methodo Indivisibilium per 6. libros, & neque in septimo sine illa. Quamvis autem libros illos accuratius perpendere nec animus, nec tempus, nec vires suppetant: Ipsum tamen hanc demonstrationem omisisse miratus sum, & plurimis suis, ac infinitis Indivisibilibus, vnicum Indivisibile, hoc est Centrum gravitatis, tandiũ præfero, donec melioribus instructus sententiam mutem.*

Nulquam ego hisce Indivisibilibus ad curvarum superficiẽ mensuram vsus sum, adhucq; incompertũ mihi est an ad eas vsq; pertingere possint, vnde egregium Guldini hoc inuentum, quod ad eas pariter inquit se extendere, permagni

gni quidem facio, at & pluris facerem, si aliquid pro suæ Regulæ generalis demonstratione circa rotundas superficies supplementum attulisset, quo omni circa illius veritatem in ipsis rotundis superficiibus vniuersis ambiguitate Lectoris mens expoliari posset. In hoc enim eiusdem Centrum grauitatis præstare Indiuisibilibus fatendum esset, quemadmodum in alijs quamplurimis illi præstare Indiuisibilia, qui eadē sæpius ritè pertractauerit, haud puto inficiabitur.

Afferit postremo Guldinus pag. 331. in Sec. 15. de Kepleriana, ac mea Methodo huiusmodi iudicium, inquiens.

Sectio XV. Sed ut dicam paucis quod sentiam, ut & istā Keplerianam, & Caualerij Methodum (de Caualerij modo hic quicquam decisum volo, rem in aliud tempus si Deus vitam, ac sanitatem dederit, reseruans) iudico ad inuentiones Geometricorum Theorematum & Problematum plurimum valere, ita ad demonstrationes eandem adhibendam esse, si alia suppetant Geometris iam probata media, nequaquam suadeo.

His ergo Indiuisibilibus, ceu quibusdā Canibus venaticis Geometras saltem ad inueniendum uti posse, ad idq; plurimum valere confitetur. Verum si huius doctrinæ principia falsa sunt, ut ipse Guldinus Pag. 341. ad Prop. 2. probare contendit; quomodo in indaganda veritate, ad cō fideliter, ac veraciter, ut experientia docet, ac cum aliorum inuentis concordantia, se gerere solent? deberet enim per hęc procedens studiosus in paralogismos plerūq; deuiare, quod tamen rectè ijs videnti numquam contingit.

CAPVT VI.

Discurritur super Sec. 16. & 17.

CVm in superioribus Sectionibus Auctor Centrobarycæ quasi perfunctoriè circa meam Geometriam verba fecisset, accedit nunc ex professio ad illius Methodi fundamenta examinanda. Quapropter ad earum difficultatum fastigium, quæ ipsius pulsarunt animum iam deuentum est, quibus ut viam itererneret, sic Libro Quarto Cap. 5. Pag. 339. præloquutus est in Sec. 16.

Bb 2

Dum

Sectio XVI. Dum ea omnia, quæ hætenus scripta sunt Censoribus, pro ut in Societate nostra moris est, tradita essent, in quibus inter reliqua, in Præfationibus præsertim libri Secundi, & Tertij, mentionem fecimus Bonaventura Caualerij, dato illo breui temporis interuallo, quo scripta recognoscerentur, venit in mentem denuò inspicere ipsius Geometriam Promotam; non ea quidem accuratione, quam mihi proposueram post editos hos tres de Centro grauitatis libros, ut in Appendice deinde meam sententiam de illa promerem; sed obiter tantum considerare, ac perpendere. Quod dum facerem, vidi commodè me aptissimèq; & posse, & debere Libro Quarto quatuor constanti Capitibus, Quintum adiungere, quo per paucas aliquas Propositiones, & per modum quasi dubitationis præluderem, viamque sternerem futuro exactiori examini. Quid autem sentiamus de Prima Propositione Libri Primi Caualerij, eiusque Corollario satis clarè diximus in Præfatione Libri Secundi Centrobarica nostre, qua cum etiam reliqua, quæ in Libro Primo continentur missa nunc facimus accuratiori ea, ut diximus, considerationi reseruantes. Gradum ergo ad Secundum Librum facimus, in quo videtur Auctor præcipua iacere velle totius nouæ doctrinæ fundamenta.

Ex his ergo satis intelligi potest paulò hæc accuratiori diligentia, quam superiora, ab eo producta fuisse. Adhuc enim se dubitatiuè loqui, meaq; inuenta exactiori examini ab eo reseruari hic quoq; protestatur. His tamen non obstâtibus, transiens ad Propositionem primâ in qua, *Pauca quadam à Caualerio Libro secundo præmissa expenduntur*, tali me censura reprehendit, sic inquires in Sec. 17.

Sectio XVII. Auctor noster, qui Nouam suam Geometriam Methodum vocat Indiuisibilem nonnullis visus est Methodum illam non satis methodicè proposuisse; immò qui non solum imitari conatus sit Bartholomæum Souerum, sed & Doctrinam ipsius Lib. 5. de proportionibus curui ad rectum promota, traditam (cuius nomen, quod ipse miror, in Geometria promota apud Caualerium non inuenio) magis vniuersalem reddere, methodum tamen ipsius claram, & Geometricam non adhibuerit, sed res ipsas Geometricas obscuris quibusdam difficultatibus inuoluerit, quod an verum sit, nec ne obiter tantum, & per paucis considerare constituimus.

Itaq;

Itaque in præfatis verbis dicitur nonnullorū sensū extitisse me nec methodicè, nec clarè, nec geometricè processisse, Verum si præfati viri, nō accuratius quam Guldinus meam Geometriam inspexerunt, non miror eosdem talia proferre. At si diligentius eam perlustrarunt, hos rogo ut quæ hic responsionis loco à me afferuntur, pariter aspicere dignentur. Eos enim non tam acriter ac ipse retulit de hac Methodo iudicatos esse spero.

Quod si Guldino, alijsq; ab eo prænominatis, qui forte veluti & ipse non ea, qua congruebat diligentia, meam Geometriam obuoluerunt, illius dogmata vel non methodicè tradita, vel obscura visa sunt minimè mirandum erit. Si enim eorum, qui Archimedee doctrinæ sedulò incubuerunt, nonnulli, ut idem Guldinus testatur Pag. 289. *de hac Archimedis quasi obscuritate quas res deposuerunt, quos inter Keplerus, qui lectionem ipsius vocat spinosam.* Quod & Clauij, & Petri Rami dictis ibidem confirmat: nunquid illis, qui hos abditos Geometriæ recessus; illiusq; penitiora, inerti quadam, ac negligenti animi tensione, hoc est non accuratè scrutati sunt, hæc natura sua obscurissima clara videri potuerunt? Sed hanc maculam verba Davidis Riualti in Archimedis defensionem ab eodem allata, satis pariter eluere possunt, quæ & ab eodem Guldino ibidem afferuntur, sunt autem huiusmodi. *Profecto de rebus sublimibus, & natura sua abstrusis, sciuntis que à communi hominum capto non potest quispiam quicquam precipere, quod per obscurum non sit, scilicet si statim obuium uno, aut altero uerbo excipiat. Sensus ad insolita horrent, imaginatio hebescit, intellectus obtunditur, & iudicium difficile assentitur, unde obscuritas asstimatur. Præterea res eximia propria methodo tradi debent, ne si facilius, quam par sit offerantur, contemptui sint. Raritas rerum, & aquirendi difficultas illis pretio sunt, ut meritisimo iure præstātes viri diuinas suas adinventiones, & Archimedeis similes emittant, decora quadam, & venerabili facie, tamen seuera, quæ primo intuitu honorem sibi, & reuerentiam conciliet, ne spernantur.*

Quod verò geometricè non processerim, in sequentibus restat discutiendum: de Souero enim in superioribus satis superq;

superq; dictum est, & non debuiffe de eo in mea Geometria per me mentionem fieri pariter comprobatum.

CAPVT VII.

Continens Sectiones 18. 19. 20. & 21.

Accedit nunc Auctor noster propius ad examinandam Libri Secundi meæ Geometrię doctrinam, incipiens à Definitione prima, quā Studiosus videre potest in Exerc. prima Pag. 6. contra quam sic arguit in Sec. 18. Pag. 340.

Sectio XVIII. Cum ergo Definitione prima Libri secundi ponat inter duo plana parallela moueri planum, alteri plano figurato inter duo illa plana intercepto, insistent, iisdem planis semper æquidistanter, de hoc plano moto, eiusque effectū sic definit Auctor. Singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes sectiones plani moti, & datæ figuræ simul collectæ, vocentur Omnes lineæ talis figuræ, &c. Hic ergò dubito, immo sine dubio pronuncio. planum motum nullam describere lineam, nisi fortè per duo extrema puncta. Planum enim motum cum ex suppositione antequam moueatur, aut insistet plano, aut illud secet in linea tantum, mota illa linea describet nihil aliud, quam superficiem, ut ergo superficies illa sit, & geometricè loquendo uocari possit, Omnes lineæ talis figuræ, hoc meo iudicio à nullo obtinebit Geometra, numquam enim superficies uocari potest plures, uel omnes lineæ; cum linearum multitudo quantumuis maxima, ne minimam quidem componere queat superficiem: multò minus admittendum est Corollarium annexum.

Ad maiorem dictę primę definitionis intelligētiam supponamus quadratum, per cuius duo quæuis opposita latera sint ducta duo indefinita plana ipsi quadrato perpendiculariter erecta, quæ & consequenter parallela erunt. Rursus cōcipiamus alterum istorum æquidistantium planorum moueri continuò versus reliquum, ipsiq; æquidistanter, donec illi congruat. Hoc ergo motum planum quolibet momento secabit planum quadrati, communisq; eorum sectio erit recta linea per Prop. 3. Vndecimi Elem. Quapropter
fin-

singulæ rectæ lineæ in toto hoc motu vt sic in dato quadrato designabiles, seu descriptibiles, à me dictæ fuerunt in dicta Definitione prima. *Omnes lineæ eiusdem quadrati.* Sicuti si pro quadrato cubum supponamus, & in eiusdem oppositis duabus quibuscunque faciebus ducta duo indefinita, oppositaque tangentia plana (quæ erunt parallela, cum tangant in faciebus parallelis) quorum vnum moueatur continuò versus reliquum, eidemque equidistanter, donec illi congruerit: per hoc motum planum quolibet momento designabitur in ipso cubo figura, quæ erit quadratum. Vnde singula quadrata, quæ in toto hoc motu fieri intelliguntur in ipso cubo à me dicta sunt. *Omnia plana eiusdem cubi.* hoc est speciali nomine. *Eiusdem omnia quadrata.* Cum ergo nulla sit ex præfatis lineis assignabilis in dicto quadrato, & nullum ex præfatis quadratis assignabile in cubo, per quæ non transeat aliquando, seu in aliquo momento motum planum (qua ratione dico ea ab ipso describi) ideo ea omnia, ita mente collecta, vt nullum excludi supponatur, vocaui. *Omnes lineas, & Omnia plana.* Quod autem dixi ea fieri in toto motu, subaudi in omnibus instantibus temporis, quo fit totus motus. Apud eos enim, qui sustinent continuum ex Indiuisibilibus componi, descriptio dictorum Indiuisibilium erit descriptio superficiæ. Apud eos verò, qui vltra hæc Indiuisibilia ponunt aliquid aliud in ipso continuo, illud dicendum erit, describi in ipso motu. Quemadmodum reuoluto circulo super recta linea, cum eam quolibet momento tangat in puncto, omnia illius puncta intelligentur connotari, seu designari à moto circulo in omnibus instantibus temporis, quo fit totus motus; at ipsa linea in ipso motu describetur. His subdit Auctor pariter subsequencia circa Def. 2. in Sect. 19. & in eadem Pag. 340.

Sectio XIX. *Eiusdem farina est Definitio 2. cum suo Corollario de omnibus planis propositi solidi, ait enim.* Singula plana, quæ in toto motu concipiuntur in proposito solido, simul collecta, vocentur *Omnia Plana* propositi solidi &c. *Poterit aliquis in sua definitione uocari uelle lapidem & animal sensibile, hoc ut à nemine obtinebit. ita per motum illum*

cum

cum fiat solidum, illud dici numquam cum ueritate poterit omnia plana propositi solidi.

Nunquam autem ipse dixi solidum, & omnia plana idem esse, unde hoc non est perinde ac lapidem uelle vocare animal sensibile. Prosequitur deinde Auctor sic obijciens Definitioni tertiæ in Sect. 20. Pag. 341.

Sectio XX. *Quod duæ præcedentes Definitiones determinant de omnibus lineis rectis in figura plana comprehensis, & secunda de omnibus planis in solido contentis, hoc ut, mihi quidem uidetur, definitio tertia concludere uult de omnibus punctis in linea contentis; ut nimirum concipiamus in linea descripta à puncto aliquo, aut aliquibus, transitus, ut ille uocat, hoc est in motu, ut puncta in illa linea uocentur, Omnia puncta transitus propositæ lineæ. Verum has tres definitiones nullus admittere potest Geometra, & multò minus Corollaria, quæ definitionibus annectuntur: Verbo sese expedit Geometra, & dicit, punctum, lineam, planum, in motu semper esse in maiori loco se, quod etiam Philosophi concedunt de omnibus mobilibus, & sic punctum post se non relinquit punctum, sed lineam; linea superficiem, superficies solidum. Ab hoc uero ut solido Geometrarum fundamento nulla me unquam dimouebit Methodus neque diuisibilem, neque Indiuisibilem.*

Ad hæc nihil præter superius allata addendum est, non enim in his est alia difficultas à prædictis.

Post hæc aggreditur duo sequentia Postulata, quæ uideat Lector in dicta Exercit. 1. pag. 14. ubi reliquæ pariter habentur Propositiones à Guldino examinatae. Dicit ergo in Sect. 21. in eadem Pag. 341.

Sectio XXI. *Post definitiones (quas omnes perpendere uolumus) sequuntur duo Postulata. Primum nimirum. Congruentium planarum figurarum omnes lineas esse congruentes, & solidorum omnia plana; si intelligit superficiem congruere superfici, & solidum solido concedimus, de omnibus lineis, & omnibus planis, nihil scimus, quod idem dictum uolumus de Postulato secundo.*

Ad horum discussionem iterum consideremus præassumptum quadratum, cui aliud quadratum æquale superpositum intelligamus, eidem congruens. Motum ergo planum
pro

pro vna recta duas rectas sibi inuicem congruentes quolibet momento designabit. Vnde quod de duabus ad libitū assumptis verificabitur, de reliquis eadem ratione verificari concludemus. Sic namq; in figura, quam volumus ostendere esse circulum, assumptis duabus vtcunque rectis lineis ab eo puncto ductis, quod volumus probare esse centrum circuli, & ostendentes eas esse æquales vni tertiæ, de infinitis pariter, quæ ab eo puncto ad periphæriam duci possunt id tamquam probatum recipitur. Qua ratione ergo concipimus omnes lineas, omnia plana, eadem ratione congruentiam apprehendimus, vel si mauis dicere congruibilitatem, si ea omnia actu assignarentur.

C A P V T. VIII.

Examinantur Sectiones 22. 23. 24.

POST Definitiones, & Postulata procedit Guldinus ad Propositiones aliquas ex Libro Secundo examinandas, & incipiens à prima, quæ talis est nempe. *Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus; & quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes.* sic inilat contra eandem in Sec. 22. in eadem Pag. 341.

Sectio XXII. *Hac Propositio absolutè negatur, & hoc oppono argumentum; Omnes lineæ, & omnia plana vnius & alterius figure sunt infinitæ, & infinita; sed infiniti ad infinitum nulla est proportio, siuè ratio. Ergo. Tam maior, quam minor clara est apud omnes Geometras, ut pluribus verbis non indigeat. Ergo conclusio Caualeriane Propositionis falsa est.* Subdit deinde. *Vidit hoc oculatissimus vir & ex Lyncea descendens Progenie Bonauentura Caualerius, quare demonstrationi subiungit Scholium sic incipiens. Hoc verò Scholium ibidem & ipse affert.*

Recolat hic Lector, quæ superius dicta sunt Cap. 5. ad Sectionem 15. vbi Guldinus fatebatur meam Methodū, quæ præfatam Propositionem tamquam primarium fundamentum supponit, ad inuentionem Theorematum, & Proble-

C c

matum

matum plurimum valere: si enim illa absolutè falsa est, ut apertè hic pronuntiauit, non nisi falsas conclusiones parere poterit, & tamen nihil adhuc falsi ex tali methodo oriri animaduersum est, neq; oriri poterit, si modo rectè, hoc est iuxta præscriptas regulas adhibeatur. Ad hanc autem difficultatem enodandam, concedo infiniti ad infinitum nullam esse proportionem, si loquamur de infinito simpliciter, & vndequaque: at de illis infinitis, quæ non sunt vndequaque infinita, sed secundum quid finitatis subeunt rationem, dico posse comparari ea ratione, qua finitatem sortiuntur, cum ex ea parte illis possit fieri additio, & subtractio, quod non contingit in infinito simpliciter. Modo omnes lineæ, & omnia plana iam dicta sunt de genere infinitorum secundum quid, etsi enim quoad numerum sint infinita, quoad magnitudinem tamen, cum singulæ lineæ, & singula plana finita sint, omniumq; aggregata vndequaque limitibus circumscripta, quapropter clarè intellectus agnoscat illis posse fieri additionem, & subtractionem, qualiscumq; sit numerus Indiuisibilem, quæ addi, vel subtrahi concipiuntur, idè hæc poterunt inuicem comparari. Hoc ergo in dicta Prop. prima probatum est, dum res ad huius Axiomatis eidentiam reducta fuit, nempe. Totum est maius sua parte. Esse enim hæc infinitarum linearum, vel planorum aggregata, non in spatio infinito, sed finito, cum illud vndequaque limitibus claudatur (quod fortè nulli alteri infinitorum generi conuenit) efficit ut mens sine hæsitatione in his totum, & partem distinguat, quidquid sit de illis infinitis, quæ non vndequaque sunt limitibus circumscripta, & in quibus idcirco rationem totius, & partis non tam clarè distinguere possumus. Si ergo appoluerimus ex. gr. præconsiderato quadrato aliud quadratum æquale, nonne manifestum erit omnes lineas primi quadrati iterum sumi in secundo quadrato, & ideo vtrasq; simul sumptas vnius tantum esse duplas, licet vtriusq; aggregati numerus ignoretur? Hic enim perinde fit ac apud Algebricos, qui nesciētes; quæ sit, quam dicunt Radicem, Latus, aut Cossam, seu quales ineffabiles radices, tamen easdem multiplicantes, diuidentes &c. deniq; in quæsitam inuentionem quasi per has obscuras

ras ambages manuducuntur. At contra id quod dixi, magnitudinem nempe omnium linearum, & planorum &c. posse comparari sic inuehitur Guldinus in Sec. 23. Pag. 342.

Sectio XXIII. Dicit ergo Cavalierius, se non comparare numerum omnium linearum, quem ut recte dicit ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adequatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat: Congruentia qualis sit, esseq; possit diximus Propos. precedenti Num. 5. Magnitudo autem, quæ adequatur spatio ab eisdem lineis occupato, duplex est aut est id spatium, quod occupant lineæ in motu, & hoc est tota superficies proposita, quam lineæ pertransit sine ulla dependentia à lineæ non mota, vel stabili, & hoc concedimus. Aut est id, quod ipse cuincere vult spatium, in quo concipiuntur esse lineæ indefinitæ (abhorret enim a vocabulo infiniti) quæ lineæ occupent illud spatium; & negamus, quia nihil aliud occupant nisi longitudo, quæ omnes longitudo, simul sumptæ, quam efficiunt spatium, sine latitudinem.

De congruentia dictum est superius. Quoad magnitudinem verò, iuxta componentes Continuum ex Indivisibilibus, respondendum erit magnitudinem omnium linearum oblatæ planæ figuræ vnum, & idem esse cum magnitudine, superficies. At iuxta aliter sentientes, concedam pro spatio ab omnibus lineis occupato, pressè loquendo, intelligendum esse aggregatum ex meris longitudinibus, quarum singulæ singularum linearum tamquam loca concipi possunt, horumq; locorum magnitudini dicam adequari omnium dictarum linearum magnitudinem. Hoc tamen non obstante cuincitur propositum: quia cum horum locorum, & subinde omnium linearum aggregatum ex nulla parte excedat figuram, cuius dicuntur omnes lineæ, sed eius limitibus coerceatur, idcirco illi poterit fieri additio, vel subtractio, & subinde huiusmodi aggregata erunt inter se comparabilia. Hoc verò confirmaveram in præfato Scholio, quod habetur in Exerc. prima Pag. 23. à partibus, in quas continuū est separabile, etsi enim illæ sint infinitæ (cum sit iuxta Philosophos diuisibile in semper diuisibilia) hoc tamen non obstante continua esse comparabilia conceduntur. Vnde à pari quamuis huiusmodi Indivisibilia sint infinita, non tol-

letur tamen quin eorum aggregata sint ad inuicem comparabilia. Cui confirmationi sic occurrit Auctor noster in Sec. 24. & in eadem Pag. 342.

Sectio XXIV. *Respondeo continuū esse diuisibile in infinitum, non autem constare partibus infinitis actu, sed tantum in potentia, quæ nunquam exauriri possint; partes autem illæ inter Indiuisibilia comprehensæ nō sunt, nisi ipsa assignentur Indiuisibilia. Itā ut si assignetur in figura plana una linea, perimetrum figure utroque termino suo attingens, vel secans, diuidet illa continuum in duas partes quæ duæ partes & componūt suum totum. & comparari possunt cum alijs partibus siuē huius, siuē alterius figure siuē duabus siuē tribus siuē pluribus per alias lineas assignatis quæ etiam simul sumptæ componant suum totum: quia partes tam huius quam alterius figure multiplicari possunt, itā ut hæ illas superent, & contrā illæ has, quod idem de lineis assignatis, & simul quoad longitudinem sumptis dictū volo; ac proinde ex definitione Quinta Quinti Elementorum dicuntur habere inter se rationem. Et sic si sumatur aliqua congeries, siuē linearum, siuē partium planæ alicuius superficiæ, erit illa finita, & inter se rationem habebunt, linea nimirum cū lineis, & partes cū partibus, non autem lineæ cū partibus. Quare cum non detur, nec dari possit congeries omnium linearum, aut omnium partium posibilibum, ergo nec proportionem inter se habere possunt, neque lineæ cū lineis, neque partes cū partibus quæ enim non sunt, nec ullo modo esse possunt, comparisonem non admittunt. Plura, in re apud omnes Geometras clarissima, non addimus.*

His tamen nō obstantibus, dico si comparentur inuicem continua, pari ratione Indiuisibilium aggregata comparari posse, nec ob stare quod actu continuum non sit resolutum in suas infinitas partes. Demus enim ex. gr. quod præfata, quæ iuxta posuimus quadrata, per impossibile de facto in suas infinitas partes resolverentur, certè aggregata ex his infinitis partibus actu resolutis non essent quantitate diuersa ab ipsis quadratis, totum enim est æquale oninibus suis partibus simul sumptis. Cum ergo ipsa quadrata sint comparabilia, etiam istarum infinitarum partium aggregata essent comparabilia. Ergo & Indiuisibilium licet infinitorum aggre-

aggregata pari ratione poterunt ad inuicem comparari, non enim obstat infinitas, vt & supra alia ratione probabatur. Non est autem necesse hæc omnia actu assignari in cōtinuo, vt eorum aggregata comparentur, sed sufficit intellectum ex aliquibus numero finitis assignatis, ipsa aggregata concipere, eorumq; proportionem tamquam ineffabilium radicū in lucē extrahere, vt eam colligat pro ipsis continuis, seu figuris. Quod in omnibus dictæ Geometrię demonstrationibus liquidò apparet, in eis enim assumptis tantum quatuor vt cumq; magnitudinibus ex infinitis Indiuisibilibus, quæ forent considerata, nempe ea ratione, qua declaratur in Exerc. prima num. 29. colligitur proportio quę sita. Vt ex. gr. dum in Prop. 5. Libri 2. quę posita est in eadem Exerc. prima Pag. 31. probare intendo parallelogramma æqualia esse vt bases, duco basibus parallelam vt cumq; rectam lineam indefinitā, cuius portiones in dictis parallelogrammis conclusas ostendo esse vt bases: cū verò sit eadem ratio de reliquis, hocq; intellectus sufficienter comprehendat, absq; eo quod sit illi necesse actu omnia hæc Indiuisibilia in ipsis parallelogrammis assignare, ideo concludo omnes lineas dictorum parallelogrammorum (subintellige si omnes forent actu assignatæ & subinde ipsa parallelogramma esse vt bases.

CAPVT VIII.

Proceditur à Sectione 25. vsq; ad 29. inclusiue.

A Vctor noster in sua Prop. 3. trāsīt ad examinādas Prop. 2. & Tertiā eiusdē Libri Secundi cū suis Corollaris, vt Pag. 343. videre licet. Dicit enim in Sectione 25. Pag. 343.

Sectio XXV. Propositio secunda sic se habet. Aequalium planarum figurarū omnes lineę sunt æquales, & æqualium solidarū omnia plana sunt æqualia, regula quauis assumpta. Iam diximus omnes lineas dari non posse, sed neque per imaginationem assumi, quare respuunt ipse æqualitatem, vel rectius illas æqualitas aspicere non potest. Si sermo esset de lineis finitis numero equalibus, ipsæ simul sumptæ in quauis figura seorsim, & æquales possent esse, & inæquales, pro specie figurarum,

varum, & linearum varijs modis in ipsis ductarum, sed hoc non vult Auctor. neque ad ipsius facit propositum. Quod ergo de infinitis ante diximus, & hic repetita volumus.

Ad hæc autem per superius dicta patet responsio. Subdit deinde ibidem in Sec. 26.

Sectio XXVI. Iucundum addit Corollarium, in quo præter alia ex hac Propositione deducit quasi per exemplum, si cylindrus planis secetur, & per axem, & eidem æquidistantibus ubi creatur parallelogramma; secetur & alijs basi æquidistantibus ubi fiunt circuli, dicit omnia illa parallelogramma simul sumpta equalia fore omnibus circulis simul sumptis. Sed idem dicendum est quod de lineis diximus, infinita scilicet plana esse, aut dari non posse: si sunt finita poterunt esse equalia, vel inæqualia. Itaque Propositio hæc cū suo Corollario non subsistit.

Non ab re hoc Corollarium iucundum appellavit, quod & admirabile dicere poterat. Licet enim hic infinitorum circulorum quodammodo intueri quadraturam, quod de vno tantum non adhuc protulit Geometria. Prosequitur deinde ibidem in Sectione 27. sic loquendo.

Sectio XXVII. Propius iam accedit, ad iaciendum, stabilendumque fundamentū pro sua Nova Geometria, unde tertio sic proponit. Figuræ planæ habent inter se eandem rationē; quam earū omnes lineæ iuxta quamvis regulam assumptæ, & figuræ solidæ, quam earum omnia plana iuxta quamvis regulam assumpta. Pro demonstratione proponit circulum, A & triangulum, D, & sic argumentatur: Si continuum componitur ex Indivisibilibus, patet absque alia demonstratione figuram, A, ad figuram, D, esse ut omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non esset, nisi ipsa Indivisibilia comparare. Si hoc negetur, sumit figurarum propositarum æquē multiplicēs, & sic dependenter à Propositione antecedente, eiusque Corollario propositum vult concludere; sed quia antecedens Propositio cum suo Corollario nihil probat, etiam in hac Propositione nihil probatur. Ad quam absolute respondemus figuras posse habere ad inuicem rationes, non autem omnes lineas, aut omnia plana unius ad lineas omnes aut omnia plana alterius, hoc est infiniti ad infinitum. De finitis ex supradictis patet responsio.

De

De hoc satis superius dictum est. Addit deinde ibidem in Sec. 28.

Sectio XXVIII. *Sed audiamus Corollarium.* Liqueat ex hoc *inquit*, quod ut inueniamus quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ, vel solidæ sufficiet nobis reperire, quam in figuris planis inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, & in figuris solidis earundem omnia plana, iuxta quamvis regulam assumpta, quod Nouæ huius meæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum. *Verum hoc fundamentum nullum est, nullius enim figuræ dari, aut assignari possunt omnes lineæ, aut omnia plana; quare per ea, quæ nullo modo sunt, aut esse possunt, nihil probare possumus.*

Hoc pariter non alia responsione indiget. Præfatis verò continuat hic Auctor Scholium subsequens in Sectione 29. Pag. 344.

Sectio XXIX. *Cum fundamentum præcipuum huius nouæ Geometriæ meo iudicio nõ subsistat in hac Methodo ulterius pro hac vice progredi nolumus: ipse verò Auctor licet sua fundamenta adeo firma, atq; inconcussa in Præfatione Libri Septimi de prædicet, ut velut adamantina summorum ingeniorum tamquam arietum ictibus pulsata, ne minimum quidem nutantia agnoscantur, & subdit hoc deberi Mathematicarum dignitati. An id ego sufficienter præstiterim, aliorum iudicio relinquam; unicuique enim hæc perlegenti, ex animi sui sententia indicare licebit. Hac fretus inuitatione ausus sum, ea, quæ obiter occurrebant in medium proferre prout feci hætenus: & adhuc fortassis facturus sum. Caterum ipse post aliqua, quæ ad propriam pertinebant defensionem, & ego in supradictis attuli, ex aliorum mente sic loquitur. Hic dicendi modus adhuc videtur subobicurus, durior quam par est euadit hic omnium linearum, seu omnium planorum conceptus; quapropter hunc tuæ Geometriæ, ceu Gordium nodum, aut auferas, aut saltem frangas nisi dissoluas. Et paulò post. Interim qualiscumque mea fuerit illius (nodi) tentata dissolutio, ipsum tamen in præsentis Libro, nouis alijs denuò stratis fundamentis, quibus ea omnia, quæ Indivisibilem Methodo in antecedentibus Libris iam ostensa sunt, alia ratione ab infinitatis exempta conceptu comprobantur, omninò è medio tollendum*

dum esse censui. Itaque hoc Septimo Libro omnia ea, quæ in prioribus sex Libris per Methodum Indivisibilem probata sũt, independenter ab ea, novis alijs denuò stratis fundamentis promittit se demonstraturum. Relictis ergò tantisper sex prioribus Libris, ad hunc Septimum inspiciendum, etsi quæ occurrent difficultates, eadem, quæ supra breuitate, & synceritate, annotandas me accingo: quem ità legere incipiam, ac si solus, ut promittitur, subsistat, & absque precedentibus intelligi queat.

In hoc ergo Scholio patet Auctorem censuram complere circa Libri Secundi meæ Geometriæ has paucas Propositiones, ceteris relictis, quæ reperiuntur tum in eodem Libro Secundo, tum in Tertio, Quarto, Quinto, ac Sexto, ubi ingens Propositionum est numerus ex dictis fundamentis deductarum. Miror autem hunc Auctorem ex tot vel vnâ saltem non delegisse, quam ostenderet expressè falsam esse, cum tamen in tot cõclusionibus saltem aliqua falsa esse deberet, si earum principia falsa sunt. His ergo cum eo inposito fine, transibimus in subsequenti Cap. ad eiusdem examen Libri Septimi.

CAPUT X.

Expenduntur Sectiones 30. & 31.

AD eorum intelligentiam, quæ à Guldino contra Librum 7. meæ Geometriæ afferuntur satis erit Lectorem in Exerc. Secunda pro nunc videre Prop. primam dicti Libri 7. quæ ponitur Pag. 88. quæ superaddita fuit, ut conceptus infinitorum Indivisibiliũ posset euitari, prout iuxta posteriorem Methodum ibidem explicatum fuit. Ille ergo in Prop. 4. & in eadem Pag. 344. proponit se velle. *Quid de prima Propositione Libri septimi sentiendum sit aperire*, quare sic incipit in Sec. 30.

Sectio XXX. *In hac propositione prima Auctor sic loquitur.* Figuræ planæ quæcumq; in iisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscunque rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt. Et figuræ

ræ solidæ quæcumque in eisdem parallelis constitutæ, in
 quibus ductis quibuscumque planis eisdem planis paral-
 lis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunque sic ducti plani
 in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se
 æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ,
 tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam
 iuxta regulas, lineas, seu plana parallela, in quibus esse sup-
 ponuntur, cum hoc fuerit opus explicare. *Conatur hoc de-*
monstrare per suprapositionem tam in planis, quam in solidis,
verum si pressè, ac geometricè loqui velimus, nihil demonstrat.
Nam cum ipse figurarum qualitates non solum nō determinet,
sed eas omninò irregulares, ac diversissimarum specierum ca-
uas, plenas, inflexis, varijsque modis sese habentibus terminis
comprehensas, esse posse admittat, quis nobis indicabit (loqua-
mur primò de figuris planis tantum) quādo altera alteri super-
ponitur, an sibi congruat nec ne? Quis erit iudex manusuè,
an oculus, aut intellectus? Respondebitur intellectum fore iu-
dicem (nam & tactus, & visus hinc excluditur) & idcō condi-
tionem necessariā positam esse hanc; ut æquales sibi que corre-
spondentes linea rectæ sibi superponantur, hæ enim cum aqua-
les sint, sibi congruant, intellectu iudice. Esto sint sibi supra-
posita, & congruant, quid concludetur? Lineas esse æquales
Sed hoc habetur etiam ex hypothesi, neque hoc queritur. Su-
perficies inter rectas lineas parallelas interceptas esse æquales?
Nequaquam: nihil enim intellectu constat de binis alijs ter-
minis, qui has particulares superficies unā cum duabus rectis
parallelis comprehendunt, an sibi congruant nec ne, cum di-
uersimodè inflexarum linearum esse possint. Sed quod de una
particulari superficie dicitur de quibusvis & infinitis alijs par-
ticularibus superficiebus dicendum est. Ergò de lineis rectis
tantum, nihil autem de superficiebus aut planarum figurarū
propositarum æqualitate concluditur. Ergò, ut diximus, pro-
positum de figuris planis non demonstratur.

Obicit ergo me nihil demonstrare, quia ego qualitates fi-
 gurarū nō determino. Ad quod dico inconuenientem hanc
 determinationē, quam per me fieri voluisset, futuram fuisse,
 cum de figuris planis æqualiter analogis quibuscumq; sit
 ipsa Propositio. Quoad superpositionem verò modus præ-

D d

fieri-

scribitur, dum præcipitur extrema tangentialia figuras semper in extremis tangentibus esse constituenda, & non aliter. Cum verò petit quis superpositionis futurus sit iudex. Respondeo intellectum, cui ex hypothese constat fieri aliquam superpositionem, quomodocumque illa fiat, dumodo ea iuxta præscriptam legem effecta sit. Et cum subdit. *Esto sint superpositæ, & congruant quid concludetur? lineas esse æquales?* Dico non hoc concludi, sed partem figuræ superpositæ (nisi primò tota toti cōgruat) parti eius, cui superponitur congruere, quæcumque pars illa sit, satis enim est intellectui supponere fieri aliquam superpositionem: unde non est necesse eidem innotescere binos alios terminos parallelarum, quæ superponuntur; sequitur enim ex hypothese aliqua partium congruentia, quicumque sint dicti termini. Frustra igitur adduxit inconueniens de lineis rectis tantum hoc demonstrari. Pergit tamen ipse in eadem Pagina sic discurrendo in Sec. 31.

Sectio XXXI. *Sed dicet fortassis Demonstrator se tot ducere velle lineas, immo iam ductas supponere, quæ superficies illas interclusas absument, & in nihilum redigant, aut tamen daruas efficiant, ut pro nihilo habendæ sint, & sic mansuram illam æqualitatem figurarum, quam demonstrare proposuerit. Et ego, qui hoc fecerit, respondeo, nã ille erit mihi magnus Apollo, non autem magnus Apollonius: semper enim alij duo termini, qui unà cum parallelis rectis minimam illam, quam ille putat, superficiem comprehendunt, infinita suscipiunt puncta, infinitasque terminabunt rectas parallelas, quæ omnes nullam unquã constituent superficiem; ac proinde nullam absumere, aut annihilare poterunt: diuisio superficiæ in æternũ fieri poterit in partes, quæ omnes simul sumptæ, semper paratæ sunt componere, & restituere suum ab initio indiuisum totum: lineæ diuidentes nihil conferunt superficiæ, aut ab eadem auferunt. Et sic redire debet Demonstrator ad argumentũ proximè propositũ soluendum. Transeat dicet aliquis quod ex supradictis minimam superficiem exhibere non possim, exhibeo tamen aliundè per meas lineas parallelas superficiem minorem quacumque proposita: & sic conclusio erit ex parte mea; æstimabitur enim ea, cum minor dari non possit superficies illa, quã*
per

per meas frequentes parallelas eò deduxi, superficies minima; hoc est linea: & sic ex hoc capite habeo quod volo, eritq; figura tota figura toti æqualis. Quod erat demonstrandū. Festina lente. Dabis quidem superficiem quacumque data minorem, sed numquam talem, quæ sit minima, vel æqualis lineæ; urget enim adhuc suprapositum argumentum, quod per hoc non soluitur, quia tua illa, quam tu vocas minimam superficiem, tu ipse minorem dare poteris, quæ efficiet ut illa prior non sit minima, neque posterior hæc, sed semper supersit id, per quod minor adhuc detur. Pluribus enim in locis, & Archimedes, & plures alij puriori Geometriæ addicti, demonstrant proposita figuræ inscribi posse, & circumscribi alias figuras, ita ut circumscripta figura excedat inscriptam magnitudine, quæ minor sit quacumque eiusdem generis magnitudine proposita. Ergo concludunt circumscriptam æqualem esse inscriptæ? Neutiquam, sed alio adhibito medio termino demonstrant figuram illam, cui circumscriptio, & inscriptio facta est æqualem esse cuidam alteri quæ minor quidem sit circumscripta, maior autem inscripta. Concludimus ergo ex his quæ attulimus Propositionem hanc de Planis figuris nequaquam legitimè demonstratam esse.

Hic ergo denuò conatur Auctor noster Lectori perluadere dictam Propositionem primam non fuisse a me legitimè demonstratā, sed (quod illius pace dictum sit) ex discursu parum, vel nihil ad rem nostram pertinente, ut is faciliè intelliget qui à me allatam demonstrationem rectè perpendit. Nusquam enim ita processi per dictarum linearum æqualitatem, ceu continuū voluerim per frequentes lineas parallelas scindere in minimas particulas, ut ipse putavit. Sed supposui in prima figurarum superpositione saltem earum partem parti congruere, ostendiq; residua esse quoq; figuras æqualiter analogas. Hæc verò residua iterum eadem lege dixi esse superponenda; & si adhuc tota figura non congruat toti, probavi adhuc remanere residua æqualiter analogas, & sic semper fieri, continuata superpositione. Unde si aliquādo vnius nullum sit residuum, neq; fore residuū alterius, figurasq; inuicem congruere concludo, & subinde æquales esse. Ab his uerò quam diuersus sit discursus huius

Auctoris quivis facillè intelligere potest. Non ignoro tamen præfatę demonstrationi obijci posse, quod dicta superpositio, quę per frustra continuò faciendā est, in aliquibus figuris numquam fortè absolueretur; nescimus enim, quę, quotanè sit pars illa figurę superpositę, quę alteri in subiecta figura cōgruere intelligitur. Eademq; instantia fieri poterat circa Prop. primam Libri secundi, in qua fit frustatim hæc superpositio, quę si per continuos actus fieri debeat forsan in aliquibus figuris numquam finiretur, cum hinc frustra numero infinita videantur in continua superpositione suboriri posse. Verum hanc difficultatē non animadvertit, nec in oppositum attulit Guldinus, quę magis ad rem fecisset, quam superius ab eo allata. Huic tamen vt satisfaciam, dico non necesse esse actu efficere hanc infinitorum residuorum, quę obuenire possunt, superpositionem (sicuti de omnibus lineis in discussione prioris Methodi Ind. dicebatur non opus esse singulas actu describere) sed sufficere quod intellectus ex vna ad libitum assumpta reliquas intelligat, quamvis infinitas, saltem conceptu negatiuo, cum sit eade ratio de omnibus. Si enim ponamus per impossibile has superpositiones absolui, hoc est continua frustorum ablatione facta à figura superposita, de ea tandem nihil remansisse, necessariò iuxta habitam demonstrationem sequetur nihil superesse residui in figura, cui fit superpositio. Ex quo rectè hic infertur figuras equaliter analogas, & ibi omnes lineas æqualium planarum figurarum, æquales esse. Si enim in equales essent, consumptis per superpositionem alterius superpositę frustis, licet hoc fieri per infinitos actus superponeretur, nihilominus aliquid residui posset remanere in figura cui fit superpositio, si illa maior esset, quod tamē euenire non posse euincitur per dictam demonstrationem. Hoc verò de omnibus lineis suo modo intelligi potest.

CA

CAPVT XI.

Fusius hic differtur circa Sectionem 32.

Aliam instantiam affert Auctor contra eandem Propositionem primam sic obijciens in Sec. 32. Pag. 346.

Seccio XXII. *Sed, & aliunde hac, que vocatur demonstratio, demonstratio non est ex ipso, quem adhibet demonstrationis medio termino, qui est figurarum superpositio; de quibus multi quidem multa, & tandem tamen ea paucis probatur, quando res ipsa aliter demonstrari potest. Quando vero recipitur, certis tantum conditionibus recipitur, id quod paucissimis verbis tradit noster Cristophorus Grienbergerus ad Pronunciatum 8. Libri Primi Elementorum, quod sic habet. Quæ sibi mutuò congruunt sunt æqualia. Debet autem, addit ille talis congruentia constare intellectui. Quæ congruentia in hac demonstratione intellectui non patet, cum se vtrā æquales rectas parallelas non extendat. Sic Euclides quando usus est hoc Pronunciato Prop. 4. Lib. 1. Elementorum, non solum æquales lineas rectas superponit æqualibus lineis rectis, sed tales etiam, quæ æquales continent angulos, unde intellectus indicare potest eas sibi congruere &c. sed quid dicemus de superpositione corporum, quæ adhuc magis intellectum fugit? in qua congruentiam aliter imaginari non possumus, quam per penetrationem, ut fingantur corpora sese mutuò penetrare, ut sic tam soliditas soliditati, quam superficies superficiei, & alij terminis alijs sibi æqualibus congruant, quod in hac Auctoris demonstratione non fit; constat enim solum de congruentia parallelorum planorum, de reliqua superficie, & terminis alijs prorsus nihil inuenit intellectus, in quo conquiescat. Usus quidem est Archimedes hac superpositione Prop. 20. de Conoidibus, & Spheroidibus, sed longè aliter quam noster Auctor; Archimedes enim aliam assumit figuram, quæ proposita per omnia sit æqualis, & similis, & eodem prorsus modo sectam, & superpositiones fiunt semper magnitudinum æqualium, ita ut de congruentia dubitari facile non possit. Verum hæc ipsa demonstratio non videtur arridere Geometris,*

Ar-

Archimedis Fed. Commandinus silentio illam praterit; Rinaltus verò illam tamquam Archimede indignam omittit, eique aliam a se excogitatam substituit, ut monuimus in Scholio Prop. 5. Cap. 2. Lib. huius, & eandem aliter etiam nos demonstrauimus eodem in loco Prop. 6. Pronunciamus ergò secundo Caualerium hanc Propositionem, quæ tamen huius libri fundamentum quoddam esse videtur, tam de planis, quam de solidis figuris legitimè non demonstrasse. Propositioni huic sequens subnectitur Scholium: Cum antecedens Propositio maximi fit momenti, ut in sequentibus apparebit, aliusque modus priorem partem demonstrandi, stylo Archimedeo haud absimilis, menti succurrerit, id ipsum ne pereat in Lemmata distributum hic subiungere placuit. Lemmata ergò, & ipsam inde deductam demonstrationem breuiter examinemus.

Hic ergò inuehitur Auctor ille prius contrà mutuam superpositionem figurarum in genere, posterius verò in specie contrà adhibitam in præfata Propositione, quam etiam ex hoc capite non fuisse legitimè demonstratam absolute pronuntiat. Prius igitur & ipse de superpositione in genere, posterius verò de hac speciali, discurrem. Etsi ergò hæc superpositio aliquibus minus arriserit, alij tamen præstantes Geometræ ipsam approbarunt. Vnde Commandinus in Commentarijs in Euclidem Libro 1. & ad Prop. 4. sic ait. *Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem figurarum, præterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui Mathematicis. Archimedes enim eum usurpat non solum in planis figuris, ut in Libro de centro gravitatis planorum, sed etiam in solidis, ut in Lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus. Hoc verò neque inficiatur ipse Rinaltus, qui hic in oppositum citatur, etenim in Scholio Propositionis 20. Lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus inquit. Sunt .n. qui superpositiones illas rejciunt in Geometria (quamquam alij, & viri graves admittant, &c.) Qui tamen nequaquam eas refellere deberet: vel enim demonstrationes, quæ superpositione utuntur, putat esse certas, & infallibiles, vel non. Si primum, quemadmodum in Prolegomenis Commentariorum in Archimedes non distinguit inter nobilitatem demon-*

monstrationis ostensuæ, & ducentis ad absurdum, quia inquit ibi, Mathematicæ disciplinæ non vtuntur causis rei, sed cognitionis rei (quapropter post pauca verba subiungit. *Vndè fit vt quodcunque cognitioni fuerit magis consentaneum, Mathematicis magis conueniat:*) A pari debbit superpositionem admittere tamquam certam parientem scientiam. Si verò credit secundum, erroneam, & falsam hanc 20. Prop. pronunciare debbit, quin & eas omnes, in quibus adhibetur circumscripção, & inscripção figurarum circa oblatam figuram, quæ videtur esse quædam superpositio. Idem quoque negabit Prop. 4. Primi Elementorum, & consequenter eas omnes, quæ ab illa pendent. Sic & noster Auctor, si idem sentit, falsitatis arguet eas omnes, & ab eis dependentes, Lucæ Valerij Propositiones (ab eo insigniter laudati) in quibus & ipse superpositione vtitur.

Quod si quis diceret nec Riualtum, neq; Guldinum negaturos esse dictarum Propositionem veritatem, ac certitudinem; sed cum superpositio quid mechanicum redoleat, vt inquit ibidem Riualtus, quodcumq; id fieri possit, melius esse ab eadem abstinere. Huic sic obijcienti respondere possem quemadmodum Clavius Peletario superpositionem damnanti respondet, inquit. *Nam non satis intellexisse videtur quo pacto Geometra superpositionem illam vsurpent. Neq; enim volunt reipsa faciendam esse figurarum superpositionem (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis, atq. intellectus.* Vbi inquit illam idcirco in Theorematibus valere, sed non in Problematibus, & paulò post subdit. *Viderat Peletarius (neq; enim rem adeò manifestam videre non poterat) si hunc modum argumentandi, idest per superpositionem, è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere &c.* Quapropter mirandum est hos Auctores ob hanc rationem ab hac superpositione abhorre, quomodo enim mechanicum quid redolere dicemus, quod in euidētissimo hoc principio fundatur. Quæ sibi congruunt sunt æqualia? Neq. enim quia familiaris est artificibus hæc superpositio, qua congruentiam oculo, vel manu iudice agnoscunt, putandum est
idem

idem in illa Geometrarum superpositione contingere, in qua non alius est iudex quam intellectus, itaut per hanc illa quodammodo infici, & labefactari possit. Nunquam enim ille assentitur duas magnitudines inuicem congruere, nisi ex præsupposita quorundam æqualitate, ac mutua, debitaq. superpositione, & subinde ipsorū necessaria congruentia, iuxta aliud hoc principium, nempe. Quæ sunt æqualia sibi congruunt, si aptè superponantur, vt apertissime patet in Prop. 4. Primi Elem. Et quidem quid nobis apertius indicare potest æqualitatem quam congruentia? si enim, vt inquit Aristotiles, quod est vnum in substantia, illud est æquale in quantitate, erit sanè exactissima trutina æqualitatis ipsa congruentia, cum ex duabus quantitatibus tunc fiat quodammodo vna.

Liceat autem mihi ad maiore dictorum confirmationem paululum circa huiusmodi doctrinam immorari. Sæpè enim meditatus sum num præfata duo Axiomata sint inuicem aliqua ratione conuertibilia, ita vt æqualitas cōgruentiam (si aptè fiat superpositio) & congruentia semper inferat æqualitatem. Si enim congruentia est exactissima æqualitatis trutina, profectò id valde conueniens esse videtur. Attamen ex alia parte negotium faciebat quod plures quantitates æquales considerat Geometra, quæ tamen hoc congruentiæ beneficio neutiquam potiri valent; vt et Proclus innuit in Com. in Euclide Lib. 3. ad Prop. 4. dum examinat illud Axioma. Quæ sunt æqualia sibi congruunt, ait enim. *Hoc autem non in omnibus verum est sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico. vt recta linea rectæ lineæ, circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui a similibus similiter sitis lineis comprehensi sunt. Horum autem dico. quod quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.* Vt ergo quid circa hoc sentiam palam faciam, dico si geometricarum legum scueritatem attendamus, rem sanè ita se habere; at si liberiori indultu circa hoc vehimus philosophari, nihil prætereundum esse quod hanc conuertibilitatem al quo modo coadiuuare possit. Quapropter si dicatur rectam peripheriæ circuli congruere non posse, annuo & ipse strictè loquendo, siq.

nihil

nihil aliud superaddatur: verum accedat motus, & illius ope animaduertemus nos id aliquo modo obtinere posse. Nam si circulus reuoluatur super rectam lineam, tunc agnoscat intellectus si non permanentem, saltem successiue absolutam fuisse rectæ ad peripheriam congruentiam. Et hic est vnus eorum modorum, quibus congruentia aliquo modo intellectui potest repræsentari, quem dicere possumus, motum simplicem.

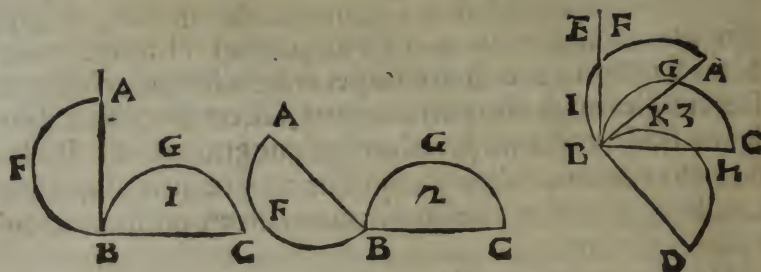
Huic succedit secundus modus, quem voco inflexionem, cum nempe concipimus alteram quantitatum æqualium propositarum in partes, seu componentia diuidi, quæ absq. separatione singillatim moueantur, & inflectantur ad congruentiam. Vt si recta linea quinq. palmorum inflectatur, & complectatur ambitum pentagoni æquilateri, cuius singula latera sint vnus palmi. Sic verò patet quamlibet rectam cuiuslibet ex rectis compositæ adaptari posse, illam in tot rectas diuidendo, quot erunt in hac rectæ lineæ. Verum si recta ex. gr. æqualis peripheriæ circuli, eidem per inflexionem sit adaptanda, tunc intelligimus illam rectam diuidendam esse in tot partes, seu in tot componentia, quæ omnem assignabilem numerum excedant; si enim illa certo quodam numero clauderentur, cum minimæ particulæ illius rectæ lineæ congruerent peripheriæ circuli, in hac esset aliquid recti, quod esset absurdum.

Tertius, & vltimus modus est, quem appello fluxionem, scilicet cum nedum partes mouentur ad congruentiam, vt fit per inflexionem, sed etiam loco vicissim permutantur, nullo tamen spatio inter ipsa componentia interiecto (si enim hoc fieret, eam fluxionem rarefactioni coniunctam dicere possemus) quæ partes permutandæ hic pariter vel certo numero comprehenduntur, vel superant omnem numerum.

Exemplum primi suppeditabit angulus cornicularis rectilineo æqualis. Ad cuius intelligentiam sit, ABC, in prima sequentium figurarum angulus rectus, in secunda obtusus, & in tertia acutus. Et super diametris æqualibus, BC, BA, semicirculi describantur, BGC, BFA. Tandem verò in tertia figura erigantur duæ perpendiculares, BE,

Ec

qui-



quidem ipsi, BC, & BD, ipsi, BA, quæ sit æqualis ipsi, BC, super quam describatur quoque semicirculus, BHD. Quoniam ergò angulus semicirculi, GBC, est æqualis angulo semicirculi, FBA, appposito communi, ABG, in prima, & secunda figura, & eo subtracto in tertia, componetur in illis, & in hac relinquetur, angulus rectilineus, ABC, æqualis curvilineo, seu corniculari, FBG; quem ità rectilineo adaptabimus. In prima quidem, & secunda figura cum sit communis angulus mixtilineus, ABG, sufficit superponere angulum, FBA, ipsi, CBG, sic enim duæ partes, seu duo anguli, FBA, ABG, componentes cornicularem FBG, ad congruentiam aptatæ erunt, & subindè totum toti congruere dicemus. In tertia verò figura cornicularis, FBG, per rectam, BE, diuiditur in angulum, FBE, & EBG, angulum contactus. Sed est etiam angulus contactus, ABH, quia, AB, est, BD, perpendicularis. Ergò poterit, EBG, poni super, ABH, nempe constituta, BE, in, BA, & cadente peripheria, BG, super, BH, illique congruet. Similiter cum reliquis, FIBE, sit æqualis angulo, HKBC, (sunt enim semicirculi anguli, FBA, HBD, æquales, & rectilinei, EBA, CBD, pariter inter se æquales, cum, EBC, ABD, sint recti, vnde ablato communi, ABC, relinquuntur æquales ipsi, EBA, CBD,) si extendatur, BE, super, BC, peripheria, BIF, cadet super, BKH, vnde duo anguli, FBE, EBG, idest totus angulus cornicularis, FBG, positus erit super totum rectilineum, ABC, cui pariter congruet. Quod ut cernitur sit per fluxionem duarum partium cornicularem componentium, quæ everso situ super rectilineum collocantur. Simile quoq. exemplum haberi potest in figuris rectilineis æqualibus.

Exem

Exemplum verò secundi cerni potest ex.gr.in circulo, & quadrato æqualibus, vt enim sibi congruant fortè infinitas numero partes fluere necesse crit, quod saltem certissimum est cum quadratum tantum per frustra rectilinea intelligemus superponi: nunquam enim compositum ex rectilineis numero finitis (quod est semper rectilineum) congruet curuilineo, sed necesse erit fluere infinita rectilinea, vt circulus, & quadratum sibi congruant. His ergo modis aliququaliter mihi videtur in figuris ab intellectu congruentiam dictorumq. Axiomatum conuertibilitatem inspicere posse, eamq. tamquam exactam æqualitatis trutinam ubiq. recognosci.

Deniq. quoad superpositionem adhibitam in ipsa Prop. prima qualis sit, quomodoq. intellectui constare possit, satis superius dictum est in examine Sectionis 20. & 31. neque enim vt inquit ipse, quod superponitur in planis sunt meræ lineæ, sed superficies: neq. quod superponitur in solidis sunt mera plana, sed corpora, quorum hic non officit impenetrabilitas, sumus enim in materia intelligibili, in qua licet hanc penetrationem concipere, sicuti eam concepit Archimedes, & alij, qui hac superpositione vsi sunt.

CAPVT XII.

Proceditur à Sectione 33. vsq. ad 37. inclusiue.

CVM in Libro Septimo meæ Geometriæ Propositionem primam superius examinatam aliter ostēdissem, hoc est stylo Archimedeo, vt de illius veritate quoad figuras planas nullus Studioso relinqueretur ambigendi locus, hanc quoq. Auctor noster carpere voluit; quapropter videat prius Lector in Exerc. 2. Pag. 93. demonstrationem Lemmatis primi, deinde examinet quid cōtra ipsū obijciat Guldinus in hac Sec. 33. Inquit enim Pag. 347.

Sectio XXXIII. *Lemma hoc easdem planè patitur obiectiones, quas ipsa præcedens Propositio. Nihil enim demonstratur de superficiebus, sed de lineis tantum, & de superficie inter binas æquales rectas intercepta, non scimus quales sint reliqui duo termini, qui vna cum binis rectis parallelis superfi-*

Ec 2

ciem

ciem illam claudunt, semper enim manent diuisibiles in infinitum. Huic tamen lemmati medebitur si figuras illas equaliter analogas descriptas supponamus per motum parallelæ lineæ illius, quæ dicitur basis, eo scilicet modo quo Auctôr describere docet parallelogramma mixtilinea in demonstratione lemmatis secundi. Sic enim concludere potest non de lineis tantum, sed etiam de superficiebus, quas linea describit mota; & sic loco puncti, R, assumere potest partem lineæ curuæ, & aduersarium ad absurdum deducere: terminus enim lineæ mota post se relinquit non punctum tantum, ut fit in figuris istis analogis. sed lineam, & ipsa linea mota semper est in loco maiori se, hoc est in superficie, &c.

Vide quæso, benigne Lector, num hæc demonstratio sit de lineis tantum, & non de superficiebus, ut Auctôr putat, cum ipsum, quod hic superponitur sit superficies, similis enim est hæc demonstratio ei, quam affert Euclides Lib. 1. Elem. ad Prop. 35. In simul autem intelliges quam necesse fit has figuras describere per motum parallelæ lineæ, ut demonstratio concludat de superficiebus, quemadmodum Auctôr iste vellet, perinde ac si non sufficiat earum tradita definitio, ac suppositio quod sint figuræ æqualiter analogæ, nisi a se describantur. Opponit deinde in eadem Pagina hæc Lemmati secundo, quod videas in eadem Exerc. 2. Pag. 95. nempe in Sec. 34. sic inquires.

Sectio XXXIV. In demonstratione lemmatis huius pag. 14. linea 6. dicitur: Cum ergo figura comprehendens spatium, C Q P D, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, BZ, 2 Φ , 3 Ω , Δ M, quod non videtur verum esse, superat enim trilineis tantum, BCE, 2 EI, 3 IN, Δ N Q, hoc est, subiicit, parallelogrammo, Δ P: sed quæ ratione probetur, aut demonstretur illa, vel parallelogramma, vel trilinea equalia esse huic parallelogrammo, Δ P, cum dicat, hoc est parallelogrammo, Δ P, non apparet. Debet ergo demonstrari trilinea illa simul sumpta parallelogrammo, Δ P, equalia esse, vel minora. Ipsa porro demonstratio tota iisdem ferè difficultatibus subiaceret, quibus ipsa prima Propositio. Cum enim figuræ equaliter analogæ definiantur tantum per lineas correspondentes æquales in illis pariter existentes, nihil determinare possumus de binis alijs

alijs lineis, in quibus predicta linea terminantur, quaque una cum binis parallelis figuram illam constituunt: sola enim puncta intellectui representantur.

Quod figura comprehendens spatium, $CQP D$, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, BZ , 2ϕ , 3Ω , ΔM , intelligendum est quod superat ab eo spatium comprehensam, hoc est inscriptam, quam utiq. superat dictis parallelogrammis. Quod verò parallelogramma, BZ , 2ϕ , 3Ω , ΔM , æquantur parallelogrammo, ΔP , tamquam demonstratu facile, Lectoris industriae relictum est, cum penderet hoc ex Lemmateant. Ex eo enim patet, BZ , æquari ipsi, $E\&$, nec non, $2\&$, ipsi, IR , ac, $3\&$, ipsi, NP , quia dicta parallelogramma bina sunt in eadem basi, & æquali altitudine, unde, ΔP , æquatur ipsis, ΔM , 3Ω , 2ϕ , BZ , simul sumptis.

Denique absurdè hic quoque obijcit, nihil determinari posse de binis alijs lineis, quæ cum parallelis figuram constituunt, ut ex.gr. de lineis, AQ , DP , quæ cum parallelis, AD , QP , claudunt figuram, $AQPD$, quia figuræ æqualiter analogæ definiantur tantum per lineas correspondentes æquales: hoc enim non tollit, quin ipsæ sint figuræ, & ut tales considerari possint, ut fit in illius lemmatis demonstratione, in qua nihil aliud de lineis ex.gr. AQ , DP , opus est determinare, nisi quod sint lineæ, siue rectæ, siue curvæ, qualiscumque earum curvitas existat. Undè non mera puncta in lineis, AQ , DP , sed & ipsæ lineæ, nulla speciei lineæ facta determinatione (quia hypothesis nulli certè alligatur) hic consideratæ fuerunt. Notandum est autem in dicta demonstratione bis duci rectas, ΔX , rv , BK , quod aliquis reprehendere posset. Verum sic dubitanti considerandum propono, præfatas lineas prius supponi ductas utcumque, sed basibus parallelogrammorum æquidistantes; posterius verò ea lege, ut bifariam diuidant parallelogrammorum è regione sibi respondentium altitudines. Rursus transit Auctor ad Lemma 3. in Sec. 35. hæc habens Pag. 348.

Sec. XXXV. *Sensus huius lemmatis est fieri posse, ut talis ducatur linea tangens; id quod & nos concedimus. Possibile præterea est inuenire verticem lineæ curvæ in figuram redactæ,*

data, & geometricè quidem plurimum talium figurarum, de quarum ortu, ac genesi constat, non autem per eam, quæ in demonstratione citatur Propositionem Libri Primi, de qua nos in Prefatione Libri Secundi nostrorum Centrobarycorum. Cum ergo vertex figurae geometricè inuentus non sit, neque linea tangens geometricè detur, cadit id, quod huic lemmati subnectitur Corollarium. Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem datæ rectæ lineæ sit æquidistans. Nihil enim manifestum est quam possibilitas.

Ad hæc patet responsio per iam dicta Cap. 4. ubi ostensum est possibilitatem verticis inueniendi in figuris satis esse. Est autem hoc Lemma pag. 98. eiusdem Exerc. 2. & ibidem pag. 99. est Lemmma 4. cui sic contradicit ibidem in Sec. 36.

Sectio XXXVI. in demonstratione huius Lemmatis desideratur in primis ratio, & modus describendi lineam variè flexuosam, $AN E$, per motum rectæ, FE , quæ quidem qua ratione & sibi ipsi, & lineæ, SA , semper esse possit parallela, capit intellectus: quomodo autem punctum, E , describat illam, $AN E$, aut aliam diuersimodè flexuosam lineam. nullis præscriptis conditionibus, intellectus non videt, maximè cum iam posita sit alia curua linea, $SROI F$, in puncto, F , lineæ, FE , motæ terminata. Dicitur quidem ad punctum, E , esse attendendum, ut describat lineam, ENA , cum recta, AE , figuram comprehendentem, quæ propositæ figuræ, $SPFR$, sit equaliter analogâ iuxta regulam, FE . Sed quæro per quam viam incedere debeat punctum illud, E , ut una cum, AE , quæ hic proponitur recta, comprehendat figuram ipsi, $SPFR$, equaliter analogam? Si respondeatur producendas esse lineas, HI , QO , PR , usque ad rectam, AE , ut ipsam secent in punctis, D , C , B , ex quibus in productis abscondantur, DL , MC , BN , ipsis, HI , QO , PR , æquales; atque per hæc puncta, L , M , N , transeundum esse puncto, E , quod mouetur, quæ quidem hic pro instructione necessaria danda omittuntur: Sed quis huic puncto, E , viam monstrabit inter, E , & L , inter, L , & M , inter, M , & N , & inter, N , & A ? Si dicatur plures esse ducendas lineas: redibit tamen rursus eadem questio, semper enim manebunt
spa-

spatia, per quæ punctum, E sine duce transire debet. Nihil ergo concludemus etiam hoc Lemmate: Multò minus admittetur Corollarium hoc. Hinc habetur figuram, $SPFR$, ipsi, ANA , æqualem esse, & vniuersaliter figuras planas, in quibus earum regulæ æquidistantium quocunque linearum conceptæ portiones integræ sunt, inter se æquales esse. Ergo ulterius progrediendum erit, quod si fecerimus perueniemus ad ipsam, quæ demonstranda Archimedeo modo promissa fuit, Propositionem primam, supra Propositione nostra quarta relata, quæ sub eodem nomine Propositionis Primæ Septimi Libri sic proponitur.

Supposito Lectorem hoc Lemma ubi supra vidisse, dico in eo, quod spectat ad progressum puncti, E , vt describat lineam, $ELMNA$, eodem prorsus modo id perficiendum esse, quo Auctor noster inquit, nēpè a rectis, HD , QC , PB , abscindendo, DL , æqualem sibi respondententi, IH , & MC , ipsi, QO , vt & NB , ipsi, PR .

Hoc verò satis Lector ibidem intelligere potest, dum dicitur punctum, E , ita in ipsa, FE , incedere debere, vt describat lineam, ENA , cum, AE , comprehendentem figuram æqualiter analogam ipsi, $SPFR$, regula, FE . Quid enim aliud est hoc, quam dicere, producta quacunque recta in, $SPFR$, assumpta, vsque ad, AE , ex eadem punctum, E , in transitu abscindere debere æqualem ei, quæ est illi in directum in ipsa figura, $SPFR$? Et si quidem Problematicè id exequendum esset, certè omnes lineæ figuræ, $SPFR$, producendæ essent vsque ad, AE , & ex singulis abscindendæ æquales sibi respondentibus: sed Theorematicè sufficit ex vna intellectum percipere modum, quo in reliquis id præstandum sit. Non enim pro demonstrationis veritate necesse est, has figuras æqualiter analogas actu describere, sed sufficit intellectu illas supponere descriptas, quia ex eo, quod in vna recta fieri apprehendit, id in reliquis percipit esse possibile, & consequenter nihil absurdi inferri, si istæ figuræ tanquam factæ supponantur. Cum ergo, & hic Problematis possibilitas sufficiat, nihilominus loquutus sum tanquam Problematicè id præstarem (quocumque modo id fieri possit) quia hoc demonstrationis veritati non derogat.

derogat. Transibit ergò punctum, E, inter, E, & L, inter, L, & M, &c. non alio duce, quam intellectu, qui percipit ipsum debere semper abscindere rectam æqualem sibi respondentem in figura, S P F R, etsi Problematicè id fortè non nisi mechanicè, stante hac figurarum generalitate, & nisi ad ipsarum species descendamus, exequi sit possibile. Hæc igitur nihil officiunt veritati subsequenti Corollarij, quo deindè usus sum ad priorem partem Propositionis Primæ Libri Septimi meæ Geometriæ demonstrandam.

Deniq; Auctor insurgit contra aliam demonstrationem prioris partis eiusdem Prop. ant. ex præcedentibus Lemmatibus constructam, quam videre licet in eadem Exerc. 2. Pag. 101. Sic autem de eadem effatur in Sec. 37. Pag. 349.

Sectio XXXVII *Ostensa quidem in charta per varias figuras (quas qui videre velit ipsummet consulat Auctorem) sed non demonstrata pro communi saltem Geometrarum intellectu. Mirabiles quidem ostendit figuras, quas vocat æqualiter analogas, sed quæ sint figuræ æqualiter analogæ, si queramus more Geometrarum definitionem, respondetur illas esse figuras æqualiter analogas, quæ eas habcant proprietates, quas Prima Propositio Libri Septimi illis attribuit, quam retulimus Propositione nostra quarta, Numero primo. Si quesiero quomodo Geometricè describantur, unum affertur exemplum in parenthesis demonstrationis Lemmatis 2. de parallelogrammo tantum hoc modo; quo pacto data basi, & curva linea tota in eodem plano cum ipsa basi, ac vni extremorum eiusdem conterminante, parallelogrammum curvilineum, ab iisdem apprehensum describere docemur. Quomodo autem reliquæ, quæ non sunt parallelogramma describende sint, altum silentium. Mouetur quidem linea paralleliter alteri, & ad eius extremum unum attenditur sed quid sit de altero? quod ipsum deberet esse via descriptionis. Pulchra fuisset huius operis finè Lemma, siue Propositio. Data figura quacumque inter parallelas exposita, describere ei figuram aliam, quoad perimetrum quidem diuersimodè dissimilem, sed æqualiter analogam.*

Fruttra Auctor ite vim facit in hac figurarum æqualiter analogarum geometrica descriptione, cum in gratiam demonstrationis easdem vt factas, supponere tantum sufficiat

ciat, nihil enim ex hoc sequitur absurdi, aut impossibilis. Quare cum ea, quæ hic opponit, nonnisi hisce Problematicis descriptionibus innitantur, tamquam ex eiusdem sententia necessarijs, patet incongruè ab eodem pronuntiatum esse hanc tantum ostensam esse in charta per varias figuras, sed non demonstratam pro communi saltē Geometrarum intellectu, nihil enim apparet, in quo illi hæsitandum sit. Posteriorem autem partem eiusdem Prop. 1. non dissimili methodo confirmatam videre potest studiosus in eadem Exer. 2. à pag. 120. vsq. ad pag. 174.

CAPV'T XIII.

In quo examinantur obiecta à Sec. 38. vsq. ad 42. & ult.

CUm Guldinus ea omnia, quæ in vtraq. Methodo Ind. ipsi negotiū faciebant protulisset, deniq. talem subiunxit conclusionem in Sec. 38. & in eadem Pag. 349.

Sectio XXXVIII. *Visis ergò istis, tam in Methodo Indivisibilium, quam in hoc Libro Septimo ab Indivisibilibus, iuxta Auctoris sententiam independente, occurrentibus plurimis difficultatibus, nolumus, neglectis proprijs nostris in Libris Centrobarycorum omissis parcere, inquirere ulterius; maxime cum hæc inquisitio facta non sit, protestor, ad confundendum, aut suppressendum Auctorem, quem magnificamus sed ut ex illis novis Inuentis aliquid obtineremus, quo Vsum, Fructum, & Gloriam Centri gravitatis augeremus. Quare cum nostrum propositum hac ratione assequi posse hac vice desperaremus; incerta enim pro certis proponere nolumus: Idèò hoc labore supersedendum esse iudicavimus. Reliqua huius negotij in aliud tempus, uti monuimus, si Deus vitam, & bonam valetudinem dederit reservantes. Modestè tamen ipsum Canalerium rogatum volo, ne id vitio vertat, quod ipse ut fieret ultro expetierat; & reliqua, quæ in fine Propositionis 11. Capitis præcedentis de Keplero diximus, ipse etiam sibi dicta esse putet: Scopum enim veritatem, eiusq; cognitionem manifestam posuimus; illum enim attingisse. Hoc Mathematicarum dignitati, ac summæ certitudini, quam præ omnibus alijs humanis*

manis scientijs, nemine Philosophorum reclamante, ipsæ sibi vindicarunt, maximè conuenire manifestum est. *Ipsò illo (in Prefatione Lib. 7.) hoc edicante.*

Quod Auctor iste vtramq. Methodum Ind. tamquam incertam pronuntiarit, & ideò neglexerit, iam dixi mirandum non esse, cum non accuratè, vt sæpè factus est, nec totam dictam Geometriam inspexerit. Quod verò hæc mea censere voluerit, æqui boniq. facio, solius enim veritatis amore hanc eum suscepisse prouinciam facilè mihi persuadeo. Quod si accuratiorem, quam promiserat, de his quoq. habuisset disquisitionem, multò gravior hæc fuisset: vel enim hæc Indiuisibilia tamquam geometrica portenta perpetuis tenebris fuissent damnata, aut ab eodem quoq. approbata, è tot difficultatum latebris fælicius emerissent. Is verò in eadem Pagina diluit in fine quamdam obiectionem, quam fortè aliquis ex Clauio in fauorem Indiuisibilium contra ipsum afferre posset, quæ est huiusmodi, vt patet in Sec. 39.

Sectio XXXIX. *Vnum tamen hoc loco, id nimirum, quod his omnibus scriptis ultimò memorie debilitata occurrit est; quod tam Cavalerius, quam alij fortassis contrà ea, quæ adhuc disputauimus obijcere possent, quod omninò diluendum ante finem huius Capitis videtur; Christophorum videlicet Clauium, quem in omnibus, & ubiq. quasi ex professò defendere constituimus, vsum fuisse in aliquo saltem loco hoc, quem nos reieciimus argumentandi modo: Ipsum nimirum ex pluribus punctis conclusisse de lineis; immo vsum fuisse vocibus istis a nobis reprobatis, omnia puncta, omnes lineæ; & hoc non tam argumentando induxisse, quam vt principium proposuisse, adèò clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sane mentis illud negare possit. In Scholio enim Propositionis 28. Lib. Primi Elementorum, ubi axioma, 3. Euclidis, quod indicarat tanquam principium assumendum non esse, demonstrare conatur Geometricè; postquam Procli demonstrationem (qui idem sentit) retulisset, eamq. non satis validam, aut omnibus numeris absolutam, quasi reprobrasset, ipse Clavius Numero 1. hoc ponit principium. Linea, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, equaliter distant, recta est.*

Cir-

Circa quam dubitationem non opus erat ipsum laborare, eam enim nunquam in fauorē Indiuifibilium attuliffem, cum loco Clauij fupracitato manifeflum fit illum loqui de omnibus lineæ punctis non collectiuè, fed diftributiue fumptis, perinde ac in definitione circuli dicuntur omnes lineæ à centro ad periphæriam ductæ inter fe æquales, quod manifeflum eft non collectiuè, fed diftributiue intelligendum eſſe. Hoc autem dico, fi loquamur de priori Methodo Ind. in quo ipfa Indiuifibilia collectiuè ſumuntur. Quoad poſtერიorem verò Methodum, in qua utimur Indiuifibilibus tamquam diftributiue fumptis, haud negandum eſt potius hunc Clauij loquendi modum ipsis fauere Indiuifibilibus, quam aduerſari. At Guldinus hæc poſtea ſubiungit in Sec. 40. Pag. 350.

Seçtio XXXX. *Ad quod respondendum iudico: Si hoc loco omnia puncta ſumantur ſimul collecta, ut facit Caualerius de ſuis punctis, aut lineis, idem de illis dicendum eſſe, quod hoc capite de iſdem dicimus. Si vero intelligantur per omnia puncta, tot, quot assignari poſſunt, adhuc in eadem manemus ſententia, & dicimus nihilominus nihil probari per iſta puncta de lineæ, quia omnia puncta, cum ſint infinita, assignari nequeunt, ea autem, quæ assignantur finita, nullam componunt lineam, ſed adhuc ſemper inter duo proxima puncta duci poteſt lineæ, ſine recta, ſine curua, & hoc in infinitum. Ergo nihil conſtat de lineæ; atq. ex hoc capite claudicat hoc principium.*

Circa hæc autem nō aliud addam, niſi, ſi per tot puncta, quot assignari poſſunt, nihil de lineæ, Clauius concludere potuit: à pari nullum Geometram per tot linearum, quot intra circulum ab eodem puncto duci poſſunt, æqualitatem, de ipſo circulo quidquam concludere poſſe, quia quotcūq. lineæ nullam conſtituere poſſunt ſuperficiem, quemadmodum, inquit ipſe, quotcumq. puncta nullam vnquam faciūt lineam. His verò ibidem ſubdit paulò poſt in Seçtione 41. huiusmodi verba-

Nullus autem dubito Clauium hoc vidiffe, vel ſi non vidit (nam quandoq. bonus dormitat Homerus) nihilominus tamen ac ſi ſibi, & iurè merito quidem non ſatiſfeciffet per hoc principium,

pium, aliud Num. 2. subiungit his verbis. Si recta linea super aliam rectam in transversum moveatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam. Dignum nimirum Clavio principium, quodque sine illo priori intento suo & Geometris omnibus satisfacit; potest enim ut principium per se solum assumi eo in loco, quo Clavius supponit 28. Propos. Primi Libri Elem. demonstratas, & si opus esset ab illis, & alijs Principijs premissis dependens; nulla enim alia indiget probatione: Huic enim soli assentitur intellectus Geometrae illius, qui saltem illa de quibus diximus principia, & Propositiones percepit: non priori, licet Clavius addat: Est principium hoc aequè clarum, & evidens, atque antecedens. Est enim hoc non aequè clarum, sed longè clarius; quia per hoc ex motu rectae lineae ipsa suo uno termino, altero autem ita affixo rectae alteri lineae, ut neque in motu, neque consistens in ea, aut ab ea dimoueri, aut ipsa linea mota inclinationem mutare possit, describit lineam, de qua rectè concluditur eam fore rectam. Illud autem principium, si principium dicendum, non nisi sola, solitariaque assignat puncta, quae quidem omnia in eadem erunt linea recta, quae tamen prius cogitetur per duo saltem puncta, id quod ultro admittimus, ducta, & quantum opus est ad utramque partem producta: Puncta tamen illa quotquot tandem fuerint; repetimus idem; nullam partem lineae ductae constituunt, ac proinde nihil ex illis de qualitate lineae probare aut assumere possumus. Ergo sine priori illo principio per posterius, & reliqua sequentia Clavius id quod proposuit sufficienter demonstrat. Quod ad tuendam Clavij auctoritatem, & nostram sententiam roborandam nunc sufficiat.

Si prius principium (cui posterius aequè clarum dixit Clavius, licet hoc neget Guldinus) iuxta eundem repudiandum est, posteriori retento: à pari definitio circuli tradita per aequalitatem linearum repudianda erit petenta illa tantum, quae assumit revolutionem rectae lineae circa manens punctum, quod nemo non videt quam sit absurdum.

Denique in Sec. 42. & ultima habitam censuram placidis hisce verbis concludit in eadem Pag. 350.

Sed ut finem tandem desideratum aliquando attingamus,
cum

cum bona pace & Archimedis, & Euclidis, quos singulari honore prosecuti sumus; immo & Pappi Alexandrini. quem præteriuimus, Kepleri etiam, & Cavalieri, quos ut amicos tractauimus, huic libro quarto, & toti Operi de Centro Gravitatis finem imponimus. Coronidem tamen superimponimus, & Epilogi loco denuò in medium producimus Problema quoddam Arithmeticum quod Anno 1622. Viennæ ad excitandos nostros discipulos composuimus & per unum illorum publicè demonstrare curauimus, ea ratione, ut sequitur.

Quibus & ipse addo me hæc ab eo, tamquam ab amico, solamq. veritatem affectanti dicta excepisse, ut & supra innuebam. Namq. amicorum est admonere mutuum. Ego enim in maiori lucro reponam amici liberè redarguentis censuram, quam blandientis adulatoris assensum. Vnde cum Plauto in Trinummio sic eum compellare possum.

*Sed tu ex amicis certis mihi es certissimus,
Si quid me scis fecisse in scitè, aut improbè,
Si id non accusas tu ipse obiurgandus es.*

Ego autem quoq. non contradicendi studio, aut philautia deceptus, sed solius veritatis amore, quæ obiectis responderi posse mihi visa sunt, silentio nequaquam prætereunda esse duxi.

CAPUT XIV.

In quo manifestatur insignis quedam utilitas, qua ab Indivisibilibus in ipsius Guldini Centrobarycam, ni illa respuisset, poterat derivari.

Cum nostri Auctoris regula generalis sæpius commemorata, quæ in eiusdem Centrobaryca ponitur Pag. 147. tanti esset momenti, quanti in ipsa apparet, tota enim in ea fundatur; vnde nequaquam deceret illam demonstratiuè non probatam relinquere, mihi monendus erat idem Auctor, dum viueret, quod, nisi renuisset, insigne hoc beneficium ab ipsis Indivisibilibus obtinere poterat, saltem quoad figuras planas, earumq. Potestates. Id verò, eo iam mortuo, nunc reticerem, nisi ipse dixisset Pag. 349. in Scholio

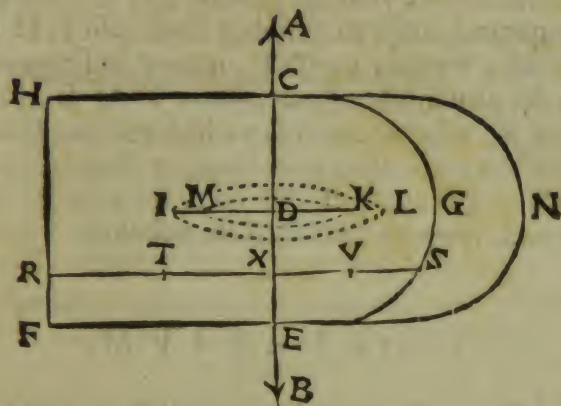
lio se huiusmodi Indiuisibilia aggressum fuisse, vt aliquid obtineret, quo Vfus, Fructus, & Gloria Centrigrauitatis augeretur, sed frustra laborasse. Inquit enim ibidem.

Quare cum nostrum propositum hac ratione assequi posse desperaremus &c. Vt ergo amplius eorum vtilitas appareat Studiosis, hacq. occasione eisdem indicetur qua ratione hunc ab Indiuisibilibus fructum ad Gloriam Centri grauitatis augendam sibi ipse comparare potuisset, placuit in huius explicationem præsens Caput adiungere. Id verò eò libentius feci, quod non mei, sed alterius opera & industria in huiusmodi Indiuisibilium cultura strenuè laborantis, eiusdem regulæ suppetias afferi posse demonstrauit. Is autem fuit acri ingenio præditus, & insignis Geometra Ioannes Antonius Roccha, qui duobus annis antequam hic appareret dicta Guldini Centrobaryca præsens Lemma, ostenderat, ac mihi communicarat, à quo præfata Regula pender, nempe.

Si figura plana super aliqua sui recta linea figuram ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figura, vt sunt solida rotunda ab ipsis segmentis, circa secantem lineam reuolutis, descripta.

Huius rationem vnusquisq. videre potest in Operibus Geometricis Torricellij Problemate 1. de Dimensione Parabolæ, Pag. 77. Vt verò totam hanc rem percipere quoq. possint, qui carent dictis Operibus, ponitur hic sequens demonstratio, ex qua dicti Lemmatæ veritas manifestatur, procedens iuxta mentem eiusdem Rocchæ.

Supponatur recta, A B, tanquam axis, circa quem reuoluatur quæcumque plana figura, C G E, adiacens ipsi, C E, suæ altitudini, vt fiat solidum rotundum. Sit autem eiusdem figuræ, C G E, centrum grauitatis, K, in dicta rotatione describens periphæriam, K M, quam Guldinus appellauit viam rotationis centri grauitatis, K, vt &, K D, radium rotationis. Rursus lateri, C E, in plano figuræ, C G E, sit applicatum quodcumque parallelogrammum rectangulum, H C E F, cum centrum grauitatis sit, I, & recta, I D, sit perpendicularis ipsi, A B, nempe sit radius eiusdem rotationis



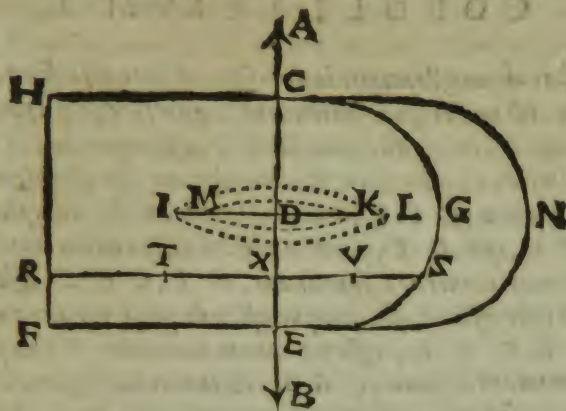
nis. Insuper extendatur quaecunque recta linea, RS , ipsi, FE , parallela, ita ut eius portio, RX , sit in parallelogrammo, HE , & XS , in figura, CGE , quæ bifariam secetur in punctis, T , V . Momentum ergo ipsius, RX , ad momentum, XS , si utrique circa, X , librari intelligantur, est in ratione composita ex ratione, RX , ad, XS , & ex ratione distantiarum centrorum gravitatis, T , V , earundem linearum, RX , XS , à puncto, X hoc est ex ratione ipsius, TX , ad, XV , vel, RX , ad, XS : Facile enim hoc de quibuscunque magnitudinibus eiusdem generis probari potest, ex eo quod molium equalium momenta sunt ut distantia à puncto librationis; & ab eodem æquè distantium molium momenta sunt ut ipsæ moles. Duæ autem rationes, RX , ad, XS , componunt rationem quadrati, RX , ad quadratum, XS : ergo momentum rectæ, RX , ad momentum rectæ, XS , est ut quadratum, RX , ad quadratum, XS , hoc est ut circulus descriptus radio, RX , ad circulum descriptum radio, XS . Hoc idem verò de cæteris ut sic assumptis ipsi, FE , parallelis in dictis figuris eodem modo probabitur, suntque omnia antecedentia æqualia. Ergo momenta omnium linearum, HE , ad momenta omnium linearum figuræ, CGE , parallelarum ipsi, FE , hoc est momentum rectanguli,

guli, $H E$, ad momentum figuræ, $C G E$, (ijs circa, $A B$, axim libratis) erit vt omnes circuli, $H E$, nempe descripti tamquam à radijs ab omnibus lineis ipsius, $H E$, ad omnes circulos figuræ, $C G E$, nempe descriptos tamquam à radijs ab omnibus lineis ipsius, $C G E$, vt elicitur ex Prop. 26. Libri Secundi Geo. Ind. eiusque Corollario 3. quæ Propositio habetur in Exerc. 1. Pag. 58; hoc est erunt vt rotundum ex, $H E$, ad rotundum ex, $C G E$, descriptum, ex Propo 3. eiusdem Lib. Secundi.

COROLLARIUM.

Ex præostensis patet veritas prædicti Lemmatis facta collatione segmentorum librata figura cum parallelogrammo, vt, $H E$, in eadem cum figura altitudine constituto, ac cum iisdem pariter librato.

HIs demonstratis remanet ostendendum quomodo ex his inferatur regula Guldini quoad figuras planas, earumque Potestates, quod nunc patefiet. Namque figurarum, $H E$, $C G E$, momenta, iuxta superius dicta, sunt in ratione composita ex ratione ipsarum figurarum, $H E$, $C G E$, & radiorum, $I D$, $D K$, (nam hi sunt distantia centrorum grauitatis, I , K , ab axe, $A B$,) hoc est periphæiarum, seu viarum rotationis, $I L$, $M K$. Ergo dicta rotunda erunt in ratione composita ex iisdem rationibus. Sed eadem rationes componunt quoque rationem corporum columnarium, hoc est (iuxta appellationem vsitatam in mea Geometria) cylindricorum, qui in basi- bus dictis figuris, $H E$, $C G E$, altitudinibus verò iisdem periphærijs, $I L$, $M K$, in rectum extensis intelligi possunt, vt à me ostenditur in Prop. 11. & 14. Libri Secundi dictæ Geo. Ind. explicaturq. in eadem Exerc. 1. num. 22. Ergo rotunda ex, $H E$, $C G E$, descripta, erunt vt dicti cylindrici. Rotundum autem ipsius, $H E$, equatur cylindrico in basi, $H E$, altitudine periphæria, $I L$, quod sic probo. Illud rotundum idem est cum cylindrico in basi circulo ra-
dij,



dij, F E, & altitudine, C E. Hic verò cylindricus æquatur cylindrico in basi, H E, & altitudine via rotationis, I L, cum utrique bases habeant altitudinibus reciprocas. Etenim circulus radij, F E, habetur ex ductu ipsius, F E, in semiperiphæriam ab, F E, descriptam, hoc est in viam rotationis, I L, quia, I D, est dimidia ipsius, F E, & subinde etiam periphæria, I L, est dimidia periphæriæ radij, F E. Parallelogrammum quoque, H E, fit ex ductu eiusdem, F E, in, E C, unde ut circulus radij, F E, ad parallelogrammum, H E, ita reciprocè est via rotationis, I L, ad, E C. Cum ergo cylindricus in basi, H E, altitudine via rotationis, I L, æquetur rotundo ipsius, H E, etiam cylindricus in basi figura, C G E, altitudine via rotationis, M K, æquabitur rotundo ab eadem, C G E, descripto, sunt enim hæc quatuor solida proportionalia, ut probatum est. Ergo si via rotationis, M K, ducatur in ipsam figuram, C G E, fiet rotundum ipsius, C G E. Hoc autem est conforme regulæ Guldini, quæ est huiusmodi, nempe.

Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit Potestatem rotundam vno gradu altiore Potestate, siue quantitate rotata, ut ait Pag. 147. Hoc est figura plana producit solidum rotundum.

Gg

CO.

COROLLARIUM I.

EX hac demonstratione intelligitur, si proposita figura plana non adiaceret suae altitudini, qualis esse supponatur, $C G E N G$, cuius altitudo sit $C E$, assumpta in, $A B$, cuique adiaceat rectangulum, $H E$; quod tunc per supplementum factum a figura, $C G E$, adiacente ipsi, $C E$, completa figura, $C N E$, ipsi, $C E$, pariter adiacente, eodem modo, quo demonstratur momenta figurarum, $H E$, $C G E$, esse ut rotunda ab ipsis effecta, sic quoque ostendi posse momenta figurarum, $H E$, $C N E$, esse ut earum rotunda. Vnde patebit, dempto momento figura, $C G E$, ex momento figura, $C N B$, & rotundo ipsius, $C G E$, ex rotundo, $C N E$, momenta figurarum, $H E$, $C N E G C$, esse ut rotunda ex, $H E$, $C N E G C$, descripta. Hac ergo erunt in ratione composita ex ratione figurarum, $H E$, $C N E G C$, & distantiarum centrorum gravitatis ab axe, $A B$, librationis, hoc est viarum rotationis. Quapropter ut in superiori demonstratione concludetur viam rotationis centri gravitatis figura, $C N E G C$, in eandem figuram ductam producere rotundum ab ea in rotatione circa, $A B$, descriptum, quomocunque locetur ad alteram axis partem proposita figura. Ex quibus manifestum evadit regulam Guldini quoad figuras planas, earumque solida rotunda uniuersaliter veram esse.

COROLLARIUM II.

INsuper ex eadem demonstratione liquido apparet, si pro quadratis, seu circulis ab, $R X$, $X S$ &c. tamquam a radijs descriptis, substituerimus alias quasvis planas, ac similes figuras, uni cuidam parallelas & ab iisdem, $R X$, $X S$ &c. tamquam ab homologis descriptas, eodem modo, qui supra adhibitus est, nos concludere posse non tantum de solidis rotundis, sed uniuersalissimè de quibuscunque solidis similibus, genitis ex iisdem figuris, $H E$, $C G E$, ut declaratur in ipsa Exerc. 1. num. 17. ea esse in ratione composita ex ratione genitricium figurarum, & ex ratione radiorum, nempe rec-

tarum

tarum inter axem librationis, & centra gravitatis earundem interceptarum. Ex quo denique patebit etiam per hanc viam centri gravitatis, ope Indivisibilium, ad infinitas species solidorum (sive sint recta, sive etiam scalena, nempe etiamsi, $A B$, non supponeretur perpendicularis ipsis, $R X, X S$, sem planis figurarum ab, eisdem, $R X, X S$ &c. tamquam ab homologis descriptarum) processum fieri posse, non secus ac in methodo Ind. demonstrationes circa solida rotunda ad infinitas species iugiter ampliari dicebatur in eadem Exerc. prima num. 38.

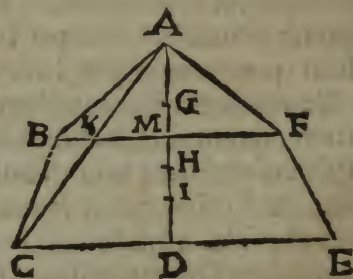
Scio autem præfata omnia ad stylum Archimedeum reduci posse (quod saltem indicatum Guldino ab ipsis Indivisibilibus, si illa respuisset, satis poterat deferuire nempe conuersa demonstratione per Indivisibilia in Archimedeam, ut sunt quæcunque per Ind. methodum ostenduntur: Licet ille ubique affectans demonstrationis ostensuæ nobilitatem, quam sola Indivisibilia poterant illi suppeditare, ab iisdem recedere non debuisset. Frustra enim tunc Euclidis, & Archimedis Propositiones per absurdum ostensas ut præfata ostensuæ demonstrationis nobilitate potirentur Libro Quarto restaurasset, nisi & dicta regula generalis ostensuæ probata fuisset, secus enim omnes ab ea pullulantes demonstrationes vitio radicis laborassent.

Hanc quidem regulam pluribus rationibus, ijs tamen non nisi probabilibus, quæ in concordantia cum aliorum inuentis plerumque fundantur, confirmare conatus est; hæc verò ubi deficit, remanet manca, & imperfecta demonstratio, cum ad omnia nequeat se extendere. Obiter autem innuo, dum hoc nititur probare de solidis rotundis Pag. 175. cum sic procedere. Probat enim conum partialem descriptum à triangulo, $A B F$, ad totum conum descriptum, ab, $A B C$, esse ut 1. ad 4. quia illius radius ad huius radium rotationis est ut 1. ad 4. hoc est, inquit, per Cor. 1. Prop. 3. Cap. 8. Libri Secundi Verum hoc Cor. pendet ex regula generali Pag. 147. quam hic per hoc medium intendit probare.

Deniq; præfata rationes non maiorem videntur habere probabilitatem, quam illæ, quas affert Libro Primo eius-

dem Centrobarycæ Pag. 127. vt consideranti innotescet, vbi asserit, data Sphæræ, Sphæroidis, aut Conoidis portione, si per axem, & centrum basis ducatur planum, conceptæ figuræ centrum grauitatis esse quoque centrum grauitatis superficierum dictorum corporum, exceptis basi- bus. Ait enim hoc similitudinem probare, quam habent hæc solida cum Cono, eiusque frustra, in quibus eadem sunt centra figurarum per axem, & conicæ superfiei sine base, vel basibus; hocque subdit per inscriptionem, et circum- scriptionem superficierum conicarum, &c. probari posse. Quod an verum sit subsequens demonstratio satis, puto, indicabit.

Esto enim triangulus æquicruris, $B A F$, in base, $B F$, quam secet bifariam, $A M$, quæ extendatur vtcumque in, D , sit autem circa, $M D$, quoque tamquam axim trapezium æquicruræ, $B C E F$, itaut, AB , non sit in directum ipsi, $B C$, nec, $A F$, ipsi, $F E$. Oportebit ergo iuxta Guldinum centrum grauitatis figuræ, $A B C E F$, per axem, $A D$, transeuntis, quod sit, H , esse etiam centrum grauitatis compositi ex superficie conica, $B A F$, & frustra conici, $B C E F$, si currit dicta similitudo, quod videamus an verum sit. Supponamus centrum grauitatis trianguli, $B A F$, esse, G , & trapeziji, $B C E F$, esse, I , quæ erunt quoque centra grauitatis superficierum, nempe, G , conicæ, $B A F$, & I , frustra, $B C E F$, superfiei per ibidem ostensa à Guldino. Erit ergo vt, $I H$, ad, $H G$, ita triangulum, $B A F$, ad trapezium, $B C E F$, & ita superficies, $B A F$, ad superficiem, $B C E F$, quod serua. Insuper triangulus, $B A F$, ad trapezium, $B C E F$, est, vt rectangulum sub, $A M$, $M B$, ad rectangulum sub, $M D$, & aggregato ex, $B M$, $C D$, (quia his rectangulis singillatim æquantur dictus triangulus, & trapezium) hoc est in ratione



tionē composita ex ea, quam habet, AM , ad, MD , & ex ea, quam habet, BM , ad, BM , cum, CD , quod pariter serua. Superficies similiter, BAF , æquatur circulo, cuius radius medius est proportionalis inter, AB , & BM , ex Archimede Libro primo de Sphæra, & cylindro, Prop. 14. & superficies frusti conici, $BCFE$, æquatur circulo, cuius radius medius est proportionalis inter, BC , & aggregatum ex, BM , CD , ex eiusdem Libri Prop. 16. Erit ergo superficies, ABF , ad superficiem frusti, $BCFE$, (subintellige semper sine basibus) vt ille circulus ad hunc circulum, vel vt quadratum illius radij ad quadratum radij istius, vel vt rectangulum sub, AB , BM , ad rectangulum sub, BC , & aggregato ex, BM , CD , hoc est in ratione composita ex ratione, AB , ad, BC , & ex ratione, BM , ad aggregatum ex, BM , CD . Si ergo triangulus, ABF , ad trapezium, $BCFE$, est vt superficies, ABF , ad superficiem frusti, $BCFE$, cum ostensum sit triangulum, BAF , ad trapezium, $BCFE$, habere rationem compositam ex ratione, AM , ad, MD , & ex ratione, BM , ad aggregatum ex, BM , CD , oportebit rationē, AM , ad, MD , &, BM , ad, BM , cum, CD , componere eandem rationem, quam componunt rationes, AB , ad, BC , & BM , ad, BM , cum, CD . Ergo ablata communi ratione ipsius, BM , ad, BM , cum, CD , erit vt, AM , ad, MD , ita, AB , ad, BC , quod est absurdum. Si enim iunxerimus, AC , quæ secet, BM , productam, si opus sit, in, K , cum vt, AM , ad, MD , ita sit, AK , ad, KC , erit, AB , ad, BC , vt, AK , ad, KC , vnde per Prop. 3. Sexti Elem. angulus, CBK , qui est obtusus erit æqualis angulo, ABK , qui est acutus, quod esse non potest. Non ergo, H , centrum gravitatis figuræ, $ABCFE$, erit centrum, gravitatis superficiei, $CBAFE$, vt putat Guldinus. Ex quo patet hoc falsū quoq; esse in inscriptibilibus, & circumscriptibilibus superficiei sphericæ, spherodis, & conoidis parabolici, vnde per has neutiquam intentum Guldinus obtinere potuisset.

Si ergo hoc ipse animaduertisset, insimul quoq; agnouisset, quam parum in geometricis probabilibus rationibus, similitudinibus, & analogijs, quas & ipse Keplero exprobrauerat, fidendum sit. Vnde rationibus demonstratiuis suum

fun-

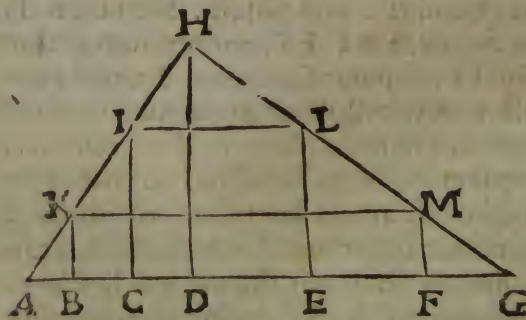
fundamentum probare non neglexisset, nec fortè adeò ab Indiuifibilibus abhorruisset, à quibus tantum beneficium ubiq; retenta quæ adeò illi probabatur demonstratione ostensua obtinere poterat, nisi Archimedeam methodum, quam ob demonstrationem ad impossibile ducentem auersabatur, prosequi maluisset, qua per inscriptionem, & circumscriptionem &c. puto, & reliqua pars regulæ de lineis, earumq; Potestatibus, vniuersaliter poterat demonstrari. Verum hæc cum omni Guldini honore, ac reuerentia dicta esse volo, quem ob aureum hoc inuentum, plurimi facio, æternaq; fama dignum & ipse censeo.

CAPVT XV.

In quo soluitur quedam difficultas, qua contra Indiuifibilia fieri poterat, licet eam Guldinus non animaduernerit, cum alia quadam ab Anonymo obiecta.

INter ea, quæ contra Indiuifibilia ab Auctore nostro allata fuere, nihil est fortè, quod tantam habeat apparentiã, & ex Geometriæ proprijs magis procedat, quam hæc, quæ nunc producet, licet eam ipse non viderit, est autem huiusmodi.

Sint duo triangula, $H D G$, $H D A$, in eadem altitudine, $H D$, sed in basibus, $G D$, maiori, & $D A$, minori. Ipsi verò, $H D$, ducantur quocumq; æquidistantes, $B K$, $C I$, & per K , I , puncta aliæ ipsi, $A G$, parallelæ extendantur,



KM,

K M, I L; & per, M, L, pariter ipsi, H D, æquidistantes, M F, L E. Quoniam ergo, K F, I E, sunt parallelogramma, erunt, K B, M F, inter se æquales, vt &, I C, L E. Hoc verò eodem modo de quibuscumq; alijs ostendetur. Ergo omnes lineæ trianguli, H D A, æquabuntur omnibus lineis trianguli, H D G, regula communi, H D, Vnde per Prop. 3. Libri Secundi Geo. Ind. quæ ponitur in Exerc. prima Pag. 25. triangulus, H D A, erit æqualis triangulo, H D G, quod est absurdum. Cum enim, G D, sit maior, D A, ex hypothesi, etiam triangulus, H D G, maior est triangulo, H D A, per Prop. primâ Sexti Elem. Falsa est ergo dicta Propositio Geo. Ind. supracitata, ergo corruunt omnia, quæ in illa fundantur, hoc est tota huiusmodi Geometria.

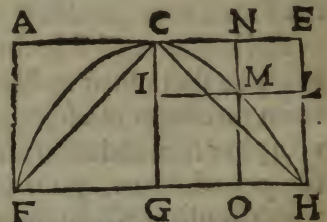
Ad huius ergo solutionem difficultatis recolat studiosus ea, quæ dicta sunt in Exerc. prima, num. 13. 14. 15. ex eis enim intelliget me semper omnes lineas planarum figurarum usurpare sub eodem transitu, nempe vel semper recto, vel semper obliquo, qui transitus explicatur in dicto Numero 13. Ostensum est autem num. 15. ex hoc sequi, si non fiant, vel supponantur sub eodẽ transitu, non esse inuicem æqualiter distantes quascumq; duas vnus transitus, cum alijs duabus illis respondentibus, quæ sunt alterius transitus: & quæ sunt eiusdem transitus semper æqualem distantiam inter se continere, quæ sibi è regione respondent. Cum ergo duæ, K B, I C, non æqualiter distent inter se ac duæ, M F, L E, prædictis respondentes idcò erunt omnes lineæ triangulorum, H D A, H D G, hac ratione assumptæ, perinde ac si fierent sub diuersis transitibus, quapropter excluduntur à definitione, quam tradidi omnium linearum planarum figurarum. Perperam ergo sumptis omnibus lineis triangulorum H D A, H D G, mirum non est ea æqualia concludi, cum tamen sint inæqualia. Hanc autem solutionem apprimè declarat tela filis contexta, è quâ decerpta supponantur dicta triangula. Si enim ponamus in H A D, esse 100. fila ipsi, H D, parallelæ; erunt signata in, H A, 100. puncta, in triangulo, H A G, alia 100. fila ipsi, A G, æquidistantia, & subinde in, H G, alia 100. puncta, & in triangulo, H D G, pariter 100. fila. At si, D G, supponatur ex. gr. dupla
ipsum

ipsius, DA , erunt in triangulo, $H D G$, cum fingatur decerptus ex eadem tela, fila 200. Ergo 100. reliquuntur: quapropter hæc rariora erunt quam fila trianguli, $H D A$. Ita ergo res suo modo succedit in omnibus lineis dictorum triangulorum ut sic acceptis, non enim æqua ratione sibi respondent, quemadmodum fit dum omnes lineæ sumuntur tamquam sub eodem transitu effectæ.

Supradictam difficultatem mihi met obieci, aliam verò fecit quidam Anonymus ex Gallia, quæ, ut ex quodam amico intellexi, talis fuit.

Demonstratum est Coroll. 2. Prop. 19. Libri Secundi Geo. Ind. quod omnes maiores abscissæ sint ad omnes abscissas in ratione dupla. Prop. 24. eiusdem ostensum est quadrata omnia maiorum abscissarum esse ad omnia quadrata abscissarum in ratione tripla. Prop. prima Libri Quarti, (cuius Schema hic apponitur), GH , siue, CE , quadratum ad, IM , aut, CN , quadratū est ut, GC , ad, IC ; ideoque omnia quadrata parallelogrammi, CH , siue omnia quadrata maiorum abscissarum, CE , ad omnia quadrata dimidiæ parabolæ, CGH , siue ad omnia quadrata abscissarum, CE , erunt ut reliquæ maiores abscissæ, GC , ad reliquas abscissas eiusdem, GC . Sed quadratorum tripla est ratio, linearum dupla ex demonstratis: itaque ratio tripla æqualis est rationi duplæ, quod est absurdum.

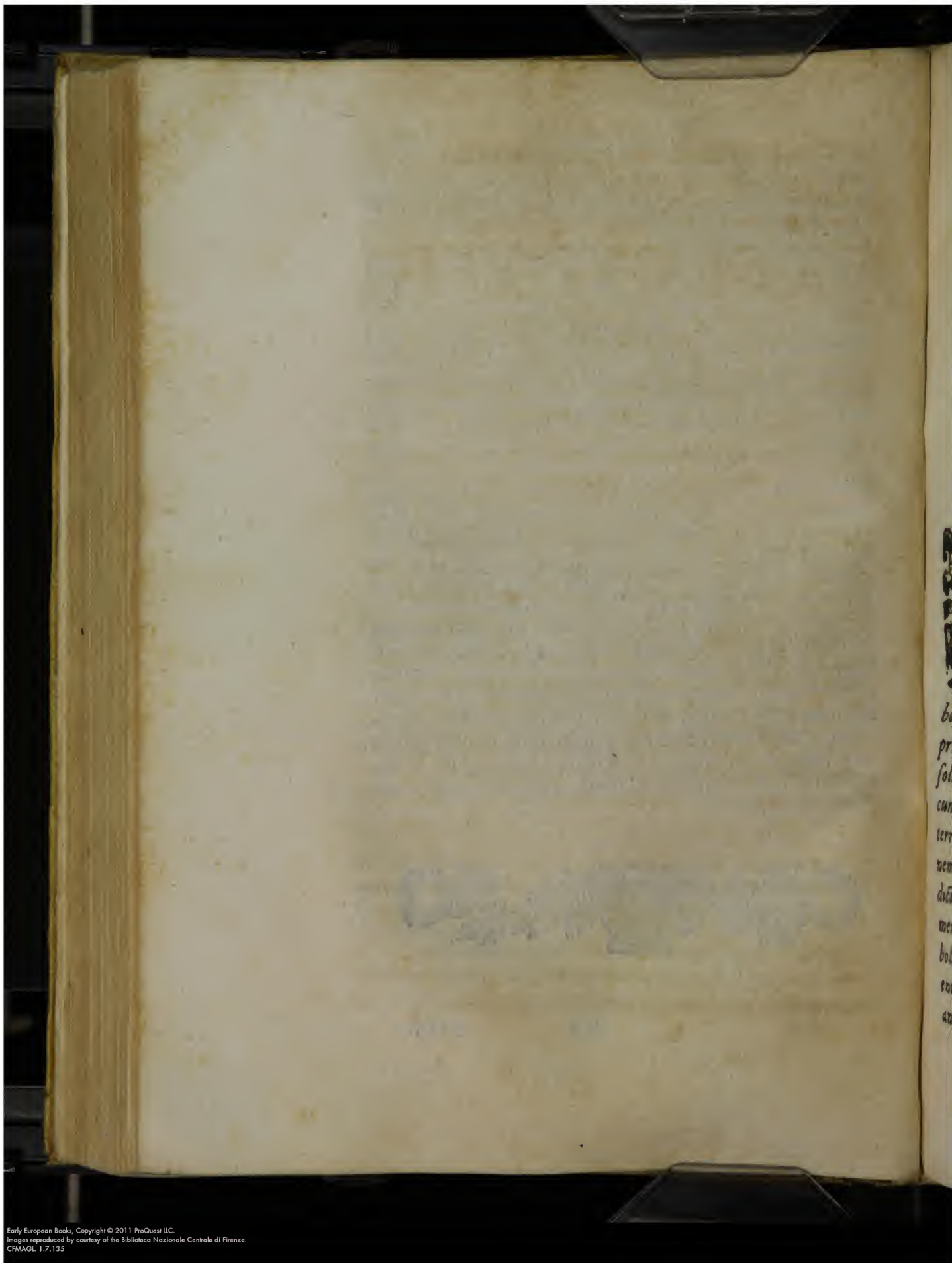
Ad quam difficultatem respondeo non bene accipi maiores abscissas, & abscissas ipsius, CE . Non enim parallelogrammum, CH , exhibet maiores abscissas, CE , & semiparabola, CGH , eiusdem abscissas, ut putat Anonymus: sed abscissæ exhibentur à triangulo ipsi, CE , adiacente, ut ab ipso, CEH , (si, HE , supponatur æqualis ipsi, EC ,) & maiores abscissæ tunc etiam à parallelogrammo, CH , exponentur, iuxta dicta in præfato Cor. Propositionis 19. Libri Secundi, quod habetur in Exerc. prima Pag. 36. Circa quod Cor. vide ibidem dicta num. 25. Cum ergo abscissas hic rectè non acceperit, ideo potuit absurdum ex his colligi-



colligere, quod nempe ratio tripla esset æqualis rationi duplæ. Verum, vt admonui in dicto nu. 25. possumus sine istis abscissis Propositiones demonstrare, si illæ aliquo modo Lectori negotium faciant.

Sed iam tempus est vt huic dissertationi finem imponam, in qua non alium scopum habui, quam vt ipsa veritas elucesceret, Indiuisibilemque vsum tibi amplius, benigne Lector, aperirem, quod de his æquius diiudicare posses. Iam tibi notum est quibus rationibus priorem Methodum Ind. probauerim, & ab oppositionibus vindicari posse existima-uerim: quod si non sufficiat, habes posteriorem methodum, liberam à conceptu infinitorum Indiuisibilium collectiuè sumptorum. At si hæc tibi adhuc non satisfaciant, recole quæ iuxta Archimedis stylum in confirmationem vsus Indiuisibilium allata sunt, præcipuè in Exerc. 2. His enim te omni circa eadem ambiguitate expoliari posse reor. Hæc ad inueniendum plurimum valere vel ipse Guldinus falsus est Lib. 4. Pag. 331. tu autem quoque perpende num & ad demonstrandum recipi possint, nempe vel sub ea forma, qua à me vsurpata fuerunt, vel saltem relatiuè ad methodum Archimedeam, iuxta quam confirmata sunt; ac denique eis vttere prout tibi libuerit, in his enim iurgiis, & disputationibus potius philosophicis, quam geometricis mihi ferè semper agrotanti, nequaquam quod superest tempus inaniter terendum esse censeo. Iudices erunt tot præstantes Geometre, quot scimus hac nostra ætate florere, quorum gratiam meis hisce Indiuisibilibus conciliare pluribus dictis frustra tentauero, nisi ab eisdem accuratè examinata, eorum suffragiis approbentur.







EXERCITATIO

Q V A R T A

In qua, ad Indiuisibilibium vtilitatem, & energiam amplius declarandam, vsus eorundem in Potestatibus Cossicis, seu Algebraicis explicatur.



Inter ea, quæ subtilissimus Keplerus Geometris inuestiganda proposuit, famosa extat duorum insignium solidorum mensura, quæ ab eodem in Stereometria Doliolum sub nomine fusi parabolici, & hyperbolici (quia ille gignitur ex parabola, hic verò ex hyperbola, ambabus his e figuris circa proprias bases reuolutis) promulgata fuisse. Huiusmodi ergò solidorum mensuræ speculanda dum aliquando & ipse incumberem, factum est ut mentis ligone geometrici campi terram effodiens, in thesaurum præter omnem expectationem inciderim, maiori apud me in pretio habitum, quam prædictorum solidorum anxie quasita, & postmodum obienta mensura, ut insequentibus apparebit, si tamen pro hyperbolico ipsius hyperbolæ quadraturam supposueris. Cum enim præcipuè fustum parabolicum animo circumuoluerem, animaduerti illius mensuram haberi posse, si in proposito

Hh 2 quo-

quocunque parallelogrammo ducta diametro, sumptoq; pro regula quolibet illius latere, patefieret ratio omnium quadratoquadratorum parallelogrammi ad omnia quadratoquadrata cuiuslibet factorum à diametro triangulorum. Quarens ergo huiusmodi proportionem, eam quintuplam esse tandem cognoui. Recolens autem ex mea Geometria Lib. 2. Prop. 19. omnes lineas dicti parallelogrammi esse duplas omnium linearum dicti trianguli; omnia quadrata ex Pro. 24. esse tripla oïum quadratorum eiusdem, ne hiatus mihi relinqueretur inter quadrata, & quadratoquadrata, animum applicui ad detegendam quoque rationem omnium cuborum parallelogrammi ad omnes cubos dicti trianguli, eamque quadruplam adinueni. Ita vt deniq; non sine magna admiratione comprehenderim omnes lineas esse duplas, &c. omnia quadrata esse tripla, omnes cubos esse quadruplos, omnia quadratoquadrata esse quintupla, &c. ex quibus arguebam omnes quadratocubos esse sextuplos, omnes cubocubos octuplos, & sic deinceps iuxta naturalem ordinem numerorum ab unitate deinceps expositorum. Hic autem est ille thesaurus, quem primus, quod sciam, occasione mensuræ fusi parabolici, detexi, quemque & ipse ante annum 1640. Geometris in mea Centuria, Problemate ultimo patefeci, atq; proposui. Ex eo enim immediatè pendet proportio eiusdem parallelogrammi ad spatia, quæ à diagonalibus lineis in sequenti Prop. 23. consideratis dissepantur (ex quibus ea, quæ à cavitatibus dictarum diagonalium continentur alijs infinitarum parabolarum, nempe primæ, secundæ, & terciæ, &c. seu linearis, quadratice, cubicæ, &c. nomine nuncuparunt) Et innumera alia admiranda emanare possunt. Contigit eo tempore, quo in hæc incideram,

hac

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 245
hac transire P. Niceronium, Perspectivæ Curiose elegantis
Opere conspicuum, quem cum de his certiores fecissem, pla-
cuit illi & dictæ progressionis, & fusi parabolici rationem
Parisijs proponere inuestigandam præstanti Geometræ Io-
ni de Beaugrand, quem prius & ipse de facie noveram.
Cumque ego ad alia studia vi coactus non amplius de his
cogitarem, en repente literis eruditissimi P. Mersennij ad-
moneor dictum Beaugrand è vita cessisse, ab eoque eius-
dem Beaugrand per Niceronium illi propositorum peractam
demonstrationem insimul recipio. Dolui vehementer tan-
ti ingenij virum, quanti fuisse declarant hæc ad me missæ
demonstrationes, perisse. Qui cum circa hac laborandi oc-
casionem præcipuisset, multò minus de his amplius cogitavi.
Denique multo transacto tempore iterum ad hæc animum in-
tendens hac occasione animaduerti doctrinam Lib. Sec. meæ
Geom. Ind. quæ tantum circa lineas, & quadrata versa-
tur, ad omnes potestates Cossicas planarum figurarum ex-
tendi posse. Operi ergo manum admouens, sequentes Pro-
pos. meliori, qua mihi licuit, studui ratione concinnare.
Quibus & ipsius Beaugrand inuenta, ne perirent, ac ne tuo
dignis ingenio, benigne Lector, te fraudarem, fideliter in-
ferenda curavi. Hæc ergo omnia in tui commodum elabora-
ta libenti animo excipe, & si quæ offenderis, haud ita, ut
velles, affabrè disposita, æqui boniq; consule, &c. Vale.

PRO-

P R O P O S I T I O I.

*In serie numerorum ab vnitatem continuè proportionalium;
ductis inter se duobus quibuscumq; producit in ea-
dem serie numerus, cuius exponent conflat,ur,
simul additis exponentibus multipli-
catorum numerorum.*

Videatur sequens Tabella, in cuius prima serie sunt numeri, 0. 1. 2. 3. 4. &c. qui dicuntur exponentes numerorum ab vnitatem continuè proportionalium, quos exhibet secunda series, nempe, 1. 2. 4. 8. 16. &c. Illis verò in tertia serie subscribuntur characteres, dignitatum, siue potestatum, ut vocant, Cossicarum, seu Algebraicarum, quarum l. significat latus. q. quadratum. c. cubum. qq. quadratoquadratum. qc. quadratocubum, &c. Esto ergo ex. gr. quod ducamus q. in c. hoc est 4. in 8. Dico fieri qc. nempe 32. cuius exponent 5. fit simul iunctis exponentibus 2. & 3. ipsorum q. & c. Quoniam enim ut vnitatem ad alterum ductorum numerorum, ut ad 4. ita reliquus ductus 8. est ad productum 32. ut patet ex elementis Arithmetice: ideò tot proportionem æquales primæ proportioni, nempe ei, quam habet 1. ad 2. componunt proportionem vnitatis ad 4. quot ex iisdem componunt proportionem ipsius 8. ad 32. nempe duæ. Ostenditur autem numerus dictarum proportionum ab vnitatibus, ex quibus constant exponentes numerorum dictarum proportionum, nimirum exponent 1. significat inter vnitatem, & 2. contineri vnam proportionem, exponent 2. indicat duas proportionem inter 1. & 4. & sic deinceps: ergo sicuti exponent ipsius 4. nempe 2. superat 0. exponentem vnitatis duabus vnitatibus, ita exponent numeri 8. qui est 3. superabitur ab exponente producti 32. per duas vnitates. Erit ergo exponent producti ipse 5. qui conflat ex 2. & 3. exponentibus multiplicatorum numerorum 4. & 8.

Tabella

Tabella Potestatum Cossicarum.

Exponentes	0	1	2	3	4	5	6	7
Potestates	1	2	4	8	16	32	64	128
Characteres	o	l	q	c	qq	qc	cc	qqc

COROLLARIUM I.

Hinc & in lineis res suo modo facile percipi potest. Quod nempe, linea posita tanquam latere, si illa ducatur in se ipsam producat quadratum, ducta in quadratum faciet cubum, & ulterius procedendo in potestatibus imaginarijs, ducta in cubum faciet quadratoquadratum, &c. Sicuti quadratum quoque ductum in cubum faciet quadratocubum. Cubus in quadratoquadratum faciet quadratoquadratocubum, &c.

COROLLARIUM II.

Vnde hinc quoque manifestum fit, si pro una linea substituamus omnes lineas oblate figuræ planæ, respectu datæ regulæ: vel pro eius quadrato, cubo, quadratoquadrato, &c. eiusdem figuræ omnia quadrata, vel omnes cubos, vel omnia quadratoquadrata, &c. quod ductis inuicem omnibus lineis oblate figuræ in omnes lineas eiusdem, fient omnia illius quadrata: similiter omnes lineæ ductæ in omnia quadrata facient omnes cubos: eademque ductæ in omnes cubos facient omnia quadratoquadrata, &c. Sicuti omnia quadrata ducta in omnes cubos facient omnes quadratocubos, ut & omnes cubi ducti in omnia quadratoquadrata facient omnes quadratoquadratocubos, &c. eiusdem oblate figuræ planæ respectu datæ regulæ.

SCHOLIUM.

Aduerto autem quod in posterum, breuitatis causa, pro significandis dictis nominibus, tantum primas litteras scribemus. Pro linea ergo, quadrato, cubo, quadratoquadrato, &c.

ro, &c. ponemus tantum l. q. c. qq. &c. sicuti pro omnibus lineis, omnibus quadratis, omnibus cubis, omnibus quadrato-quadratis, &c. tantum o. l; o. q; o. c; o. qq. &c. scribebimus. Productum verò ex multiplicatione duarum quarumvis potestatum, vel eorū, quæ sunt ex ductis in se potestatibus factum sub iisdem appellabimus. Et Omnes potestates talis, vel talis figura plana, regula tali, pariter per simplices literas o. p. exprimentur.

PROPOSITIO II.

Si potestas aliqua tanquam indivisa ducatur in aliquam potestatem divisam, factum sub iisdem æquabitur facto sub potestate indivisa, & singulis partibus divisæ.

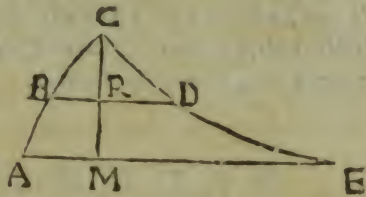
HAec facillè ostendetur ad modum Propositionis primæ secundi Elem. vel Propositionis 35. Libri Secundi meæ Geometriæ, nempe ex eo quod totum æquatur omnibus iuis partibus simul sumptis: & subinde extendetur ad o. p. quascunq; oblatæ planæ figuræ, vt in Cor. 2. Prop. ant. ipsa ad o. p. pariter extensa fuit.

PROPOSITIO III.

Si duæ quælibet figuræ planæ in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in iisdem quocunq; rectis lineis vni regulæ parallelis, scilicet respectu cuius sumitur altitudo, repertum fuerit potestates eiusdem gradus portionum dictarum linearum, quæ figuris interceptantur, esse proportionales; homologis in eadem figura semper existentibus: o. p. vnius dictarum figurarum

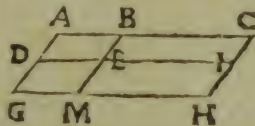
De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 249
rarum ad o. p. alterius erunt, ut quęcunq̃ ex po-
testatibus antecedentibus ad suam potestate m con-
sequentem.

Vniuersalior est hæc,
quam Prop. 4. Lib.
Secundi Geomet. Ind. quę
habetur quoq. in Exerc. 1.
Pag. 27. vbi enim illa de so-
lis lineis, vel solidorum pla-
nis proposita est, hæc exten-
ditur ad o. p. Ita vt assum-
pta denuò illius figura, si fuerit ex gr. vt c. AM, ad c.
ME, ita c. BR, ad c. RD, concludemus o. c. figuræ,
CAM, ad o. c. figuræ, CME, esse vt vnum antece-
dentium ad vnum consequentium, nempe vt c. AM, ad
c. me, vel vt c. BR, ad c. RD.



COROLLARIUM I.

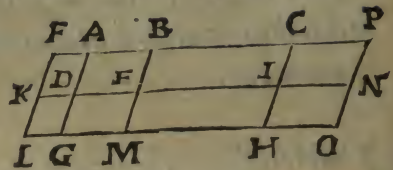
Ex hac elicitur parallelogrammorum in eadem altitudi-
ne existentium o. p. eiusdem gradus, vt o. c. vel o. q
q. & c. regula basi, esse inter se, vt basium potestates eiusdem
gradus. Vt in parallelogrammis, A
M, MC, o. q q. parallelogrammi, A
M, ad o. q q. parallelogrammi MC,
regula, GH, erunt vt q q. GM,
ad q q. MH. Ducta enim ipsi, GH,
vtcumque parallela DF, est q q. DE,
ad q q. EF, vt q q. GM, ad q q. MH.



COROLLARIUM II.

Sed & hoc verum esse percipitur, scilicet factum sub o. p.
parallelogrammi, FM, & sub o. p. parallelogrammi,
AM, ad factum sub o. p. parallelogrammi, PM, & sub
li o. p.

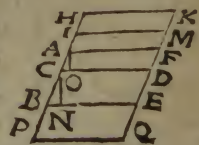
o. p. parallelogrammi, C
M, esse ut factum sub po-
testatibus, LM, MG, ad
factum sub potestatibus
OM, MH. vel ut factum
sub potestatibus, KE, E
D, ad factum sub potestatibus, NE, EI, existentibus homo-
logis potestatibus eiusdem gradus. Et hoc quia ut unum ad
unum, ita omnia ad omnia.



PROPOSITIO IV.

Parallelogammorum in eadem, vel equalibus basibus
existentium o. p. eiusdem gradus, regula basi, sunt ut
altitudines, vel ut latera equaliter basibus inclina-
ta, cum illa sunt equiangula.

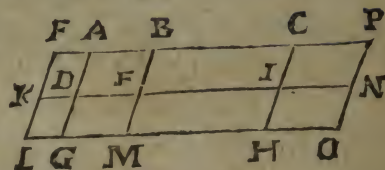
Qvod docet Prop. 10. Lib. Sec. Geomet. Ind. de
solis q. seu figuris similibus, hoc vniuersaliter pro-
nuntiat hæc Prop. de o. p. Ut in præsentī schema-
te expositis parallelogammis, AD, BD, in eadem basi,
CD, altitudinibus, AO, CN, vel lateribus, AC, CB,
basi, CD, æquè inclinatis. Dico nedum, regula, CD,
o. q. eorundem esse ut dictas altitudines, vel latera ba-
si, CD, æquè inclinata, sed & o. c. item o. q. q. & o.
q. c. seu o. quascunque potestates eorundem parallelo-
gammorum. Quod sic probatur ad modum quo dicta
Prop. ostensa fuit. Producantur ergo, C
A, CB, indefinitè ad partes oppositas,
ex quibus summantur quocunque partes
æquales, AI, IH, nempè æquales ipsi,
CA, & BP, æqualis ipsi, BC, comple-
anturque parallelogamma, AM, IK,
BQ. Sunt igitur parallelogamma, CF, AM, IK, in
æqualibus altitudinibus, ac basibus, & ideò singulorum
o. p.



o. p. eiusdem gradus erunt vt basium potestates hoc est Cor. 1
ant.
æquales. Pari ratione ostendemus o. p. parallelogram-
morum, BD , BQ , esse æquales. Altitudines autem pa-
rallelogrammorum, CF , AM , IK , sunt æquales ipsi,
 AO , & ipsorum, CE , PQ , ipsi, CN . Habemus ergo
æquemultiplices primæ, & tertiæ, scilicet compositum
ex altitudinibus parallelogrammorum, CF , AM , IK ,
& compositum ex o. p. parallelogrammorum, CF , AM ,
 IK , quorum illæ sunt æquemultiplices altitudinis, AO ,
ac o. p. parallelogrammorum, CF , AM , IK , seu pa-
rallelogrammi, CK , sunt multiplices o. p. parallelo-
grammi, CF . Sic ostendemus compositum ex altitudi-
nibus parallelogrammorum, BD , PE , tam multiplex
esse altitudinis, CN , quam multiplex est compositum
ex o. p. parallelogrammorum, BD , PE , seu parallelo-
grammi, PD , o. p. parallelogrammi, BL . Si autem
multiplex primæ, nempe aggregatum ex altitudinibus
parallelogrammorum, CF , AM , IK , fuerit æquale
multiplici secundæ, nempe aggregato ex altitudinibus pa-
rallelogrammorum, BD , PE , hoc est si altitudo paralle-
logrammi, CK , fuerit æqualis altitudini parallelogram-
mi, PD , etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici
quartæ, hoc est etiam o. p. parallelogrammi, CK , erunt
æquales o. p. parallelogrammi, PD , quia illæ sunt vt Per ant.
potestates basium; si maior, maius, & si minor, minus.
Ergo prima ad secundam erit vt tertia ad quartam. Hoc
est vt altitudo, AO , ad altitudinem, CN , & consequen-
ter vt quoque, AC , ad, CB , cum hæc basi, CD , æqua-
liter inclinantur (quia tunc triangula, AOC , CNB ,
sunt æquiangula) ita erunt o. p. parallelogrammi, CF ,
ad o. p. eiusdem gradus parallelogrammi, BD . Quæ
etiam verificarentur si parallelogramma, CF , BD , essent
in æqualibus basibus, vt per se patet. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

EX hac innotescit, si-
nūd exponatur Sche-
ma Corollarij 2. Prop ant.
intelligaturque KN , se-
care utcumq. altitudinem
ex. gr parallelogrammorum



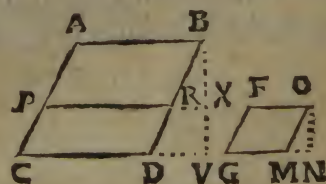
Per Cor.
2.301.

ex. gr. parallelogrammorum
 FM, AM , factum sub $o.p. KM, MD$, ad $o.p. MD$, esse ut pot. KE ,
ad pot. ED , hoc est ut factum sub $o.p. FE, EA$, ad $o.p. EA$.
Unde permutando, factum sub $o.p. KM, MD$, ad factum
sub $o.p. FE, EA$, erit ut $o.p. MD$, ad $o.p. DB$. Sed hæ
ostensa sunt esse ut altitudines parallelogrammorum, MD ,
 DB , seu ut latera, ME, EB , æquæ ipsi, KE , inclinata.
Ergo & factum sub $o.p. KM, MD$, ad factum sub $o.p. FE$
 EA , erit ut dictæ altitudines, vel latera, ME, EB . Exi-
stentibus tamen eiusdem gradus tam potestatibus parallelo-
grammorum, KM, KB , inter se, ut & KE , quam pote-
statibus ipsorum, DM, DB , ut & DE , inter se, licet hæ
essent diversi gradus à prædictis.

PROPOSITION V.

Quorumlibet parallelogrammorum o. p. eiusdem gradus, regulis basibus, habent inter se rationem compositam ex ratione altitudinum, vel laterum aequaliter basibus inclinatorum, cum illa sunt equiangulara; & ex ratione potestatum basium, eiusdem gradus cum praedictis potestatibus.

SInt quæcumq. parallelograma, AD, EM, quorū altitudines, BV, ON, bases verò, ac regulæ, CD, GM. Dico o. p. parallelogrammi, AD, ad, o. p. parallelogrammi, FM, eiusdem



gra-

gradus habere rationem compositam ex ratione altitudinis, BV , ad altitudinem, ON , vel, BD , ad, OM , cum sunt æquiangulara, & ex ratione potestatis, CD , ad potestatem, GM , eiusdem gradus cum prædictis potestatibus. Hæc autem respondet Prop. 2. Lib. Secundi Geomet. Ind. quæ ad modum ipsius tali ratione probatur. Abscindatur à, BV , versus, V , ipsa, VX , æqualis ipsi, ON , & per, X , ducatur, XP , parallela, CD , secans, BD , in, R ; erit autem DR , æqualis ipsi, OM , si parallelogramma sint æquiangulara, quod facile probari potest. Erit etiam parallelogrammum, PD , in eadem basi cum parallelogrammo, AD , sed in eadem altitudine cum parallelogrammo, FM . Igitur o. p. parallelogrammi, AD , ad o. p. parallelogrammi, FM , habebunt rationem compositam ex ratione o. p. parallelogrammi, AD , ad o. p. eiusdem gradus parallelogrammi, PD , idest ex ea, quam habet, BV , ad VX , vel, ON ; seu ex ea, quam habet, BD , ad, DR , vel, OM , si parallelogramma sint æquiangulara, & ex ratione o. p. parallelogrammi, PD , ad o. p. parallelogrammi, FM , idest ex ratione potestatis, CD , ad potestatem, GM . Ergo o. p. parallelogrammorum, AD , FM , sunt in ratione composita ex ratione altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinorum, cum sunt æquiangulara, & ex ratione potestatum basium. Quod, &c.

Prop.
ant.

Cor. 1.
Prop. 3.

PROPOSITIO VI. -

Parallelogramorum, quorum basium quæcunque potestates eiusdem gradus, altitudinibus iuxta easdem bases assumptas, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, recipiuntur, o. p. eiusdem gradus, regulis eiusdem basibus, sunt æquales. Et quorum parallelogrammorum, regulis basibus, o. p. sunt æquales, basium quoque potestates eiusdem gradus cum prædictis
alti-

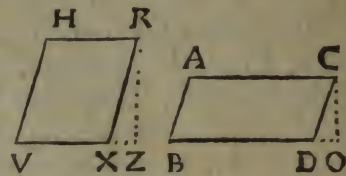
altitudinibus, vel lateribus basibus æqualiter inclinatis, reciprocantur.

Respondet hæc Prop. 12. eiusdem Libri Sec. Geomet. Ind. sicque iuxta illius normam de quibuscunque potestatis probatur.

Sint parallelogramma, HX , AD , quorum basium, VX , BD , non solum quadrata (ad quæ sola, figurasque fimiles, contrahitur dicta Prop.) sed quæcunque po-

testates eiusdem gradus, altitudinibus, RZ , CO , vel lateribus, RX , CD , æquè basibus inclinatis, reciprocantur. Dico o. p. parallelogrammorum, HX , AD , eiusdem gradus cum prædictis, esse æquales. Nam o. p. ipsius, HX , ad o. p. ipsius, AD , habent rationem compositam ex ratione, RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , cum parallelogramma sunt æquiangulara, & ex ratione potestatis, VX , ad potestatem, BD , eiusdem gradus cum prædictis, hoc est per hypothesein ex ratione, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX . Duæ autem hæ rationes, nempe, RZ , ad, CO , &, CO , ad, RZ ; vel duæ, RX , ad, CD , &, CD , ad, RX , componunt rationem æqualitatis. Ergo o. p. ipsius, HX , erunt æquales o. p. ipsius, AD .

Sint nunc o. p. dictorum parallelogrammorum æquales. Dico basium, VX , BD , potestates eiusdem gradus cum prædictis, ipsis, RZ , CO , vel ipsis, RX , CD , æquè basibus inclinatis, reciprocari. Etenim o. p. ipsius, HX , ad o. p. ipsius, AD , cum illis adæquantur, sunt ut, RZ , ad, RZ , vel ut, RX , ad, RX . Habet autem, RZ , ad, RZ , de foris sumpta, CO , rationem compositam ex ratione, RZ , ad, CO , & ex ratione, CO , ad, RZ . Ex his ergo componetur quoque ratio o. p. ipsius, HX , ad o. p. ipsius, AD , vel pro, RX , de foris sumpta, CD , eadem componetur ex rationibus, RX , ad, CD , &, CD ,



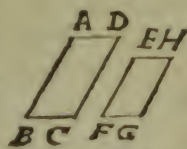
CD, ad, RX. Sunt autem o. p. HX, ad o. p. AD, in ratione composita ex ratione, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD; & ex ratione potestatis, VX, ad potestatem, BD. Ergo eandem rationem componunt rationes, RZ, ad, CO, &, CO, ad, RZ, vel, RX, ad, CD, &, CD, ad, RX, ei quam componunt rationes, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, & potestatis, VX, ad potestatem, BD. Ablata ergo hinc inde communi ratione, RZ, ad, CO, remanebit ratio potestatis, VX, ad potestatem, BD, æqualis rationi ipsius, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX. Igitur basium potestates altitudinibus, vel lateribus æquè basibus inclinatis, reciprocantur. Quæ ostendenda erant.

PROPOSITIO VII.

Similium parallelogrammorum o. p. quæcunque eiusdem gradus, regulis homologis lateribus, sunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, ut est multiplex unitatis numerus exponentis potestatis assumptæ, unitate auctus.

HÆc pariter correspondet Propositioni 12. eiusdem Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ consimili eiusdem methodo sic ostendetur.

Sint similia parallelogramma, AC, EG, quorum latera homologa, itemque bases, BC, FG, sint regulæ. Dico o. p. eorundem esse in multiplici



ratione proportionis, BC, FG, ut est multiplex unitatis numerus exponentis potestatis assumptæ, unitate auctus. Hoc est ex. gr. dico eorum o. l. esse in ratione duplicata rationis, BC, ad, FG; o. q. esse in triplicata, o. c. in quadruplicata, o. qq. in quintuplicata,

cata, o. q. c. in sextuplicata ratione eiusdem rationis, B C, ad, F G, & sic deinceps in o. p. eorundem parallelogrammorum. Quoniam enim parallelogramma, A C, E G, sunt similia; ideò erunt æquiangula, & circa æquales angulos habebunt latera proportionalia; ipsa verò, B C, C D; F G, G H, erunt latera æqualiter ad inuicem inclinata, quorum bases, B C, F G, assumuntur tanquam regulæ. Habebunt ergo o. p. ipsius, A C, ad o. p. ipsius, E G, rationem compositam ex ratione, D C, ad, H G, & ex ratione potestatis, B C, ad potestatem, F G, eiusdem gradus cum prædictis, idest ex ratione composita ex tot rationibus ipsius, B C, ad, F G, quot vnitates habet exponens assumptæ potestatis (vnitates enim exponentium singulæ indicant singulas rationes æquales primæ in instituta progressionē geometrica) quibus rationibus si addatur ratio ipsius, D C, ad, H G, quæ est æqualis rationi ipsius, B C, ad, F G, hoc est si prædictis rationibus addatur insuper vna ratio ipsius, B C, ad, F G; & si prædicto exponenti potestatis assumptæ, pro addita ratione adiungatur vnitatis: erunt o. p. ipsius, A C, ad o. p. ipsius, E G, in ratione composita ex omnibus dictis proportionibus, hoc est ex tot proportionibus ipsius, B C, ad, F G, componetur, quot vnitates habebit dictus exponens vnitatis auctus. Ergo similium parallelogrammorum o. p. regulis homologis lateribus, erunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, vt erit multiplex vnitatis numerus exponens assumptæ potestatis, vnitatis auctus. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

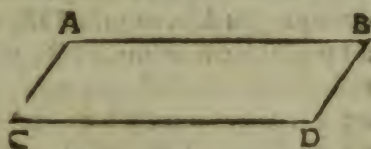
Hinc sequitur o. p. A C, E G, esse vt pot. laterum, B C, F G, vno gradu altiores. Vt o. q. A C, E G, erunt vt o. c. B C, F G, o. c. vt o. q. q. &c. Nam hæc pot. laterum habent eandem multiplicem rationem supradictæ rationis laterum.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Cuiuscunque parallelogrammi o. p. regula quocunque latere, ad o. p. eiusdem gradus, regula altero laterum, cum prædicto latere angulum continente, erunt 71 potestas primæ regule ad potestatem secundæ: existentibus ambabus hisce potestatibus eiusdem gradus. Et immediatè inferioris gradu eiusdem parallelogrammi assumpta potestatis.

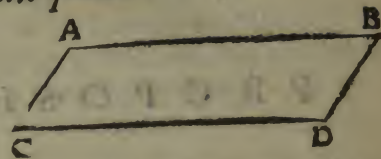
ESto parallelogrammum quodcunque, AD, duxque regule, C D, D B. Dico o. p. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. p. eiusdem parallelogrammi, eiusdemq; gradus, regula, D B, esse vt potestatem ipsius, C D, ad potestatem ipsius, D B, sed his existentibus vno gradu inferioribus assumpta parallelogrammi potestate. Etenim o. p. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. p. eiusdem, regula, D B, (perinè ad eum essent duo parallelogramma in basibus, C D, D B,) habent rationem compositam ex ratione ipsius B D, ad, D C, & ex ratione potestatis, C D, ad potestatem, D B, eiusdem gradus cum prædictis. Sed vt, D B, ad, D C, assumpta tanquam communi basi potestate ipsius, D B, sed vno gradu inferiori, ita est factum sub, D B, & hac potestate, ad factum sub, C D, & eadem ipsius, D B, potestate. Ergo o. p. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. p. eiusdem, A D, regula, D B, & eiusdem gradus, habent rationem compositam ex ratione potestatis, C D, eiusdem gradus ad factum sub, D B, & potestate, B D, sed vno gradu inferiori, & ex ratione huius facti ad factum sub, C D, & eadem, B D, potestate.



Kk

Qq

Quapropter o. p. parallelogrammi, AD, regula, CD, ad o. p. eiusdem parallelogrammi, eiusdemque gradus, regula,



DB, erunt vt potestas, CD, eiusdem gradus, hoc est vt factum sub, CD, & potestate, CD, vno gradu inferiore, ad factum sub, CD, & potestate ipsius, DB, vno gradu inferioris potest. parallelogrammi. Cum verò horum duorum factorum eadem sit altitudo, nempe, CD, illa erunt vt bases, scilicet vt potestates ipsorum, CD, DB, vno gradu inferiores parallelogrammi potestatibus. Sed vt illa duo facta, ita ostense sunt esse o. p. parallelogrammi, AD, regulis, CD, DB. Ergo o. p. parallelogrammi, AD, regula, CD, ad o. p. eiusdem parallelogrammi, eiusdemque gradus, regula, DB, erunt vt potestas ipsius, CD, ad potestatem ipsius, DB, vtrisque tamen vno gradu potestatibus parallelogrammi, AD, inferioribus. Hoc est ex. gr. o. q. parallelogrammi, AD, regula, CD, ad o. q. eiusdem, AD, regula, DB, erunt vt qq. ipsius, CD, ad qq. ipsius, DB, & sic in reliquis. Quod, &c. Responderet autem hæc Propositioni 29. Libri Sec. Geomet. Ind. quæ de folis quadratis ibidem enuntiatur.

S C H O L I V M.

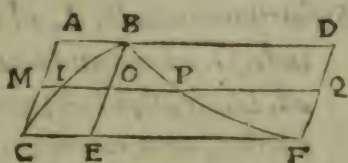
Quoniam verò in Exerc. I. omnes istæ Propositiones superiore Propositionem 2. subsequentes prætermittæ fuerant: ideo ex hic vniuersaliter in o. p. parallelogrammorum demonstratis, intelliget Studiosus illi defectui suppleri. Sub hac enim vniuersali cognitione percipit quoque hæc singulariter vera esse præ o. q. figurisue similibus datorum parallelogrammorum, respectu datarum regularum, ad quæ illæ Propositiones ibidem tantum extendebantur.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Si duo quaecunque parallelogramma fuerint inter se, & cum eisdem duabus quibuscunque inscriptis figuris, in eadem altitudine, regula sumpta linea, cui altitudo perpendicularis est: regula vero parallela qualibet ducta in inscriptis figuris, & el earum quaecunque potestates, omnes tamen eiusdem gradus, fuerint binæ semper in eadem ratione. Erunt dictorum parallelogrammorum potestates altituum figurarum potestatibus proportionales.

Sint parallelogramma, A E, E D, in eadem inter se, & cum ipsis inscriptis figuris, B C E, B E F, altitudine, regula sumpta, C F. Ipsi vero, C F, parallelæ quaecunque ductæ in figuris, B C E, B E F, vt, I O, O P, sint vt, C E, E F, vel harum quatuor rectarum linearum quaecunque potestates, omnes tamen eiusdem gradus, sint proportionales. Dico o. p. parallelogrammi, A E, ad o. p. figuræ, B C E, fore vt o. p. parallelogrammi, D E, ad o. p. figuræ, B E F. Hoc autem elicitur ex Prop. 3. superiori, per eam enim concluduntur tam o. p. figurarum, B C E, B E F, inter se, quam o. p. parallelogrammorum, A E, E D, inter se esse vt potestates, C E, E F, basium. Ergo illæ erunt inter se proportionales, quapropter permutando, o. p. parallelogrammi, A E, ad o. p. figuræ, B C E, erunt vt o. p. parallelogrammi, D E, ad o. p. figuræ, B E F. Et hæc respondet propositioni 25. Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ ponitur in Exerc. 1. Pag. 56 Quod, &c.



kk 2

SCHIO.

S C H O L I V M.

Quoniam verò, quando o p. parallelogrammi, AE, & figura, BCE, licet eiusdem inter se gradus, sunt tamen diuersi gradus ab i. p. parallelogrammi, DE, & figura, BEF, non potest antecedentium inter se, ut nec consequentium, fieri comparatio, propter eorum heterogeneousitatem, propterea, ut universaliter pateat dictas o. p. esse proportionales, etiam si sint diuersi gradus, ut dictum est, ad hoc demonstrandum libuit duas sequentes Propositiones subiungere, cum annexis Corollarijs.

P R O P O S I T I O X.

Si fuerit magnitudo, A, ad magnitudinem, D, ut magnitudo, G, ad magnitudinem, K; item, B, ad, E, ut, H, ad, L, & C, ad, F, ut, I, ad, M, &c. quocumque libuerit: fuerit autem &, A, ad, B, ut, G, ad, H; B, ad, C, ut, H, ad, I. Erunt omnes, A, B, C, &c. ad omnes, D, E, F, &c. ut omnes, G, H, I, &c. ad omnes, K, L, M, &c.

Cum enim sit, A, ad, D, ut, G, ad, K; & A, ad, B, ut, G, ad, H; conuertendo, B, ad, A, erit ut, H, ad, G; ergo ex aequali, B, ad, D, erit, ut, H, ad, K. Ergo, A, B, ad, D, erit ut, G, H, ad, K. Eadem ratione ostendemus, C, ad, D, esse ut, I, ad, K, & A, B, C, ad, D, esse ut, G, H, I, ad, K. $A \cdot D \mid G \cdot K$
 Non dissimiliter probabimus, A, B, C, $B \cdot E \mid H \cdot L$
 ad, E, esse ut, G, H, I, ad, L. Item ut, $C \cdot F \mid I \cdot M$
 A, B, C, ad, F, ita ostendemus esse, G, H, I, ad, M. Ergo colligendo consequentia, erunt, A, B, C, ad,

C, ad, D, E, F, vt, G, H, I, ad, K, L, M. Patet ergo propositum in his quatuor magnitudinum ordinibus, siue tres, siue quatuor, siue quotcunq; termini exponantur, dummodo æquales numero termini in singulis ordinibus, sit inuicem correspondeant. Hæc quoque demonstrat Torricellius Probl. de Dim. Parabolæ, Lem. 18. & 29.

C O R O L L A R I V M.

Hinc manifestum est, si, A, B, C, sint magnitudines singule inter se æquales, vt & G, H, I, inter se; idco, A, B, C, ad, D, E, F, esse vt, G, H, I, ad, K, L, M. Tunc enim, A, ad, B, est vt, G, ad, H, & B, ad, C, vt, H, ad, I, & c. propter eorum æqualitatem.

S C H O L I V M.

Sed & hoc verum esse comperitur. Si fuerint A F
quotcunq; magnitudines eiusdem generis, B G
A, B, C, D, E, & tot alia, F, G, H, I, K, pariter inter se eiusdem generis siue eiusdem siue diuersi à D I
genere prædictorum; & si vt, A, ad, B, ita fuerit, E K
F, ad, G; & vt, B, ad, C, ita, G, ad, H, & sic deinceps in reliquis. Erunt quotcunq; A, B, C, ad quotcunq; D, E, vt alia tot, F, G, H, quot, A, B, C, ipsis, A, B, C, correspondentes, ad tot alias, I, K, ipsis, D, E, correspondentes.

Namq; cum sit, A, ad, B, vt, F, ad, G, componendo, A B, ad, B, erunt vt, F, G ad, G; & B, ad, C, est vt, G, ad, H, ergo ex æquo, A, B, ad, C, erunt vt, F, G, ad, H, & componendo, A, B, C, ad, C, erunt vt, F, G, H, ad, H. At, C, ad, D, est vt, H, ad, I. Ergo ex æquo, A, B, C, ad, D, erunt vt, F, G, H, ad, I. Et quoniam, D, ad, E, est vt, I, ad, K, ex æquo erunt, A, B, C, ad, E, vt, F, G, H, ad, K. Ergo colligendo consequentia, erunt, A, B, C, ad, D, E, vt, F, G, H, ad, I, K.

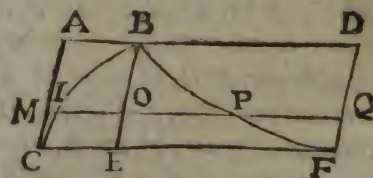
Cum

Cum verò, A, B, C, D, E , sunt eiusdem generis cum, F, G, H, I, K , quoniam permutando, A , ad, F , est ut, B , ad, G , et, C ad, H etc. et ut unum ad unum, ita omnia ad omnia, idcirco, ABC , ad, FGH , erunt ut, D , ad, I , hoc est ut, D, E , ad, I, K , et ideo permutando, patet per viam ant. Prop. A, B, C ad, D, E , esse ut, F, G, H , ad, I, K : licet hoc quoque manifestum sit per eandem superiorem demonstrationem.

PROPOSITIO XI.

Expositis adhuc omnibus, quæ sunt in schemate Prop. 9. regulæ, CF , sit potestas, MO , ad pot. st. OI , eiusdem gradus, ut potest. qo . ad potest. op . eiusdem inter se gradus, sed à prædictis diuersi. Dico $o. p. AE$, ad $o. p.$ figuræ, BCE , eiusdem gradus cum potest. MO, OI , esse ut $o. p. DE$, ad $o. p.$ figuræ, BEF , eiusdem gradus cum potest. qo, op .

VT ex.gr. sit $c. MO$, ad $c. OI$, ut $q. QO$, ad $q. OP$, & sic in cæteris ipsi, CF , parallelis. Dico $o. c. AE$, ad $o. c.$ figuræ, BEC , esse ut $o. q. DE$, ad $o. q.$ figuræ, BEF , licet sint potestares diuersi gradus. Hoc autem patet per Cor. Propositionis ant. Habemus enim quatuor ordines magnitudinum, in quibus sunt termini numero æquales, hoc est quot in vno tot in alio ordine, & sunt æquales magnitudines primi ordinis, nempe $o. c. AE$, singuli inter se, ut & tertij ordinis,




nis, nempe o. q. D E, singula inter se sunt aequalia; & quaecunq; magnitudo primi ordinis, ut c. M O, ad sibi respondentem in secundo ordine, nempe ad c. O I, est ut correspondens in tertio ordine, scilicet ut q. Q O, ad sibi respondentem in quarto ordine, nempe ad q. O P. Ergo o. c. A E, ad o. c. figuræ, B E C, erunt ut o. q. D E, ad o. q. figuræ, B E F. Quod, &c.

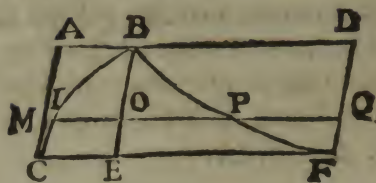
C O R O L L A R I V M I.

EX hac intelligitur, exposito quocumque parallelogrammo, cum illi inscripta figura, ut in eodem superiori Schema-
te parallelogrammo, A E, cum figura, B I C E, sumptaque re-
gula basi, C E, facta sub o. p. parallelogrammi, A E, ad instar
altitudinis, & sub alijs quibuscunque o. p. eiusdem paralle-
logrammi, A E, tanquam basi, necnon sub eiusdem o. p. A E,
ut communi altitudine, & sub o. p. figuræ, B I C E, ut alia
basi, eiusdem tamen gradus cum potest. A E, tanquam alte-
ra basi, esse ut o. p. A E, & inscripta figura, B I C E, prædicti
gradus. Ut ex. gr. si sumamus o. q. A E, tanquam commu-
nem altitudinem, & concipiamus duo facta, unum nempe
sub o. q. A E, & sub o. q. c. eiusdem, A E, ut basi; aliud vero
sub eiusdem o. q. A E, & sub o. q. c. figuræ, B I C E; erit primum
factum ad secundum, ut o. q. c. A E, ad o. q. c. figuræ, B I C E.
Hoc enim deducitur ex eodem Cor. Prop. ant.

C O R O L L A R I V M II.

Patet insuper eadem verificari, etiamsi basis data figuræ
non aquaretur ipsi, C E, (tunc autem non esset inscripta)
currit enim in hoc quoque casu ratio eiusdem Corollarij. 

CO-



COROLLARIUM III.

Similiter si prò communi altitudine sumerentur non o. p. parallelogrammi, AE , sed alterius cuiuscunque parallelogrammi in eadem cum AE , altitudine constituti, ut o. p. ipsius, ED , pateret ob eandem rationem factum ex gr. sub communi altitudine o. q. parallelogrammi, ED , & sub bási o. q. parallelogrammi, AE , ad factum sub eadem altitudine, & sub o. q. data figura, esse ut o. q. parallelogrammi, AE , ad o. q. data figura.

COROLLARIUM IV.

AC denique si fieret collatio eiusdem parallelogrammi, ut, AE , cum duabus quibuscunque figuris, ut, BCE , BFE , cum ipso æquæaltis, constaret eadem ratione hæc duo facta. nempe sub altitudine ex gr. o. q. parallelogrammi, AE , basibus verò o. q. figurarum BCE , BFE esse ut o. q. earundem figurarum. Namque factum sub o. q. AE , & o. q. BCE , ad factum sub o. q. AE , & sub o. q. eiusdem, AE , est ut o. q. figure, BCE , ad o. q. AE . per dicta in Cor. 1. & 2. superiori. Sed factum sub o. q. AE & sub o. q. AE , ad factum sub o. q. AE , & sub o. q. figure, BFE , est ut o. q. AE , ad o. q. figure, BFE , per eadem Corollari.

Ergo

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 265

Ergo ex quo factum sub o. q. AE , & sub o. q. figura, BCE , ad factum sub o. q. AE , & sub o. q. figura, BFE , erit ut o. q. figura, BCE , ad o. q. figura, BFE , & sic in ceteris pot. Hac eadem vero, sed tantum circa rectangula, attinguntur quoque Lib. Septimo Geomet. Ind. ad Prop. 13. & in eiusdem Corollarijs.

PROPOSITIO XII.

Quaecunque sectio fit in proposita quacunque recta linea, eiusdemque potestatibus quibuscunque; eadem subintelligitur fieri in o. l. earumque potestatibus eiusdem gradus, cuiuscunque oblatae plane figure.

VT ex. gr. sicuti in Prop. 23. Lib. Sec. Geo. Ind. quæ habetur in Exer. 1. Pag. 46. & cuius Schema denuò hic apponimus, dum probatum præsupponebatur Secundo Elem. secta linea, ut, BD , in puncto, F , q. BD , æquari quadratis, BF , FD , & duobus rectangulis, seu factis, sub, BF , FD , hoc ipsum extendimus ibidem ad figuram, $ABIDA$, dicentes in eiusdem Corollarij Sec. 4. o. q. figuræ, $ABIDA$, per unicam lineam, AFI , diuisæ, æquari o. q. figurarum, ABI , AID , & duobus rectangulis, seu factis sub dictis figuris, ABI , AID : ita si sciamus ex. gr. in quæ frusta diuidatur, seu resoluitur qq. ipsius, BD , sectæ utcumq. in, F , intelligemus in talia quoq. frusta diuidi posse, seu resolui per lineam, AFI , o. qq. figuræ, $ABIDA$, regula, BD , & sic in reliquis potestatibus quibuscunque. Quod, &c.



LI

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Si recta linea in vno puncto vtrumque secta sit, q. totius aequatur quadratis partium, ac duobus factis sub partibus.

Hoc ostenditur ab Euclide Libro Secundo Elem. Prop. 4.

PROPOSITIO XIV.

Si recta linea in vno puncto vtrumque secta sit, c. totius aequatur cubis partium, ac tribus factis sub quolibet partium, & q. reliqua. Vel aequatur cubis partium, & tribus factis sub tota, & ducto partium inter se.

Hec à me demonstratur Lib. Sec. meæ Geomet. Prop. 38. quæ inde petatur.

PROPOSITIO XV.

Si recta linea in vno puncto vtrumque secta sit, qq. totius aequatur qq. partium, vna cum 6. factis sub q. partium, & 4. factis sub singulis partibus, ac c. reliqua partis.

Hanc & ipse methodo Euclidiana sic ostendo. Sit recta, AC, diuisa vtrumque in B, Dico qq. ipsius, AC,

AC, æquari qq. AB, &
BC, vna cum 6. factis

A B C

sub q. AB, & q. BC, ac 4. factis sub, CB, & c. BA, ac
4. factis sub, AB, & c. BC. Namque qq. AC, hoc est
factum sub, AC, & c. AC, (quia exponentes lineæ, A
C, & c. AC, sunt i. & 3. qui simul iuncti faciunt 4. expo-
nentem qq. qua ratione intelligemus aliquando commu-
tari potestates) æquatur factis sub partibus, AB, BC, &
eodem c. AC. Cum verò c. AC, secetur in c. AB, c. B
C, ter factum sub, AB, & q. BC, ac ter factum sub, C
B, & q. BA; idè factum sub, AB, quantitate indivisa,
& sub c. AC, quantitate diuisa, æquabitur facto sub, A
B, & singulis partibus diuisæ. Hoc est factum sub, AB,
& c. AC, æquabitur facto sub, AB, & c. AB, nempe q
q. AB, item ter facto sub, AB, & ducto ipsius, AB, in q.
BC, hoc est ter facto sub q. AB, & q. BC; insuper ter
facto sub, AB, & ducto q. AB, in, BC, scilicet ter facto
sub, CB, & c. BA, & semel sub, AB, & c. BC. Simi-
liter factum sub, BC, & c. AC, æquabitur facto sub, B
C, & c. DC, idè qq. BC, item ter facto sub, BC, &
ducto ipsius, BC, in q. BA, hoc est ter facto sub q. AB,
& q. BC; insuper ter facto sub, BC, & ducto q. BC, in,
BA, hoc est ter facto sub, AB, & c. BC, & semel sub, B
C, & c. BA. Hæc verò omnia simul iuncta faciunt qq.
AB, qq. BC, 6. facta sub q. AB, & q. CB, 4. facta sub,
CB, & c. BA, ac 4. facta sub, AB, & c. BC, quibus
æquatur qq. AC. Quod, &c.

2. huius.

Per ant.

2. huius.

2. huius.

SCHOLIUM.

Cum ad ea, quæ mihi demonstranda proposueram non
esset necesse procedere ultra qq. propterea quæ in reli-
quis potest. ostendi poterant prætermisi. Verum tamen est
quod si quis voluerit per hanc viam Euclidianam procedere,
difficiliorem semper eam offendet in altioribus pot propter
factorum varietatem, ac multipliciter occurrentem. Fa-
cilis autem hoc obtinebit per multiplicationes Algebraicis

LI 2

fami.

familiares, quas exhibet sequens Tabella. In ea autem per, *a. b.* intelligimus partes datae lineae: nempe per *a.* partem, *A B*, & per *b.* partem, *BC*; quas multiplicamus in seipsas, & adinuicem, sicuti & hinc facta iterum per *a. b.* multiplicari supponimus, & sic deinceps in infinitum; in qua pariter trium praecedentium Propositionum veritas apparet.

1	$a \times b$ $a \times b$								
	$aq \div a$ a	inb inb	$\div bq$						
q	$aq \div a$ $a \div b$	inb $\div bq$							
	$ac \div aq$ aq	inb $\div a$ inb $\div a$	a a	$inbq$ $inbq$	$\div bc$				
c	$ac \div a$ $a \div b$	inb $\div a$	a a	$inbq$ $\div bc$					
	$aq \div ac$ ac	inb $\div aq$	aq aq	$inbq$ $\div a$ $inbq$ $\div a$	a a	$inbc$ $inbc$	$\div bq$		
qq	$aq \div ac$ aq	inb $\div aq$	aq aq	$inbq$ $\div a$ $inbq$ $\div a$	a a	$inbc$ $inbc$	$\div bq$		

Et sic infinitum.

PROPOSITIO XVI.

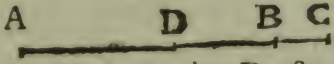
Si recta linea bifariam, & non bifariam secta fuerit, quadrata inequalium partium aequantur 2. q. dimidia, & 2. q. sectionibus intermediae.

HAEC ostenditur Libro Secundo Element. Propositione 9.

PRO.

PROPOSITIO XVII.

*Si recta linea bifariam, & non bifariam secta fuerit,
Cubi inaequalium partium aquantur 2. c. dimidia
linea, & 6. factis sub ipsamet dimidia, &
sub q. sectionibus interiecta.*

Hanc etiam more  Euclidiano sic demonstratio. Sit recta, AC, diuisa bifariam in, D, & non bifariam in, B. Dico c. AB, cum c. BC, æquari 2. c. AD, & 6. factis sub, AD, & q. DB. Etenim c. AB, æquatur c. AD, c. DB, & 3. factis sub, AD, & q. DB, una cum 3. sub, BD, & q. DA. Sed 3. facta sub, AD, vel, CD, & q. DB, æquantur 3. factis sub, CB, & q. BD, & 3. c. BD. Similiter 3. facta sub, BD, & q. DA, vel q. DC, æquantur 3. factis sub, BD, & q. DB, idest 3. c. DB; item 3. factis sub, DB, & q. BC, & 3. sub, DB, & 2. rectangulis, DBC, idest, 6. sub, DB, & rectangulo, DBC, nempè 6. sub, CB, & q. BD. Vnde colligendo partes c. AB, inueniemus ipsum æquari 9. factis sub, CB, & q. BD, 3. sub, DB, & q. BC, 7. c. DB, & vni c. AD. Simul autem iungendo vnum c. DB, cum c. BC, in principio habito, cum 3. factis sub, DB, & q. BC, & cum 3. factis sub, CB, & q. BD, fit c. DC, vel c. DA, & remanent 6. c. DB, & 6. facta sub, CB, & q. BD, quæ component 6. facta sub, CD, vel, AD, & q. DB, & prius habebamus c. AD. Ergo c. AB, cum c. BC, æquatur, 2. c. AD, cum 6. factis sub, AD, & q. DB. quod, &c.

14. huius

2. huius.

2. huius.

14. huius

2. huius.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea bifariam, & non bifariam secta fuerit qq. inaequalium partium aquantur 2. qq. dimidia, 2. qq. sectionibus interiecta, & 12. factis sub q. dimidia, & sub q. eiusdem sectionibus interiecta.

S It pariter recta, $\overline{A \quad D \quad B \quad C}$
 AC, bifariam
 secta in, D, & non bifariam in, B. Dico qq. AB, cum q. BC, æquari 2. qq. AD, 2. qq. DB, & 12. factis sub q. AD, & sub q. DB. Namque qq. AB, æquatur qq. AD, qq. DB, 6. factis sub q. AD, & q. DB, 4. factis sub, AD, & c. DB, vna cum 4. factis sub BD, & c. DA. Seruentur ex his qq. AD, & qq. DB, ac reliqua examinentur. Sunt ergo 6. facta sub q. AD; hoc est sub q. DC, & sub q. DB, æqualia 6. factis sub q. DB, & sub eodem q. DB, hoc est 6. qq. DB; item 6. factis sub q. DB, & q. BC, & 6. factis sub q. DB, & sub 2. reſtangulis, DBC, nempe 12. factis sub q. DB, & reſtangulo, DBC, idest 12. factis sub, CB, & c. DB. Et 4. facta sub, AD, vel, CD, & c. DB, æquantur 4. factis sub, CB, & c. BD, & 4. factis sub, DB, & c. DB, hoc est 4. qq. DB. Insuper 4. facta sub, BD, & c. DA, vel c. DC, æquantur 4. factis sub, BD, & c. DB, hoc est 4. qq. DB, & 4. factis sub, BD, & c. BC; item 4. factis sub, DB, & ducto ipsius, DB, in 3. q. BC, scilicet 12. factis sub q. DB, & q. BC, & 4. factis sub, BD, & ducto 3. q. DB, in, BC, idest 12. factis sub, CB, & sub c. BD. Collectis ergo partibus qq. AB, & seiunctis, quæ sunt eiusdem generis, inueniemus ipsum resolui in ſeruatum qq. AD, in 15. qq. DB, in 18. facta sub q. DB, & q. BC, in 4. facta sub, DB, & c. BC, ac in 28. facta sub, CB, in

De usu Indivisibilium in Potestatib. Coëfficiis. 271

in c. BD, quibus iungendum est vnum qq. BC. Nunc ergo secernamus vnum qq. AD, servatum, ac 2. qq. DB. Cum verò hæc sint 15. remanebunt 13. qq. DB. Videamus ergo qualiter ex residuis componantur vnum qq. AD, & 12. facta sub q. AD, & q. DB. Iungatur qq. BC, cum vno qq. BD, cum 6. factis sub q. CB, & q. BD, cum 4. factis sub, CB, & sub c. BD, & cum 4. factis sub, DB, & sub c. BC, quæ componunt qq. CD, vel, DA; & remanebunt aduc 24. facta sub, CB, & sub c. BD, 12. facta sub q. CB, & q. BD, cum 12. qq. DB. Sed 12. facta sub q. DB, & q. BC, 24. facta sub, CB, & c. BD, idest 24. facta sub q. DB, & sub rectangulo, DBC, idest 12. facta sub q. DB, & 2. rectangulis, DBC, cum 12. factis sub eodem q. DB, & q. DB, scilicet cum 12. qq. DB, constituant 12. facta sub q. DB, & sub q. DC, vel sub q. DA. Ergo qq. AB, cum qq. BC, æquatur 2. qq. AD, 2. qq. DB, & 12. factis sub q. AD, & sub q. DB. Quod, &c.

15. huius

2. & 13. huius.

C O R O L L A R I U M.

HAs autem aquationes transferri quoque posse ad o. q. figura cuiuscunque iuxta datam regulam, in qua o. l. bifariam & non bifariam sc̄ta sint, & cas, quæ in proximis 4. Propositionibus considerata fuerunt, ad similes figura data potestates pariter extendi, patet per Propos. 12 superiorem.

S C H O L I U M.

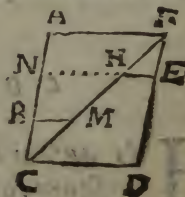
Cum verò propter demonstranda mihi non opus esset procedere ultra qq. vi superius dixi propterea in his quoque Prop. constiti in ipsis qq. Verum si quis ulterius procedere velit, id ei licebit facilius per multiplicationem consuetam in Algebra vi supra quoque innuebatur, & vi amplius patebit inferius.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

*Si in quocunque parallelogrammo ducatur diameter;
 basiſque ſumatur prò regula: omnes lineæ
 parallelogrammi duplæ erunt om-
 nium linearum cuiusvis
 factorum trian-
 gulorum.*

P Atet hæc per dicta in Prop. 19. Lib. Sec. Geom. Ind.
 quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 35. Cum enim ibi oſtē-
 datur circa illius Schema (quod hic denuò exhibetur) o.
 l. triangulorum, ACF , $FC D$, regu-
 la, $C D$, inter ſe adæquari, ideo, com-
 ponendo, o. l. utriusque trianguli,
 hoc eſt o. l. parallelogrammi, $A D$,
 duplæ erunt o. l. cuiusvis triangulo-
 rum, ACF , $FC D$. Quod, &c.



PROPOSITIO XX.

*In eodem Schemate, regula eadem: omnia quadrata
 parallelogrammi, $A D$, tripla erunt omni-
 um quadratorum cuiusvis dicto-
 rum triangulorum, AC
 F , $F C D$.*

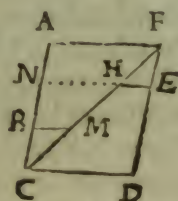
H A Ec oſtenditur in Prp. 24. Lib. Sec. Geomet. Ind.
 quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 50.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

In eodem Schemate, regula eadem: omnes cubi parallelogrammi, AD , quadrupli erunt omnium cuborum cuiusvis dictorum triangulorum, ACF , FCD .

ETenim o. c. parallelogrammi, AD , æquantur o. c. triangulorum, ACF , FCD , & 3. factis sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, ACF . Sunt autem o. c. AD , hoc est factum sub o. l. AD , & sub o. q. AD , ad factum sub iisdem o. l. AD , & sub o. q. trianguli, FDC , vt o. q. parallelogrammi, AD , ad o. q. trianguli, FDC (quia communis est altitudo, nempe o. l. AD ,) hoc est in ratione tripla. o. c. ergo, AD , tripli erunt facti sub o. l. AD , & sub o. q. FDC , trianguli: & hoc æquatur facto sub o. l. trianguli, FAC , & sub o. q. trianguli, FDC , vna cum facto sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. eiusdem trianguli, FDC , hoc est vna cum o. c. trianguli, FDC . Ergo o. c. AD , tripli erunt o. c. trianguli, FDC , & facti sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FDC . Quapropter resolvendo o. c. AD , in suas partes; erunt o. c. ACF , o. c. FCD , 3. facta sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, ACF , tripli o. c. FCD , simul cum facto sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FDC . Sed & 3. facta sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FCD , sunt tripla vnius istorum factorum. Ergo & reliquum reliqui triplum erit. Nempe o. c.



14. huius
Cor. 18.
huius.

Cor. 1.
11. huius

2. huius.

14. huius
& Cor.
18. huius

Mm ACF,

14. huius
& Cor.
18. huius

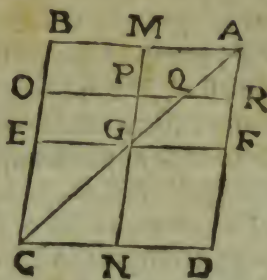
ACF , o. c. FCD , & 3. facta sub o. l. trianguli FCD , & sub o. q. trianguli, FAC , simul, tripli erunt o. c. trianguli, FCD . Sunt verò o. c. trianguli, ACF , cum o. c. trianguli, FCD , dupli o. c. trianguli, FCD , ergo residuum, scilicet 3. facta sub o. l. trianguli, FCD , & sub o. q. trianguli, ACF , æqualia erunt o. c. trianguli, FCD . Quapropter 3. facta sub o. l. trianguli, FAC , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FCD , & sub o. q. trianguli, FAC , & cum o. c. triangulorum, FAC , FDC , hoc est o. c. parallelogrammi, AD , quadrupli erunt o. c. trianguli, FCD , vel trianguli, FAC . Cum enim factum sub o. l. ACF , & o. q. FCD , æquetur facto sub o. l. FCD , & o. q. ACF , propter æqualitatem coalternè respondentium linearum, & quadratorum in ipsis triangulis, FAC , FCD , ideo 3. facta sub, o. l. ACF , & o. q. FCD , 3. factis sub o. l. FCD , & o. q. FAC , adæquantur. Vnde patet, &c. Quod, &c.

PROPOSITIO XXII.

Similiter in quocunque parallelogrammo ducta diametro, ac regula basi: omnia quadratoquadrata parallelogrammi quintupla sunt omnium quadratoquadratorum cuiusvis triangulorum per ipsam diametrum constitutorum.

SIt parallelogrammum, BD , in eoque ducta diameter, AC , & regula, CD . Dico o. qq. BD , esse quintupla o. qq. trianguli, ACD , vel, ABC . In hac autem methodum sequar Propositionis 24. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ est in Exerc. 1. Pag. 50. Quoniam verò illa vtitur Prop. 22. eiusdem, ideò, & in hac eandem Prop. 22. adhibebimus, sed quatenus illa quoque de o. p. verificatur, & subinde de o. qq. Hoc enim facillè ostendetur, si in eadem Prop.

Prop. 22. quæ habetur in Exerc.
I. pag. 40. ubi cunq; assumuntur
o. q. substituantur o. p. & uni-
versaliter pateat in illius Sche-
mate excessum o. p. figuræ cir-
cumscriptæ triangule, O E S, su-
per o. p. inscriptæ, æquari o. p.
(subintellige o. p. eiusdem gra-
dus cum tota hac Prop.) paral-
lelogrammi D S, regula, E S.



Namq; o. p. L P, vel, G Q, cum excessu o. p. G Q, super Cor. 1.
o. p. G Q, faciunt o. p. G Q, vel, I R : & hæc cum excessu 3. huius.
o. p. F R, inper easdem, faciunt o. p. F R, vel, H S : ac de-
niq; o. p. H S, cum excessu o. p. D S, super o. p. H S, fa-
ciunt o. p. D S. Cætera verò omnia pendent ex superiori-
bus Prop. quas faciliè in dicta demonstratione, o. p. appli-
cata, studiosus animadvertet.

Hoc supposito ut ad hanc demonstrandam proceda-
mus bifariam secabimus diametrum, A C, in, G, & per,
G, ducemus ipsi, C D, D A, parallelas, A F, quidem
ipsi, C D, &, M N, ipsi, A D, & aliam quamcunq; O R,
eidem C D, æquidistantem, secantemq; M N, A C, in pun-
ctis, P, Q. Erit ergo, O R, bifariam secta in, P, & non
bifariam in, Q : & eadem ratione o. l. parallelogrammi,
B D, erunt bifariam sectæ per lineam, M N, & non bifa-
riam per, A C. Quapropter o. qq. triangulorum, A B C,
A D C, æquabuntur o. qq. B N, & triangulorum, A M G, 12. huius.
G N C, bis vna cum 12. factis sub o. q. B N, & sub o. q. 7. huius.
triangulorum, A M G, G C N : vnde dimidium dimidio
æquabitur, hoc est o. qq. trianguli, A D C, tantum, æqua-
buntur o. qq. B N, & triangulorum, A M G, G N C, semel
tantum, vna cum 6. factis sub o. q. B N, & sub o. q. co-
rundem triangulorum, A M G, G N C. Quoniam verò
parallelogramma, B D, M F, sunt similia, idè o. qq. B D,
ad o. qq. M F, habebunt rationem multiplicem rationis
laterum homologorum, C D, C F, (quæ est ut 2. ad 1.)
ut est multiplex unitatis, numerus exponentis qq. qui
& 4. unitate auctus, nempe 5. Si ergo fiat ut 1. ad 2. ita 2.
ad

Mm 2

ad

ad 4. 4. ad 8. 8. ad 16. & 16. ad 32. quintam proportionalem ipsorum 1. & 2. conuertendo, o. qq. BD, ad o. qq. MF, erunt vt 32. ad 1. Et quia o. qq. parallelogrammorum, BA, MF, ad o. qq. triangulorum, ACD, AGF, habent eandem rationem, per suppositam Prop. 22. Lib. Sec. Geo. Ind. applicatam o. p. idè permutando, & o. qq. trianguli, ACD, ad o. qq. trianguli, AGF, erunt vt 32. ad 1; vt etiam ad o. qq. trianguli, AMG: vnde eadem o. qq. trianguli, ACD, ad o. qq. triangulorum, AMG, GCN, erunt vt 32. ad 2. seu vt 16. ad 1.

Verum o. qq. ACD, æquantur o. qq. BN, & o. qq. triangulorum, AMG, GNC, vna cum 6. factis sub o. q. BN, & sub o. q. eorundem triangulorum, AMG, GNC, vt probatum est: ergo hæc ad o. qq. triangulorum, AMG, GCN, erunt vt 16. ad 1. Et diuidendo, o. qq. BN, vna cum 6. factis sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GNC, ad o. qq. AMG, GCN, erunt vt 15. ad 1. Est verò factum sub o. q. BN, & sub o. q. BD, ad factum sub o. q. BN, & sub eisdem o. q. BN, hoc est ad o. qq. BN, vt o. q. BD, ad o. q. BN, idest vt q. DC, ad q. CN, nempe vt 4. ad 1: & factum sub o. q. BN, & sub o. q. BN, ad 6. facta sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GCN, est vt o. q. BN, ad sexcuplum o. q. AMG, GCN, hoc est vt 1. ad 2, quod sic probatur. Nam o. q. BG, tripla sunt o. q. trianguli, AMG, & o. q. EN, tripla o. q. GCN, vnde o. q. BN, tripla sunt o. q. AMG, GNC, ergo ad horum sexcuplum erunt vt 3. ad 6. hoc est vt 1. ad 2. Et quia probatum est factum sub o. q. BN, & sub o. q. BD, ad factum sub o. q. BN, & sub o. q. BN, quod est o. qq. BN, esse vt 4. ad 1. Ergo ex æquali factum sub o. q. BN, & sub o. q. BD, ad 6. facta sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GNC, erit vt 4. ad 2. Colligendo igitur consequentia, factum sub o. q. BN, & sub o. q. BD, ad factum sub o. q. BN, & sub o. q. BN, vna cum 6. factis sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GCN, erit vt 4. ad 3. seu vt 20. ad 15. Sed & supra ostensum est idem factum sub o. q. BN, & o. q. BN, idest o. qq. BN, cum 6. factis sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GCN, ad o. qq. AMG, GCN, esse vt 15. ad 1. Ergo denuò colligen-

ligendo hæc consequentia, factum sub o. q. BN, & sub o. q. BD, ad o. qq. BN, ad o. qq. AMG, GCN, & ad 6. facta sub o. q. BN, & sub o. q. AMG, GCN, idest ad o. qq. trianguli, ACD, quæ ex dictis consequentibus componuntur, ut superius probatum est, erit ut 20. ad 16.

Deniq; cum q. DC, sit quadruplum q. CN, etiam o. q. BD, quadrupla erunt o. q. BN. Ut verò o. q. BD, ad o. q. BN, ita (sumptis velut communi altitudine o. q. BD,) factum sub o. q. BD, & o. q. BD, ad factum sub o. q. BD, & sub o. q. BN. Ergo factum sub o. q. BD, & o. q. BD, hoc est o. qq. BD, erit ad factum sub o. q. BD, & o. q. BN, ut 80. ad 20. Factum verò sub o. q. BD, & sub o. q. BN, ad o. qq. trianguli, ACD, ostensum esse ut 20. ad 16. Ergo o. qq. BD, ad o. qq. trianguli, ACD, vel, ABC, erunt ut 80. ad 16. hoc est ut 5. ad 1. nempe quintupla. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM I.

EX dictis in principio superioris demonstrationis circa Prop. 22. Lib. Sec. Geo. Ind. o. p. applicatam, patet quorumcunq; parallelogrammorum o. p. ad o. p. triangulorum quæ à diametris constituuntur, eiusdem tamen gradus, esse in eadem ratione. Et consequenter patet illas esse in eadem ratione ad o. p. eiusdem gradus quorumcunq; triangulorum in eadem, vel aequalibus basibus, & altitudine cum illis existentium, regulis basibus. Nam sub duobus cuiuscunq; trianguli lateribus, potest compleri parallelogrammum, ut data triangula sint constituta à diametro. Quapropter o. p. datorum triangulorum se habebunt inter se, ut o. p. circumscriptorum parallelogrammorum, & subinde ut o. p. quorumcunq; parallelogrammorum in iisdem, vel aequalibus basibus, eademq; altitudine existentium.

COROLLARIUM II.

I. INSUPER ex præcedenti Corollario intelligimus quæcunq; circa o. p. parallelogrammorum ostensa sunt, eadem quo.

quoque verificari circa o. p. triangulorum cum illis in equali altitudine existentium, regulis iisdem.

2. Igitur in illis o. p. regulis basibus, erunt ut potest. basium, eiusdem gradus. Immo & facta sub o. p. datorum, aequalitatem triangulorum, erunt inter se ut facta sub potest. basium, ut in Cor. 1. & 2. Prop. 3. dicebatur de o. p. parallelogrammorum.

3. Similiter eadem, vel aequalibus basibus, & regulis existentium triangulorum o. p. eiusdem gradus erunt ut altitudines, vel ut latera equaliter basibus inclinata, si talia sint. Immo, & facta sub o. p. triangulorum in eadem, vel aequalibus basibus existentium, regula basi, vel basibus, erunt ut altitudines, seu ut dicta latera, &c. Ut in Cor. Prop. 4. dicebatur circa parallelogramma.

4. Quorumlibet quoque triangulorum, regulis basibus, o. p. eiusdem gradus habebunt inter se rationem compositam ex ratione altitudinum, vel laterum equaliter basibus inclinatorum, & ex ratione potest. basium, eiusdem gradus cum praedictis.

5. Triangulorum, regulis basibus, quorum ipsarum basium potest. eiusdem gradus, altitudinibus, vel lateribus equaliter basibus inclinatis, reciprocantur o. p. eiusdem gradus, erunt aequales. Et quorum o. p. erunt aequales, basium quoque potest. eiusdem gradus cum praedictis altitudinibus, vel lateribus aequè basibus inclinatis, reciprocabuntur.

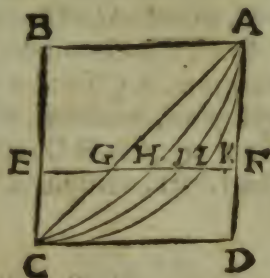
6. Similium triangulorum o. p. regulis homologis lateribus, erunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, ut erit unitatis multiplex, numerus exponentis potest. assumptæ, unitate auctus.

7. Cuiuscunque trianguli o. p. regula quocunque latere, ad o. p. eiusdem, eiusdemque gradus, regula altero reliquorum laterum, erunt ut potest. 1. regula ad potest. Secundæ Existentibus ambabus hisce potest. eiusdem gradus inter se, at immediatè inferioris gradu assumptæ in triangulo potestatis.

PRO.

PROPOSITIO XXIII.

In quocunque parallelogrammo, ut, BD , regula basi, CD , si agatur ipsi, CD , quacunque parallela, EF , & ducatur diameter, AC , quam illa secet in, G ; erit ut, DA , ad, AF , ita, CD , vel, EF , ad, FG . Dicatur autem, AC , diagonalis prima. Rursus ut $q. DA$, ad $q. AF$, ita fiat, EF , ~~AD~~ , FH , & ita ubique fieri intelligitur in parallelis ipsi, CD , ita ut omnes homologæ ipsi, HF , terminentur ad curvam, AHC . Pariter ut $c. DA$, ad $c. AF$, ita quoque fiat, EF , ad, JF , & sic in cæteris, descripta curva CLA . Et ut $qq. AD$, ad $qq. AF$, ita sit, EF , ad, FL , & sic in cæteris, descripta curva, CLA . Quod & in reliquis potest. fieri supponi potest. Dicatur autem, CHA , diagonalis 2. CLA , diagonalis 3. CLA , diagonalis 4. &c. Similiter triangulum, $AGCD$, vocetur 1. spatium diagonalium parallelogrammi, BD , trilineum, $AHCD$, 2. spatium, $AICD$, tertium, $ALCD$, 4. &c. Dico ergo parallelogrammum, BD , duplum esse primi spatij, triplum secundi, quadruplum 3. quintuplum quarti, &c.



Quod enim parallelogrammum, BD , duplum sit 1. spatij, ACD , patet quia per Prop. 19. o. l. BD , duplæ

duplæ sunt o. l. A C D, & ideò per Prop. 3. Lib. Secun.
Geom. Ind. B D, duplum est spatij, A C D.

Quod verò, B D, sit triplum secundi spatij, A L C D,
probat, quia ut q. D A, ad q. A F, siue ut q. E F, ad
q. F G, ita est, E F, ad F H, & sic in cæteris, ergo ut o.
11. huius q. B D, ad o. q. trianguli, A C D, ita erunt o. l. B D, ad
o. l. spatij, A H C D, & subinde ita, B D, ad, A H C D,
o. q. verò, B D, tripla sunt o. q. trianguli, A C D, ergo &
B D, spatij, A H C D, triplum erit.

Eadem ratione ostendemus o. l. B D, ad o. l. tertij spatij,
A I C D, esse ut o. c. B D, ad o. c. trianguli, A C D; id est
22. huius ipsum, B D, spatij, A I C D, quadruplum esse.

Similiter probabimus o. l. B D, ad o. l. spatij, A L C D,
22. huius esse ut o. qq. B D, ad o. qq. trianguli, A C D; nempe ipsum,
B D, spatij, A L C D, quintuplum esse.

Et sic si proberetur o. p. B D, deinceps subsequentes o. p.
trianguli, A C D, cum illis eiusdem gradus, esse sextuplas,
septuplas, octuplas, &c. eodem modo ostenderetur paral-
12. huius lelogrammum, B D, esse sextuplum quinti spatij, septu-
plum sexti, octuplum septimi, & sic in infinitum.

C O R O L L A R I U M.

EX his innotescit quoque ratio, B D, ad primum spatium
residuum, B C A, secundum, B C H A, tertium, B C I
A quartum, B C L A, &c. erit enim, B D, duplum primi
residui, spatij sexquialterum secundi sexquitertium tertij
sexquiquartum quarti, &c. Similiter habetur ratio inter
hec residua, & sua spatia. Namque primum residuum, A B
C G A, æquale est primo spatio, A G C D: secundum residuum,
B C H A, duplum est secundi spatij: tertium tertij triplum:
quartum quarti quadruplum, &c. Inter diagonales verò ma-
nifestum est, A C, esse rectam lineam, C H A, parabolam
cuius vertex, A per conuersum Corollarij Prop. primæ Libri
Quarti Geomet. Ind. Est enim ex hypothesi, C D, ad, H F, ut
q. D A, ad, q. A F. Ipsæ denique, E F, G F, H F, I F, I
F, &c. sunt continuè proportionales, ut facile ostendi potest.

SCHO-

S C H O L I U M.

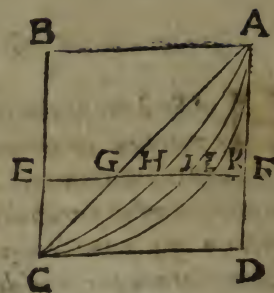
HÆc à me præmissa sunt circa linearum, parallelogrammorum, & triangulorum potestates, cum ijs dege-
dis occasionem attulerit, ut in præfatione dictum est, inquisi-
tio mensuræ fusi parabolici. pro qua mihi erat inveniendæ pro-
portio o. qq. parallelogrammi dati ad o. qq. alterutrinus
triangulorum per eiusdem diametrum constitutorum. Licet
autem ad hanc inveniendam pauca ex demonstratis Prop.
sufficerent, non tamen cætera, quæ hac occasione inuenta sunt
circa dictas potestates, negligenda, vel supprimenda duxi;
tum quia sciri digna videntur, & ad alia problemata soluen-
da fortè non omnino evadent inutilia, tum ut ampliaretur
doctrina mea Geom. Ind. eiusdemque methodus illustrior ap-
pareret. Inuenta ergo dicta proportione o. qq. sequentem
Prop. circa mensuram fusi parabolici immediatè libuit de-
monstrare.

P R O P O S I T I O XXIV.

*Si parallelogrammum, & parabola fuerint in eadem
basî, & circa eundem axim; conuertantur autem cir-
ca basim. Cylindrus genitus ex parallelogrammo ad
solidum genitum ex parabola, quod à Keplero ducitur fu-
sus parabolicus, erit ut 15. ad 8.*

EXponatur denuò figura Prop. ant. in qua curua CH
A, est linea parabolica, vertice, A, ut dictum est;
quapropter, A H C B, erit planum parabolicum, seu se-
mi parabola. Supponatur autem nunc, A B, axis, & con-
ueriti parallelogrammum, B D, cum semiparabola, A H
C D, circa semibasim, B C, ut fiant ex, B D, cylindrus,
Nn & ex,

& ex, A H C B, semifusus parabolicus. Dico cylindrum ad hunc semifusum, (vt erit, & cylindrus huius duplus ad integrum fusum) esse vt 15. ad 8. Cæteris enim manentibus vt in ant. Prop. quia, E F, ad, F H, est vt q. D A, ad q. A F, hoc est vt q. E F, ad q. F G, ergo q. E F, ad q. F H, erit vt qq. E F, ad qq. F G; & sic ostendimus esse in cæteris quibuscunq. ipsi C D, tan-



quam regulæ parallelis. Ergo o. q. B D, ad o. q. trilinei, A H C D, erunt vt 15. ad 8. q. trianguli, A C D, hæc verò sunt in ratione quintupla; ergo, & o. q. B D, quintupla erunt o. q. trilinei, A H C D. Sunt verò o. q. B D, id est factum sub o. l. B D, & o. l. B D, ad factum sub o. l. B D, & o. l. A H C D, vt, B D, ad, A H C D, nempè tripla, hoc est o. q. B D, ad factum sub o. l. B D, & sub o. l. A H C D, erunt vt 15. ad 5. Sed factum sub, o. l. B D, & sub o. l. A H C D, æquatur facto sub o. l. A H C B, A H C D, & o. q. A H C D. Ergo ad hæc o. q. B D, sunt vt 15. ad 5. Sed o. q. B D, ostensa sunt esse quintupla o. q. A H C D, ergo o. q. B D, ad factum sub o. l. A H C B, A H C D, erunt vt 15. ad 2. & ad duo facta, vt 15. ad 4. Cum verò o. q. B D, ad o. q. A H C D, sint vt 15. ad 3. erunt colligendo, o. q. B D, ad o. q. A H C D, cum 2. factis sub o. l. A H C B, A H C D, vt 15. ad 7. Ergo o. q. B D, ad residuum, nempè ad o. q. A H C D, erunt vt 15. ad 8. Ergo & quodcunque solidum simile genitum ex, B D, ad sibi simile genitum ex, A H C B, erit vt 15. ad 8. per Prop. 33. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ ponitur in Exerc. prima Pag. 69. Et subindè Cylindrus ex, B D, ad semifusum parabolicum genitum ex semiparabola, A H C B, vt & duplum ad duplum, hoc est cylindrus genitus ex parallelogrammo parabolæ integræ circumscripto, qui est prædicti duplus, ad fusum genitum ex ipsa parabola, erit vt 15. ad 8. quod, &c.

o. q. parallelogrammi
B D ad

11. huius
22. huius
11. huius

23. huius

2. huius

13. huius

& Cor.

18. huius

C O R O L L A R I V M.

Constat ex hac demonstratione inuentam proportionem 15. ad 8. nedum esse inter dictum cylindrum, & fustum, sed etiam inter quacumq. solida inuicem simularia genta ex dicto parallelogrammo, & parabola; & hoc siue, AB , sit axis, siue tantum diameter.

S C H O L I V M.

Hoc demonstrato, ut continetur prefata doctrina, asferentur hic ea, quæ à me inuentis superaddidit prænominaus Io. de Beaugrand, ex quibus Lector intelliget hanc Ind. methodum etiam apud insignes Geometras usu receptam, & exultam fuisse, qui tali ratione processit, qualis in sequentibus apparet.

Primum Lemma Beaugrand.

Data recta linea bifariam, & non bifariam diuisa, inuenire cui sit æquale aggregatum potestatum eiusdem gradus (quicunq. sit ille) inæqualium partium.

Sit recta, RV , diuisa bifariam in, S , & non bifariam in, T , oportet inuenire cui sit æquale aggregatum potestatum eiusdem gradus (quicunq. sit ille) partium R S T V inæqualium, RT , TV . Ad hoc inquirendum considerabimus, RT , veluti summam, & TV , veluti differentiam rectarum, RT , TV . Ut autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram literalem, partem, RS ,
 Nn 2 rectæ,

rectæ, R V, vocantes. a. & partem, S V, b. denominantes. Erat ergo, R T, a + b, & T V, a — b. Volens itaq; inuenire cui æquetur q. R T, adiunctum q. T V, compono facta à binomia radice, a + b, nempè a a + 2 a b + b b; necnon & ab a — b. scilicet a a — 2 a b, + b b. Hæc q. simul iuncta faciunt 2 a a + 2 b b. Hinc itaq; colligitur q. R T, plus q. T V, æquale esse 2 q. R S, plus 2 q. T S. Quod est illud ipsum, quod Euclides Lib. Sec. demonstrat.

Si velim scire cui æquetur c. R T, c. T V, aggregatus, similiter effingo c. abs radice a + b, qui erit a a a + 3 a a b, + 3 a b b, + b b b. Vt & abs radice a — b, & c. erit a a a — 3 a a b, + 3 a b b — b b b. Cubis simul additis oritur hæc summa, 2 a a a, + 6. a b b. Vnde manifestum est c. R T, additum c. T V, æquari 2. c. R S, plus sextuplo facti ex, R S, in q. S T. Et ita in quouis potestatum gradu progrediendo optatum consequemur, vt exemplis subiectis liquidò apparet.

*Exemplum primum in
Quadratocubis.*

qcubus abs a + b facit	qcubus abs a — b facit	Summa qcubi ex a + b & qcubi ex a — b
+ a ^v	+ a ^v	+ 2 a
+ 5 a ^{iv} b	— 5 a ^{iv} b	
+ 10 a ⁱⁱⁱ b ⁱⁱ	+ 10 a ⁱⁱⁱ b ⁱⁱ	+ 20 a ⁱⁱⁱ b ⁱⁱ
+ 10 a ⁱⁱ b ⁱⁱⁱ	— 10 a ⁱⁱ b ⁱⁱⁱ	
+ 5 a b ^{iv}	+ 5 a b ^{iv}	+ 10 a b ^{iv}
+ b ^v	— b ^v	

Exem

*Exemplum secundum in
Cubocubis.*

ccubus abs a + b facit	ccubus abs a — b facit	Summa ccubi a + b & ccubi a — b
+ a ^{vi}	+ a ^{vi}	+ 2 a ^{vi}
+ 6 a ^v b	— 6 a ^v b	
+ 15 a ^{iv} b ⁱⁱ	+ 15 a ^{iv} b ⁱⁱ	+ 30 a ^{iv} b ⁱⁱ
+ 20 a ⁱⁱⁱ b ⁱⁱⁱ	— 20 a ⁱⁱⁱ b ⁱⁱⁱ	
+ 15 a ⁱⁱ b ^{iv}	+ 15 a ⁱⁱ b ^{iv}	+ 30 a ⁱⁱ b ^{iv}
+ 6 a b ^v	— 6 a b ^v	
+ b ^{vi}	+ b ^{vi}	+ 2 b ^{vi}

*Exemplum tertium in
Cubocubocubis.*

ccubus abs a + b facit	ccubus abs a — b facit	Summa ccubi a + b & ccubi a — b
+ a ^{ix}	+ a ^{ix}	+ 2 a ^{ix}
+ 9 a ^{viii} b	— 9 a ^{viii} b	
+ 36 a ^{vii} b ⁱⁱ	+ 36 a ^{vii} b ⁱⁱ	+ 72 a ^{vii} b ⁱⁱ
+ 84 a ^{vi} b ⁱⁱⁱ	— 84 a ^{vi} b ⁱⁱⁱ	
+ 126 a ^v b ^{iv}	+ 126 a ^v b ^{iv}	+ 252 a ^v b ^{iv}
+ 126 a ^{iv} b ^v	— 126 a ^{iv} b ^v	
+ 84 a ⁱⁱⁱ b ^{vi}	+ 84 a ⁱⁱⁱ b ^{vi}	+ 168 a ⁱⁱⁱ b ^{vi}
+ 36 a ⁱⁱ b ^{vii}	— 36 a ⁱⁱ b ^{vii}	
+ 9 a b ^{viii}	+ 9 a b ^{viii}	+ 18 a b ^{viii}
+ b ^{ix}	— b ^{ix}	

SCHO.

S C H O L I V M.

EX his ergo Lector harum multiplicationum Algebraicarum non ignarus, intelliget hanc viam multò facilitorem esse quàm Euclidianam, cuius longiorem texturam in Propos. 17. & 18. prosecuti sumus. Sequuntur nunc tres Prop. circa potestates qq. succedentes eiusdem Beaugrand.

P R O P O S I T I O XXV.

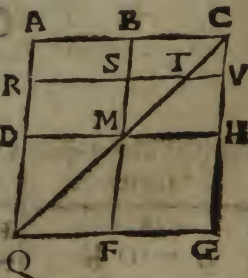
Si exponatur quodcunq; parallelogrammum, AG , cum diametro, QC , & sit regula, QG , o. qc. parallelogrammi, AG , sextuplierunt o. qc. trianguli, CQG , vel, CAQ .

Secetur, CQ , bifariam in, M , & per, M , ducantur rectæ, DH , BF , hæc ipsi, AQ , CG , illa verò ipsi, AC , QG , parallela. Deinde extendatur intra, AG , vbicunq; velimus recta, $RSTV$, ipsi, QG , æquidistans. Quoniam ergo, qc. RT , plus qc. TV , æqualis est 2. qc. RS , plus 2 o. factis sub c. RS , & q. ST , plus 1 o. factis sub, RS , & qq. ST , prætereaq; ducta est vbicunq; RV , sequitur o. qc. triangulorum, AQC , CQG , æquales esse bis o. qc. AF , plus 2 o. factis sub o. c. AM , & sub o. q. trianguli, BMC , plus 2 o. factis sub o. c. DF , & sub o. q. trianguli, QMF , plus 1 o. factis sub o. l. AM , & o. qq. BMC , plus 1 o. factis sub o. l. DF , & o. qq. trianguli, QMF .

Per primū exēplum.

Cor. 18. huius.

Verum o. qc. AQC , æquantur o. qc. CQG . Item factum sub o. c. AM , & sub o. q. BMC , æquatur facto sub



De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 287

sub o. c. DF, & sub o. q. QMF. Item factum sub o. l. A M, & sub o. qq. BMC, æquatur facto sub o. l. DF, & sub o. qq. QMF. Igitur æqualia æqualibus substituendo, bis o. qc. trianguli, CQG, æquantur bis o. qc. AF, plus 40 factis sub o. c. DF, & sub o. q. QMF, plus 20. factis sub o. l. DF, & sub o. qq. QMF. Et factum sub o. c. DF, & sub o. q. QMF, ad o. qc. DF, ita se habet quemadmodum o. q. QMF, ad o. q. DF, hoc est vt 1. ad 3. Igitur 40. facta sub o. c. DF, & sub o. q. QMF, æquantur $\frac{40}{3}$ o. qc. DF, hoc est $\frac{40}{3}$ o. qc. AF.

Cor. 1.
11. huius
20. huius

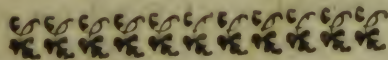
Rursus factum sub o. l. DF, & sub o. qq. QMF, ad o. qc. DF, eam habet rationem, quam o. qq. QMF, ad o. qq. DF, hoc est 1. ad 5. Quare 20. facta sub o. l. DF, & sub o. qq. QMF, æquantur o. qc. DF, quater sumptis, hoc est bis o. qc. AF.

Cor. 1.
11. huius
22. huius

Iam æqualia æqualibus subrogentur. Bis o. qc. CQG, æquantur bis o. qc. AF, plus $\frac{40}{3}$ o. qc. AF, plus o. qc. AF, bis. Ideò addendo, & triplicando, sexies o. qc. CQG, æquantur 32. vicibus assumptis o. qc. AF. Sed o. qc. AF, ad o. qc. AG, eam habent rationem, quam qc. QF, ad qc. QG, hoc est quam 1. ad 32. Quapropter o. qc. AF, 32 vicibus assumpti, æquantur o. qc. AG. Quamobrem sexies o. qc. CQG, æquantur o. qc. AG. Vnde o. qc. AG, sexcupli sunt o. qc. trianguli, CQG, vel, CAQ. Quod demonstrandum erat.

Cor. 1.
3. huius.

Huius quoque & proximè præcedentium potest. satis elegantes misit ad me demonstrationes per Indivisibilia, in Exerc. ant. prænominatus Roccha, quarum methodo & ad alias procedere potest.



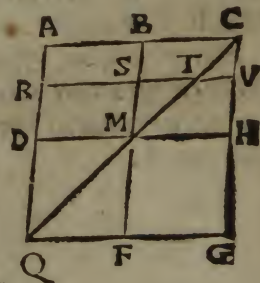
PRO-

PROPOSITIO XXVI.

In eodem Schemate antecedenti o. cc. AG ,
septupli sunt o. cc. trianguli, C Q
G, vel C A Q.

N Amque cc. RT , plus cc. TV , æquatur 2. cc. RS , plus 30. factis sub qq. RS , & q. ST , plus 30. factis sub q. RS , & qq. ST , plus 2. cc. ST , atque, RV , ducta est utcumque: pater ergo o. cc. AQC , plus o. cc. CQG , æquales esse o. cc. AF , bis, plus 30. factis sub o. qq. AM , & sub o. q. BMC , plus 30. factis sub o. qq. DF , & sub o. q. QMF , plus 30. factis sub o. q. AM , & sub o. qq. BMC , plus 30. factis sub o. q. DF , & sub o. qq. QMF , plus o. cc. BMC , bis, & plus o. cc. QMF , bis. Idèoque propter identitatem parallelogrammorum, AM , DF , nec non & triangulorum, AQC , CQG , ac triangulorum, BMC , QMF ; o. cc. CQG , bis æquales erunt bis, o. cc. AF , plus 60. factis sub o. qq. DF , & o. qq. QMF , plus 60. factis sub o. q. DF , & sub o. qq. QMF , plus quater o. cc. QMF . Sed ut factum sub o. qq. DF , & sub o. q. QMF , ad o. cc. DF : ita sunt o. q. QMF , ad c. q. DF , hoc est ita 1. ad 3. Quare 60. facta sub o. qq. DF , & sub o. q. QMF , equalia sunt 20. vicibus assumptis o. cc. DF , hoc est decies o. cc. AF .

Rursus ut factum sub o. q. DF , & sub o. qq. QMF , ad o. cc. DF , ita o. qq. QMF , ad o. qq. DF , hoc est 1. ad 5. Igitur 60. facta sub o. q. DF , & sub o. qq. QMF , æquantur 12. o. cc. DF , hoc est 6. o. cc. AF . Iterum cum triangula, QMF , CQG , sint similia, o. cc. QMF , erunt equalles



De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 289

les $\frac{1}{128}$ o. cc. CQG. Igitur 4. o. cc. QMF, æquantur $\frac{1}{128}$ o. cc. CQG. Iam æqualia æqualibus substituantur, 2. o. cc. CQG, sunt æquales 2. o. cc. AF, plus 10. o. cc. AF, plus 6. o. cc. AF, plus $\frac{1}{128}$ o. cc. CQG. Igitur $\frac{41}{128}$ o. cc. CQG, æquantur 18. o. cc. AF. Omnia diuidantur in 9. & ducantur in 32; manifestum est ergo 7. o. cc. CQG, æquari 64. o. cc. AF. At 0. cc. AF, ad 0. cc. AG, ita se habent vt cc. QF, ad cc. QG, hoc est vt 1. ad 64. Quapropter 0. cc. AG, æquantur 64. o. cc. AF Idenq. 7. o. cc. AQC, æquantur 0. cc. AG. Vnd 0. cc. AG, septupli sunt 0. cc. AQC, vel, CQG. Quod, &c.

Cor. 1.
3. huius.

Cum esset similis ratio in reliquis potestatibus, hic non in alijs contexit demonstrationem, ac maioris claritatis gratia in cubocubocubis, quam nunc subiungimus, eam exaravit.

PROPOSITIO XXVII.

In eodem Schemate 0. ccc. AG, decupli sunt 0. ccc. trianguli, CQG, vel, CAQ.

E Tenim ccc. RT, plus ccc. TV, æquatur 2. ccc. RS, plus 72. factis sub qqc. RS, & sub q. ST, plus 252. factis sub qc. RS, & sub qq. ST, plus 168. factis sub c. RS, & sub cc. ST, plus 18. factis sub, RS, & sub qcc; ST, prætereaq. RV, ducta est vtcumque.

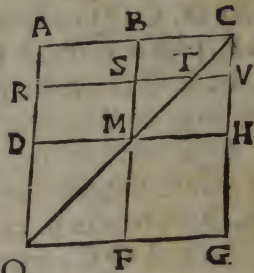
Per exemplum 3.

Hinc colligitur 0. ccc. AQC, plus 0. ccc. CQG, æquari 2. o. ccc. AF, plus 72. factis sub 0. qqc. AM, & sub 0. q. BMC, plus 72. factis sub 0. qqc. DF, & sub 0. q. QMF, plus 252. factis sub 0. qc. AM, & sub 0. qq. BMC, plus 252. factis sub 0. qc. DF, & sub 0. qq. QMF, plus 168. factis sub 0. c. AM, & sub 0. cc. BMC, plus 168. factis sub 0. c. DF, & sub 0. cc. QMF, plus 18. factis sub 0. l. OO AM,

Cor. 18.
huius.

AM, & sub o. qcc, BMC, plus 18. factis sub o. l. DF, & sub o. qcc. QMF.

Et propter identitatem triangulorum, AQC, CQG, item triangulorum, BMC, QMF, necnon parallelogrammorum, AM, DF, 2. o. cc. AQC, sunt æquales 2. o. cc. AF, plus 144. factis sub o. qcc. DF: & sub o. q. QMF, plus 504. factis sub o. qc. DF, & sub o. qq. QMF, plus 336. factis sub o. c. DF, & sub o. cc. QMF, plus 36. factis sub o. l. DF, & sub o. qcc. QMF.



Verum eodem, quo supra usus sum ratiocinio, concluditur 144. facta sub o. qcc. DF, & sub o. q. QMF, æquari 48. o. cc. DF, hoc est 24. o. cc. AF. Item 504. facta sub o. qc. DF, & sub o. qq. QMF, æquari $5\frac{1}{2}$ o. cc. DF, seu $2\frac{1}{2}$ o. cc. FA. Item 336. facta sub o. c. DF, & sub o. cc. QMF, æquari 48. o. cc. DF, vel 24. o. cc. AF. Item 36. facta sub o. l. DF, & sub o. qcc. QMF, æquari 4. o. cc. DF, hoc est 2. o. cc. AF.

Igitur æqualia æqualibus subrogando 2. o. cc. AQC, sunt æquales 2. o. cc. AF, plus 24. o. cc. AF, plus $2\frac{1}{2}$ o. cc. AF, plus 24. o. cc. AF, plus 2. o. cc. AF.

Cor. 1.
3. huius.

Igitur 10. o. cc. AQC, æquantur 512. o. cc. AF. Et quia o. cc. AF, ad o. cc. AG, sunt vt cc. QF, ad cc. QG, hoc est vt 1. ad 512: ideo 10. o. cc. AQC, æquantur o. cc. AG. Ergo o. cc. AG, decupli sunt o. cc. trianguli, AQC, vel, CQG. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

EX demonstratis ergo in suppositis hucusq; potestatibus, & subinde in omnibus, cum semper sit eadem ratio, patet in quocunq; parallelogrammo, ducta diametro, regulaq; assumpta quocunq; laterum; o. p. parallelogrammi o. p. eiusdem gradus cuiuslibet triangulorum à diametro constitutorum,

De usu Indivisibillum in Potestatib. Cossicis. 291
 rum, fore multiplices secundum numerum, numero gradus
 potestatis unitate maiorem. Et subinde innotescit Prop. 23.
 superius traditam pro o. p. pariter verificari.

SCHOLIUM.

Cum hucusq; o. p. contemplati fuerimus tam in parallelogrammis, quam in triangulis, superest, ut nunc parallelogrammum cum trapezio conferamus, considerando in his quoq; rationem o. p. eorundem. Hoc autem subiungimus nedum, quia id & ordo, & complementum huius doctrinae postulat, sed quia sicuti fusi parabolici mensura pendebat ex Prop. 22. ita mensura segmentorum eiusdem fusi secti planis axi parallelis pendet ex nota ratione o. q. q. parallelogrammi, & trapezii in eadem altitudine, & basi cum eo stantis. Horum autem, ac reliquarum potest. rationem exhibet iuxta nostram inuentionem subsequens Propositio.

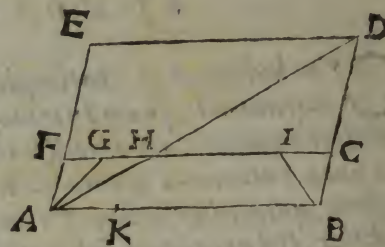
PROPOSITIO XXVIII.

In quocunq; parallelogrammo in eadem basi, & altitudine cum trapezio, cuius oppositae bases sint inuicem parallelae, existente, regula sumpta basi: o. p. parallelogrammi ad o. p. trapezii, eiusdem gradus, erunt ut factum sub multiplici differentia dictarum oppositarum basium, secundum numerum potestatis uno gradu maioris, & sub potestate assumpti gradus maioris basis, ad differentiam potestatum uno gradu maiorum assumpta potest. earundem oppositarum basium.

Sit parallelogrammum, $FABC$, in eadem basi, AB ,
 & altitudine cum trapezio, $ACIB$, cuius oppositae
 bases,
 Oo 2

bases, AB , GI , sint parallelæ, & sit regula, AB . Dico o. p. parallelogrammi, FB , ad o. p. trapezij, $AGIB$, eiusdem gradus, esse vt factum sub multiplici differentia ipsarum, AB , GI , quæ sit, FH , secundum numerum potest. vno gradu maioris, &

sub pot. assumpti gradus ipsius, AB ; ad differentiam potestatum ipsarum, AB , GI , vno gradu maiorum assumpta potestate. Iungantur puncta, A , H , recta, AH , & producantur, AH , BC , vsq; ad concursum in, D , compleaturq; parallelogrammum, EB . Cum ergo, FH , sit differentia ipsarum, AB , GI , erit, HC , æqualis ipsi, GI , & o. p. quæcunq; trapezij, $AGIB$, æquabuntur o. p. eiusdem gradus trapezij, $AHCB$. Hoc verò ostendetur eodem modo, quo Prop. 27. Lib. Sec. Geo. Ind. posita in Exerc. 1. Pag. 60. probata est de huiusmodi trapeziorum o. q. Vnde hoc supposito satis erit ostendere o. p. FB , ad o. p. trapezij, $AHCB$, habere dictam rationem. Et quoniam o. p. FB , ad o. p. trapezij, $AHCB$, habent rationem compositam ex rationibus o. p. FB , ad o. p. EB , o. p. EB , ad o. p. trianguli, DAB , & o. p. trianguli, DAB , ad o. p. trapezij, $AHCB$, eiusdem semper gradus his o. p. suppositis. o. p. verò,



4. huius.

Cor. 27.
huius.

FB , ad o. p. EB , sunt vt, CB , ad, BD , vel, HF , ad, AB . Et o. p. EB , ad o. p. trianguli, DAB , sunt in ratione multiplici secundum numerum vno gradu maiorem numero assumptæ potestatis. Vt o. l. EB , duplæ sunt o. l. trianguli, DBA : o. q. sunt tripla: o. c. quadrupli, &c. Si ergo totuplex fiat, AB , vt ipsius, AK , quotuplices sunt o. p. EB , o. p. DBA . Ex æquo o. p. FB , ad o. p. trianguli, DBA , erunt vt, FH , ad, AK , idest vt multiplex ipsius, FH , quotuplex est, BA , ipsius, AK , ad ipsam, AB . Itaq; o. p. FB , ad o. p. DBA , erunt vt multiplex ipsius, FH , quotus est numerus potestatis vno gradu maioris assumptæ potestate ad, AB . Vt o. l. FB , ad o. l. trianguli, DBA , erunt

vt

vt dupla, FH, ad, AB; o. q. EB, ad o. q. DBA, vt tripla, FH, ad, AB, o. c. &c. vt quadrupla, FH, o. c. vt quintupla, &c. Remanent comparandæ o. p. DAB, ad o. p. trapezij, AHCB. Et quia triangula, ABD, HCD, sunt similia, idcò o. p. trianguli, DBA, ad o. p. trianguli, DCH, sunt vt pot. AB, ad pot. HC, ambabus tamen vno gradu maioribus præsumptis potestatibus. Et per conuersionem rationis o. p. DBA, ad o. p. trapezij, AHCB, erunt vt potestas, AB, ad differentiam potestatum, AB, HC. Et quia prius probatum fuit o. p. FB, ad o. p. DBA, esse vt multiplex, FH, secundum numerum potestatis vno gradu maioris assumpta pot. ad, AB, idest (sumpta pot. AB, eiusdem gradus tanquam communi altitudine) vt factum sub dicta multiplici, FH, & sub pot. AB, ad factum sub, AB, & eadem pot. AB, nempe ad pot. AB, vno gradu maiorem. Postremò verò demonstratum fuit o. p. DBA, ad o. p. AHCB, esse vt pot. AB, vno gradu altioris ad differentiam pot. AB, HC, vno gradu maiorum. Idcò ex quo o. p. FB, ad o. p. trapezij, AHCB, & subindè ad o. p. trapezij propositi, AGLB, erunt vt factum sub multiplici, FH, secundum numerum pot. vno gradu maioris, & sub pot. AB, assumpti gradus, ad differentiam potestatum, AB, HC, vel, GI, vno gradu maiorum assumpta potestate. Vt o. l. FB, ad o. l. trapezij, AGLB, erunt vt factum sub dupla, FH, &, AB, ad differentiam quadratorum, AB, HC. o. q. FB, ad o. q. AGLB, vt factum sub tripla, FH, & q. AB, ad differentiam cuborum, AB, HC, o. c. ad o. c. vt factum sub quadrupla, FH, & c. AB, ad differentiam qctorum, AB, HC, o. qq. ad o. qq. vt factum sub quintupla, FH, & qq. AB, ad differentiam qqc. AB, HC. Et sic deinceps in infinitum. Quod ostendere oportebat.

Respondet hæc Propositioni 28. Lib. Sec. Geo. Ind. quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 67. tantumq; attingit o. q.

Cor. 7.
huius.
& num.
6. Cor.
Secundi
22. huius

PRO-

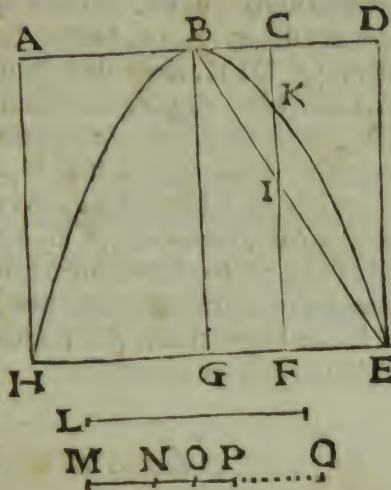
PROPOSITIO XXIX.

Exposita quacunq; parabola, HBE , in basi, HE ,
 & circa axim BG , cum illi circumscripto paralle-
 logrammo, AE , ductaq; quacunq; in, AE , ipsi, BG ,
 parallela, ut, CF , secante parabolicam lineam, B
 E , in K ; si conuertatur, AE , & parabola, HBE ,
 circabafim, HE , ex, AE , fiet cylindrus, & ex
 parabola, HBE , fusus parabolus. Sed ex, CE , fiet
 cylindrus prædicti pars, & ex trilineo, KFE , fiet
 segmentum dicti fusi, secti plano per, CF , ducto, & ad
 axem, HE , dicti fusi erecto. Igitur si exponatur qua-
 cunq; magnitudo, L , & ut factum sub tripla, FE ,
 & q. EG , ad differentiam cuborum, EG , GF , ita
 fiat, L , ad, MO . Ut verò factum sub quintupla, FE ,
 & qq. EG , ad differentiam qcuborum, EG , GF ,
 ita quoq; fiat eadem, L , ad, MN , sumaturq; ipsi, ON ,
 æqualis, OP , ut fiat, MP , quæ erit minor, MQ ,
 æquali ipsi, L , ut probabitur. Dico ut, L , ad, PQ ,
 ita esse cylindrum ex, CE , ad segmentum genitum ex
 trilineo, KFE .

Cor. pri-
 mæ Lib.
 Sec. Geo.
 Ind.
 Cor. 1.
 11 huius.

DVcatur, BE , diameter, quam secet, CF , in, I . Et
 quia est, FC , ad, CK , ut q. DB , ad q. BC , hoc est
 ut q. FC , ad q. CI , & idem contingit in cæteris quibus-
 cunq; ipsi, BG , parallelis in parallelogrammo, CE . Ideò
 ut o. l. CE , ad o. l. $DCKE$, quadrilinei, ita erunt o. q.
 CE , ad o. q. trapezij, $CDEI$. Similiter quia ut q. FC ,
 ad q.

ad q. CK, ita est qq. FC,
ad qq. CI; idè vt o. q. C
E, ad o. q. quadrilinei,
CDEK, ita erunt o. qq.
CE, ad o. qq. trapezij,
CDEI. Vt verò o. q. CE,
ad o. q. trapezij, CDEI,
ita est factum sub tripla,
FI, & q. ED, ad differen-
tiam cuborum, DE, CI;
& ita factum sub tripla,
EF, & q. EG, ad differen-
tiam cuborum, EG, GF,
quia, FE, responder ipsi,
FI, EG, ipsi, ED, & GF,
ipsi, CI, in eadem propor-
tione, ob similitudinem in-
teriorum triangulorū. Vt



Cor. 1.
11. huius.

Per ant.

verò factum sub tripla, FE, & q. EG, ad differentiam cu-
borum, EG, GF, ita ex hypothese est, L, ad, MO. Ergo
o. q. CE, ad o. q. trapezij, CDEI, & subindè o. l. CE, ad
o. l. quadrilinei, CDEK, seu o. q. CE, ad factum sub o. l.
CE, & trilinei, CDEK, erunt vt, L, ad, MO. Sed factum
sub o. l. CE, CDEK, æquatur facto sub o. l. trilinei, FKE,
& quadrilinei, CDEK, plus o. q. CDEK. Ergo o. q. CE,
ad factum sub o. l. FKE, KEDC, cum o. q. CDEK, sunt
vt, L, ad, MO, quod serua.

Cor. 1.
11. huius.
2. huius.

Insuper quia o. qq. CE, ad o. qq. trapezij, CDEI, osten-
sa sunt esse, vt o. q. CE, ad o. q. quadrilinei, CDEK, &
illa sunt vt factum sub quintupla, FE, & qq. EG, ad dif-
ferentiam q. cuborum, EG, GF, hoc verò est vt, L, ad, MN.
Ergo o. q. CE, ad o. q. CKED, erunt vt, L, ad, MN. Pa-
tet autem, cum o. q. CE, ad factum sub o. l. CE, & o. l.
CDEK, probata fuerint esse, vt, L, ad, MO; factum au-
tem sub o. l. CE, & o. l. CDEK, superet o. q. CDEK,
cum probatum fuerit æquari facto sub o. l. FKE, KCDE,
& o. q. KCDE, idè, MO, superare, MN. Sunt ergo o. q.
CE, ad factum sub o. l. trilinei, FKE, & quadrilinei, KC
DE,

Per ant.

DE, vt, L, ad, NO, & ad idem factum bis, vt, L, ad, NP. Eadem vero o. q. CE, ad o. q. quadrilinei, KCDE, ostensa sunt esse, vt, L, ad, MN. Ergo colligendo, o. q. CE, ad o. q. CDEK, & ad bis factum sub, CDEK, KEF, erunt vt, L, ad, MP. Quemadmodum vero illa sunt minora o. q. CE, ita, MP, minor erit, quam, L, vel, MQ, eidem, L, æqualis. Cum ergo o. q. CE, ad o. q. CDEK, cum bis facto sub o. l. CDEK, KEF, sit vt, L, ad, MP; erunt per conuersionem rationis o. q. CE, ad o. q. trilinei, KEF, vt, L, ad, PQ. Sic pariter erunt omnia solida similia, & consequenter etiam rotunda, hoc est cylindrus genitus ex, CE, ad segmentum fusi parabolici genitum ex, KEF. Quod ostendere oportebat.

13. minus.
cum 18.
huius.
33. Exercit.
cit. 1.

COROLLARIUM.

Manifestum ergo est inuentam proportionem verificari pariter de omnibus solidis similibus genitis ex parallelogrammo, CE, & trilineo KEF, etiam si, BG, sit tantum diameter: que proportio nota erit, si, GE, GF, FE, cum angulo, CFE, nota supponantur.

SCHOLIUM.

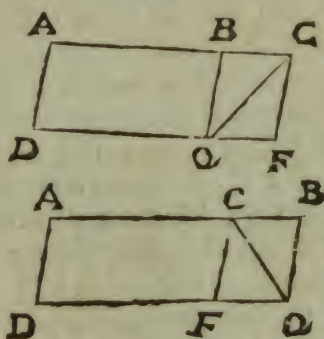
ET quoniam prenominatus Beaugrand simul cum allatis ab eo demonstrationibus, elegantissimam quoque misce pro mensura fusi parabolici, illiusque segmentorum, vt in Prefat. innuebatur, idcirco vt Lector eadem quoque perfrui possit, eandem hic apponemus, præmissa tamen eiusdem insigni Lemmate, quod tale est.

Secundum Lemma Beaugrand.

Sed aliam, inquit ipse, satis elegantem, & vniuersalissimam, quam Prop. 30. Lib. Sec. Geom. Ind. de us-
neis

neis rectis tantum enuntiauit, subnectere est animus. Hanc autem concipiam per modum canonis, seu regule inueniendi (expositis parallelogrammis, AQ , QC , æquæaltis, & ducta diametro, QC , assumptaque, DF , tanquam communi regula) rationem facti sub o.p. AQ , BF , ad factum sub o.p. trapezij, $ADQC$, & trianguli, CQF . Dummodo supponantur o.p. AQ , eiusdem esse gradus cum o.p. trapezij, $ADQC$; & o.p. BF , eiusdem gradus cum o.p. trianguli, CQF .

P Rò primo termino ergo, seu antecedente rationis quesitæ assumatur potestas rectæ, DQ , quæ in eodem gradu subsistat, quo potestates, AQ , vel trapezij, $ADQC$. Deinde componatur potentia abs, DF , minus, QF , in prima figura; vel abs, DF , plus, FQ , in secunda, quæ in eodem gradu quoque sit, quo o.p. AQ , vel trapezij, $ADQC$. Quantitates, è quibus componetur potentia, ordinentur secundum ordinem in Algebra vsitatum, atque prima quantitas diuidatur per numerum unitate maiorem numero gradus o.p. BF , vel trianguli, CQF . Secunda quantitas diuidatur per numerum sequentem in progressionem naturali numerorum, tertia per numerum in eadem progressionem sequentem, atq. eodem ordine residuæ quantitates diuidantur. Veluti si prima quantitas diuidatur per 5. secundam opus erit partiri per 6. tertiam per 7. quartam per 8. &c. Quo peracto habebis secundum terminum.



Pp

Exempli

Exempli gratia, iuxta hunc canonem, assero factum sub
o. q. A Q, BF, ad factum sub o. q. trapezii, AD
QC, & trianguli, C QF, esse ut q. D Q, ad $\frac{7}{5}$ q.
DF, minu. $\frac{2}{5}$ rectanguli, DF Q, plus $\frac{1}{5}$ q. QF, in 1.
figura: vel ad $\frac{1}{5}$ q. DF, plus $\frac{2}{5}$ rectanguli, DF Q, plus
 $\frac{1}{5}$ q. QF, in secunda figura.

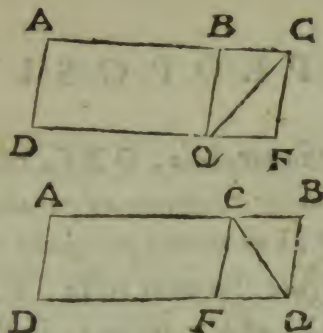
Cum autem fusi parabolici, illiusque segmentorum,
 certa quadam ratione resectorum dimensio ex hoc
 Lemmate pendeat, instituto circa o. q. propterea eius de-
 monstrationem extendere volui, ut hinc etiam pateat quo-
 modo demonstrandæ sint reliquæ Propositiones, quæ ve-
 lut è fonte ex præcedente canone fluunt.

Est ergo factum sub o. q. AF, BF, ad factum sub o. q. A
 F, C QF, ut o. q. BF, ad o. q. trianguli, C QF, hoc est
 Cor. 3. ut 3. ad 1. vel ut q. DF, ad $\frac{7}{5}$ q. DF. Item ut bis factum
 11. huius sub o. l. AF, & o. c. BF, ad factum sub o. l. AF, & o. c.
 21. huius C QF, ita o. c. BF, ad o. c. C QF, hoc est ita 4. ad 1.
 vel ita duplum rectanguli, DF Q, ad $\frac{2}{5}$ rectanguli DF Q.
 Item o. qq. BF, ad o. qq. C QF, sunt ut 5. ad 1. hoc est
 ut q. QF, ad $\frac{1}{5}$ q. QF. Sed ut factum sub o. q. AF, BF,
 Cor. 3. ad bis factum sub o. l. AF, & sub o. c. FB, ita parallelo-
 11. huius grammum, AF, ad parallelogrammum, BF, bis sumptum,
 hoc est ita, DF, ad 2. FQ, vel ita q. DF, ad 2. rectan-
 gula, DF Q. Et ut bis factum sub o. l. AF, & sub o. c.
 Cor. 3. BF, ad o. qq. BF, ita 2. parallelogramma, AF, ad paralle-
 11. huius logrammum, BF, hoc est ita 2. DF, ad, FQ, vel ita 2.
 rectangula, DF Q, ad q. FQ

Itaque in prima figura factum sub o. q. AF, BF, minus
 bis facto sub o. l. AF, & sub o. c. BF, plus o. qq. BF, ad
 factum sub o. q. AF, & trianguli, C QF, minus bis facto
 sub o. l. AF, & sub o. c. C QF, plus o. qq. C QF, erit ut
 q. DF, minus 2. rectangulis, DF Q, plus q. QF, ad $\frac{1}{5}$ q.
 3. Sec. DF, minus $\frac{2}{5}$ rectanguli, DF Q, plus $\frac{1}{5}$ q. QF.

3. Sec. Sed in prima figura factum sub o. q. A Q, BF, æquatur
 Elem. cū factum sub o. q. AF, BF, minus bis facto sub o. l. AF, &
 Cor. 18. & Cor. sub
 11. huius

sub o. c. BF, plus o. qq.
BF. Item factum sub
o. q. trapezij, ADQ
C, & trianguli, CQF,
æquale est facto sub o.
q. AF, & trianguli, C
QF, minus bis facto
sub o. l. AF, & sub o.
c. CQF, plus o. qq. C
QF. Item q. D Q,
æquatur q. DF, minus
2. rectangulis, DFQ,
plus q. FQ.

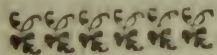


Nunc in analogismo superius exposito æqualia æquali-
bus subrogentur. Igitur factum sub o. q. AQ, BF, can-
dem habebit rationem ad factum sub o. q. trapezij, AD
QC, & trianguli, CQF, quam q. D Q, ad $\frac{1}{2}$ q. DF, minus
 $\frac{2}{3}$ rectanguli, DFQ, plus $\frac{1}{3}$ q. QF.

Ordine non dissimili concludetur in secunda figura
factum sub o. q. AQ, BF, ad factum sub o. q. ADQC,
CQF, esse vt q. D Q, ad $\frac{1}{2}$ q. DF, plus $\frac{2}{3}$ rectanguli, D
FQ, plus $\frac{1}{3}$ q. QF.

Porrò ex præcedentibus colligitur factum sub o. q. A
Q, BF, ad factum sub o. q. ADQC, CQF, se habere
vt 60. q. D Q, ad 20. q. DF, minus 30. rectangulis, DF
Q, plus 12. q. QF. Verum 15. q. D Q, æquantur 15. q.
DF, minus 30. rectangulis, DFQ, plus 15. q. QF, in 1.
figura. In secunda autem 15. q. D Q, æquantur 15. q. D
F, plus 30. rectangulis, DFQ, plus 15. q. QF.

Itaque in vtraque figura vt factum sub o. q. AF, BF, ad
factum sub o. q. ADQC, CQF, ita erunt 60. q. D Q,
ad 5. q. DF, plus 15. q. D Q, minus 3. q. QF. Vel poste-
rioris rationis terminos per 60. dividendo, ita q. D Q, ad
 $\frac{1}{12}$ q. D Q, plus $\frac{1}{4}$ q. DF, minus $\frac{1}{20}$ q. QF.

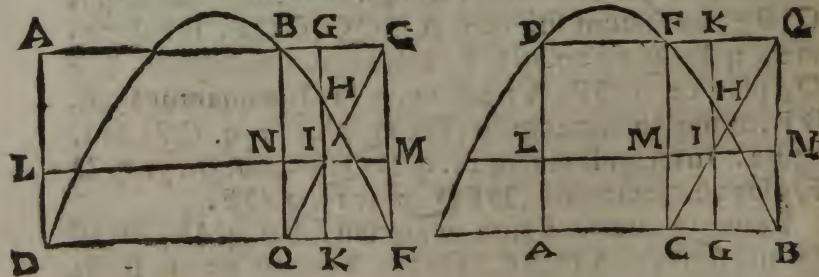


PROPOSITIO XXX.

Iam esto parabola, DBF , recta, DF , hinc inde ubi-
cunque volueris ad parabolam terminata, recta, BQ ,
è diametris paraboles una. Dico, assumpta prò
regula communi recta, BQ , o. q. parallelogrammi,
 BF , ad o. q. trilinei, BQF , esse vt q. DQ , ad $\frac{1}{2}$ q.
 DQ , plus q. DF , minus $\frac{1}{2}$ q. QF .

Vt in
Prop. 47
Libri
Quarti.
Geom.
Ind.

Hoc autem arte, qua Cavalierius vsus est Libro
Quarto Geometrię Ind. vel forsitā vt sequitur de-
monstrari potest. Compleatur parallelogrammum, AF ,
iunctaque, CQ , ducatur recta, $G HK$, vbicunque vol-
ueris inter rectas, BQ , CF , modò sit eis parallela. Tum



3. Quarti
Geom.
Ind.

protrahatur per punctum, I , recta, LNM , parallela or-
dinatę, DF . Quandoquidem natura paraboles, vt rectan-
gulum, DQF , ad rectangulum, DKF , hoc est rectangu-
lum, LNM , ad rectangulum, $LI M$, ita esse constat, BQ ,
hoc est, Gk , ad, Hk . Idcòq. factum sub q. LN , & q.
 NM ,

NM, ad factum sub q. LI, & q. IM, erit vt q. GK, ad q. HK. Cum autem, GK, ducta sit absque electione inter rectas, BQ, CF, sequitur factum sub o. q. AQ, BF, ad factum sub o. q. ADQC, CQE, esse vt o. q. BF, ad o. q. trilinei, BQF.

Sed prior ratio demonstrata est æqualis ei, quæ q. DQ, ad $\frac{1}{2}$ q. DQ, plus $\frac{1}{2}$ q. DF, minus $\frac{1}{2}$ q. QF. Ergo & posterior. Porro fusus parabolicus est solidum ex reuolutione plani parabolici super recta ordinatim ad axem applicata. Igitur rectam, DF, esse ad axem ordinatim applicatam supponamus. Solidum ergo ex reuolutione figuræ, DBF, super recta, DF, genitum erit fusus parabolicus in prima nempe figura. Solida autem ex reuolutione trilinei, BQF, super recta, QF, ex præcedentibus notam habent rationem ad cylindros rectos eiusdem axis, & bases, eam scilicet, conuertendo, habet cylindrus ad solidum, quam q. DQ, ad $\frac{1}{2}$ q. DQ, plus $\frac{1}{2}$ q. DF, minus $\frac{1}{2}$ q. QF. Sed in prima figura eiusmodi solida sunt frusta fusi parabolici, quæ planis axi paraboles parallelis rescantur. Quare si recta, DF, secta esset bisariam in, Q, puncto, cylindrus ex reuolutione rectanguli, BF, super recta, QF, genitus, ad solidum ex trilineo, BQF, super eadem recta, QF, reuoluto procreatum eam haberet rationem, quam 15. ad 8. vt rectas ad numeros reuocanti palam erit. Verum in hoc casu cylindri prædicti duplus est cylindrus rectus, cuius axis, DF, & basis circulus, cuius radius rectæ, BQ, sit æqualis. Item solidi vltimò commemorati duplus est fusus parabolicus ex reuolutione DBF, super recta, DF, productus. Quamobrem cylindrus rectus, cuius axis, DF, & basis circulus, qui radium habeat rectæ, BQ, æqualem, ad fustum parabolicum ex reuolutione figuræ, DBF, super recta, DF, genitum eam habebit rationem, quam 15. ad 8, Igitur non tantum fusi parabolici, verum etiam segmentorum, quæ planis axi paraboles parallelis absconduntur, iuxta proposita satis superq, explicauimus, & demonstrauimus. Quod, &c.

Vt in
Lema.
ant.

SCHO-

S C H O L I U M.

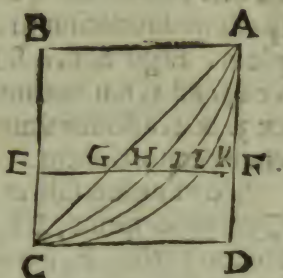
Haec elaborabat vir ille ingeniosissimus cum necdum ex quodam morbo conualuisset, quem lethalem Medici diiudicant, cui idcirco paulò post, maximo Reip. literariae detrimento mors successit. Enimvero cum occiderit florentibus annis, tantumq; nihilominus in Geometricis progressus fuerit, quæ, & qualia, si naturalem vitæ cursum adimpleuisset, ab eo sperari poterant, hæc sedulo perlustrans facile quisq; poterit intelligere. Huic autem satis probabatur hæc Ind. methodus, ut propterea ad me Italicè scribens sub d. 8. Nouembris, Anno 1640. hæc de eadem protulerit. La supplico di scriuermi se lei hà applicato la sua inuentione di dimostrare per gl' Indiuisibili alla ricerca de' centri di gravità, e l'ordine, che tiene, al che giugnerà, se gli piace qualche dun'esempio. Veramente altrettanto stimo questa maniera di dimostrare, poichè è breuissima, e procede direttamente, e non per l'assurdo, &c. Porro iam demonstratis quedam pauca adhuc superaddemus, finemq; imponemus presenti doctrina quatenus nobis licuit exculta, alijs immensum speculationum campum aperuisse sat indicantes.

P R O P O S I T I O XXXI.

In quocunq; parallelogrammo, descriptis iuxta Prop. 23. diagonalibus à prima deinceps quot libuerit, & retenta eadem regula, qua describuntur: o. p. quæcunq; dicti parallelogrammi ad o. p. eiusdem gradus cuiuscunq; spatij dictarum diagonalium, erunt ut factum
sub

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 303
sub numero assumptæ potestatis, & numero spatij,
vnitate auctum, ad ipsam vnitatem.

A Sumpto quocunq; parallelogrammo, BD , in quo iuxta dictam Prop. 23. sint descriptæ quocunq; diagonales, AGC , prima, AHC , secunda, AIC , tertia, ALC , quarta, &c. quousq; libuerit, regula latere, CD , quod hic quoq; sit regula. Dico o. p. parallelogrammi, BD , quæcunq; ad o. p. cuiuscunq; ex dictis spatijs eiusdem tamen gradus, esse vt factum sub numero assumptæ potestatis, & numero spatij, vnitate aucto, ad ipsam vnitatem. Vt si ex. gr. assumantur cubi, quartumq; spatium, $ALCD$, dico o. c. BD , ad o. c. spatij, $ALCD$, esse vt factum sub 3. qui est numerus cubi, & sub 4. qui est numerus spatij, hoc est vt 12. vnitate auctum, scilicet vt 13. ad vnitatem. Ducta enim in, BD , quacunq; recta, EF , ipsi, CD , regulæ æquidistante, ac secante diagonales in, G, H, I, L , quoniam proportio cubi, EF , ad c. FL , est triplicata proportionis, EF , ad, FL , seu composita ex tribus rationibus, EF , ad, FL . Ratio autem, EF , ad, FL , componitur ex ratione, EF , ad, FG , FG , ad FH , FH , ad, FI , & FI , ad, FL , (quæ sunt æquales, quia ex lege descriptionis dictarum diagonalium fiunt hæ lineæ, EF, GF, HF, IF, LF , continuo proportionales) hoc est ex 4. rationibus ipsius, AF , ad, FG . Ergo tres rationes, EF , ad, FL , æquabuntur 12. rationibus ipsius, FE , ad, FG , qui numerus 12. habetur ex ductu 3. numeri potestatis, in 4. numerum spatij. Et consequenter ratio cubi, EF , ad c. FL , duodecupla erit rationis, EF , ad, FG . Sed etiam ratio, quam habet, EF , ad eius portionem interceptam inter, AD , & duodecimam diagonalem, quæ sit, KF , componitur ex 12. rationibus ipsius, EF , ad, FG , terminat enim illa duodecimam proportionem, æqualem propor-



Cor. 23.
huius.

tionis ipsius, AE , ad FG , ut, consideranti manifestum erit.
 Ergo $c. EF$, ad $c. FL$, erit ut EF , ad FK , spectantem ad
 duodecimam diagonalem. Et, EF , ducta est utcumq;
 ii. huius. ergo $o. c. BD$, ad $o. c. trilinei, ALCD$, erunt ut $o. l. BD$,
 ad $o. l. duodecimi spatij$, & subinde ut, BD , ad ipsum
 spatium duodecimum. Sed BD , est huius spatij tredécup-
 lum. Ergo & $o. c. BD$, ad $o. c. trilinei, ALCD$, erunt
 ut $13.$ ad $1.$ seu eorum tredecupli. Rectè ergo productio
 ex $3.$ & $4.$ additur vnitas, ut fiant $13.$ qui ad $1.$ habent di-
 ctam proportionem.

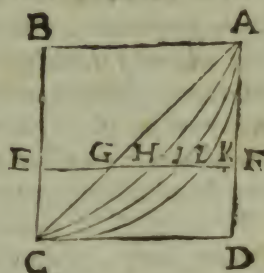
Sed ut vniuersaliter fiat demonstratio sic procedemus.
 Quia ratio ipsius, EF , ad quamcunq; eius portionem re-
 sectam versus, F , per diagonalem assumpti spatij, quæ sit
 ex. gr. FK , componitur ex tot rationibus ipsius, EF , ad,
 FG , quotum est ipsum spatium, nam ad diagonalem cu-
 iusq; spatij terminatur vna ratio, æqualis rationi ipsius,
 EF , ad, FG . Assumpto verò quouis potest. gradu, ratio
 pot. EF , ad pot. FK , eiusdem gradus totuplex est eiusdem
 rationis, EF , ad, FG , quotus est numerus dictæ potestatis.
 Idcò factum sub numero assumpti spatij, & numero pot.
 exhibebit numerum proportionum, AB , EF , in ratione, EF ,
 ad, FG , continuatarum, numerumq; spatij, ad quod pa-
 rallelogrammum, BD , ostenditur esse, ut ipsius, BD , $o. p.$
 ad $o. p.$ assumpti spatij. Sed parallelogrammum, BD , ad
 inuentum spatium est, ut numerus eiusdemmet spatij, vni-
 tate auctus, ad vnitatem. Ergo $o. p. BD$, ad $o. p.$ assu-
 mpti spatij erunt ut factum sub numero assumpti spatij,
 & numero potest. vnitatem aucto ad ipsam vnitatem.
 Quod, &c.

PROPOSITIO XXXII.

*In eadem figura proposito quocunq; spatio, regula ea-
 dem, CD , habetur ratio $o. p.$ parallelogrammi, BD ,
 ad $o. p.$ propositi spatij (eiusdem tamen semper gra-
 dus cum potest. BD ,) à prima, & deinceps in infini-
 tum*

De vsu Indiuisibilium in Potestatib. Cossicis. 305
tum continuatis potestatibus; si exponatur series nu-
merorum à numero dati spatij vnitatem aucto, deinceps
eodem numero spatij sese excedentium, singuliq; refe-
rantur ad vnitatem.

VT si proponatur tertium spa-
 tium, AICD, numerus ei-
 usdem est 3. addita vnitatem fit 4.
 primus numerus huius seriei, in
 qua numeri sese deinceps per 3.
 semper excedunt. Dico ergo o. l.
 BD, ad o. l. huius tertij spatij, B I
 CD, esse vt 4. ad 1. o. q. ad o. q.
 vt 7. ad 1. o. c. ad o. c. vt 10. ad 1.
 o. qq. ad o. qq. vt 13. ad 1. &c.



retenta semper vnitatem pro communi omnium proportio-
 num termino consequente. Hoc autem facile ex præce-
 denti Prop. deducitur,

nam si ducamus 3. nu-
 merum spatij in nume-
 rum primæ pot. seu li-
 near, qui est 1. fiet 3. & addita vnitatem, fiet 4. pro ante-
 cedente proportionis termino, qui ad 1. erit vt o. l. BD,
 ad o. l. spatij, AICB. Similiter ducto 3. in numerum se-
 cundæ pot. hoc est in 2. fiet 6. & addita 1. fiet 7. qui est
 in secundo loco seriei, ostendens o. q. BD, ad o. q. trilinei,
 AICD, esse vt 7. ad 1. Pariter ducendo 3. in numerum
 tertiæ potest. seu cuborum, qui est 3. fiet 9. & addita 1.
 fiet numerus 10. qui est in serie tertio loco, ostendens o. c.
 BD, ad o. c. AICD, esse vt 10. ad 1. Et sic patet ratio nu-
 merorum dictæ seriei; qua arte & reliquæ series pro reli-
 quis trilineis pariter extendi possunt.

4	7	10	13	16	19	&c.
1	1	1	1	1	1	1

SCHOLIUM.

Exhibemus ergo in sequenti Tabella series numerorum
 pro dignoscendis proportionibus o. p. BD, ad o. p. eius-
 dem

Qq

dem gradus spatiorum primi, secundi, tertij, &c. usq; ad decimum, incipiendo à prima potest. & progrediendo per illi succedentes pariter usq; ad decimam potest. quæ est cccuborum. Qui tamen numeri poterunt facile per æquale eorum incrementum in infinitum tam in spatijs, quam in potest. continuari, ut per se patet.

Usus verò sequentis Tabella talis est. Si volueris scire quam proportionem habeant o. p. cuiusdam gradus à primo usq; ad 10. parallelogrammi, BD, ad o. p. eiusdem gradus cuiuscunq; spatiij à primo usq; ad decimum, quares in fronte numerum potest. & spatiū lateraliter in prima sinistra columna, in directumq; habebis numerum, qui ad unitatem erit in eadem dictarum potest. proportionem.

Vt volens scire quam rationem habeant o. qc. BD, ad o. qc. septimi spatiij. Quoniam qc. est 5. potest. idè quærens 5. in fronte, & lateraliter septimum spatium, accipio in area numerum 36. qui ad unitatem est vt o. qc. BD, ad o. qc. septimi spatiij.

Sed ijdem numeri areales facile sine Tabula habentur ducto numero frontali, seu potest. in numerum lateralem, seu spatiij, addita enim unitate, vt in ant. Prop. dicebatur, ipsi producto, illicò habetur dictus numerus arealis quæsitus.

Potestates	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primum spatium	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Secundum	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Tertium	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Quartum	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41
Quintum	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51
Sextum	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61
Septimum	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71
Octauum	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81
Nonum	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91
Decimum	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101

COROLLARIUM I.

SI in dicta Tabella consideremus seriem numerorum in columnis descendendum, illicò intuebimur in columna primæ potest. o. l. parallelogrammi, BD , duplas esse o. l. primi spatij, triplas o. l. secundi spatij, quadruplas o. l. tertij spatij, &c. At ex columna secundæ potest. percipiemus o. q. BD , tripla esse o. q. primi spatij, quintupla o. q. secundi spatij, septupla o. q. tertij, &c. Similiter ex tertia columna patebit o. c. BD , quadruplos esse o. c. primi spatij, septuplos o. c. secundi, undecuplos o. c. tertij, &c. & sic in cæteris. Ita ut in omnibus columnis appareat progressionem, seu incrementum fieri iuxta numerum potest. propriæ columnæ.

COROLLARIUM II.

ET quia ex Corollario præcedenti habetur ordinatim ratio o. q. BD , ad o. q. spatiorum, primi nempe, secundi, tertij, &c. idcò eandem rationem habebunt nedum solida rotunda genita ex parallelogrammo, BD , & dictis spatijs reuolutis circa, AD , (tunc autem, AD , debet supponi perpendicularis ipsi, AB ,) sed & quæcunq; solida ad inuicem simularia genita ex iisdem iuxta communem regulam, CD , quomodocunq; DA , sit ipsi, AB , inclinata.

PROPOSITIO XXXIII.

Si, proposito quocunq; ex residuis spatijs, BD , in ant. figura, eiusdem numeri spatium quærat in latere Tabellæ præcedentis Prop. è regione cuius sumantur in prima, & secunda potestatum columna respondentes numeri. Erit factum sub his duobus numeris, ad

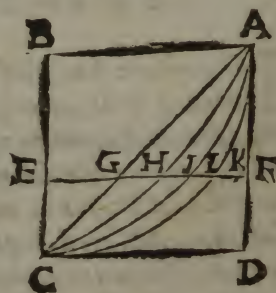
Qq 2 esuf-

eiusdem facti residuum, ab eo dempto duplo differentia dictorum numerorum, cum numero minori; ut o. q. B D, ad o. q. residui spatij propositi, assumpta eadem ut in superioribus regula.

EXposita denuò præcedenti figura assumatur ex. gr. primum spatium residuum, A G C B, & in Tabella præcedenti è regione primi spatij sumantur in prima, & secunda potest. columna numeri 2. & 3. qui inuicem ducti facient 6. Eorum differentia 1. duplicetur, fitq; 2. qui numero minori 2. additus facit 4. quo dempto ex 6. remanent 2. Dico ergo ut 6. ad 2. ita esse o. q. B D, ad o. q. AGCB, regula, CD. Quod verum esse patet ex Prop. 20.

Sumatur nunc secundum residuum spatium, & cum secundo spatio ex dicta Tabella accipiantur numeri col. primæ, & secundæ pot. nempè 3. & 5.

Ab his factum est 15. eorum differentia 2. duplicata, iunctaq; ipsi 3. facit 9. qui demptus ex 15. relinquit 8. Dico ergo ut 15. ad 8. ita esse o. q. B D, ad o. q. residui spatij, seu semiparabolæ, AHCB. Quod verum esse ostendit Proposit. 24.



Deniq; ut hoc vniuersaliter ostendatur, assumemus ex. gr. quartum residuum spatium, A L C B. Sunt ergo o. q. B D, seu factum sub o. l. B D, & o. l. B D, ad factum sub o. l. B D, & sub o. l. spatij, A L C D, ut, B D, ad, A L C D, nempè ut 5. ad 1. Item o. q. B D, ad o. q. A L C D, ex eadem Tabella, quæ sita potest. 2. (pro quadratis) in fronte, & lateraliter spatio quarto, dignoscuntur ex numero areali esse ut 9. ad 1. Sed ut 5. ad 1. ita, ducto utroq; in 9. est factum 45. ad factum 9. Et ut 9. ad 1. ita, ducto utroq; per 5. est factum 45. ad factum 5. Ergo redeamus has duas proportionales ad communem terminum antecedentem 45. Quoniam ergo o. q. B D, ad factum sub o. l. B D, & o. l. A L C D, sunt

sunt vt 45. ad 9. Et eadem o. q. B D, ad o. q. A L C D, sunt vt 45. ad 5. Ergo o. q. B D, ad factum sub o. l. B D, A L C D, minus o. q. A L C D, hoc est ad factum sub o. l. A L C B, A L C D, erunt vt 45. ad differentiam numerorum 5. & 9. nempe ad 4. Et ad eandem bis sumptam erunt vt 45. ad 8. Sed ad o. q. A L C D, sunt vt 45. ad 5. Ergo colligendo o. q. B D, ad factum bis sub o. l. A L C B, A L C D, plus

Residua spatia.

Pro Quadratis

Proportio.

1	6	2
2	15	8
3	28	14
4	45	32
5	66	50
6	91	72
7	120	98
8	153	128
9	190	162
10	231	200

o. q. A L C D, erunt vt 45. ad 13. Dempto autem 13. ex 45. remanent 32. Igitur o. q. B D, ad o. q. A L C D, erunt vt 45. ad 32. Hoc est erunt vt factum sub 5. & 9. numeris, col. 1. & 2. pot. è regione quarti spatij constitutis, ad residuum dempto ex 45. numero 13. qui constat ex dupla. diff. 4. dictorum numerorum, nempe ex 8. & numero minori 5. scilicet vt 45. ad 32. Quod, &c.

Vide proportionem o. q. B D, ad o. q. residuorum spatiorum usq. ad decimum in precedenti Columnella.

COROLLARIUM.

Cum ergo sit notatio o. q. B D, ad o. q. residuorum spatiorum eiusdem, B D, euadit quoque notatio omnium similarium solidorum ex dictis spatiis, iuxta datam regulam, genitorum.

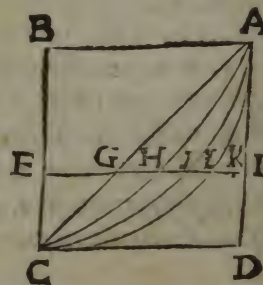
33. Exer. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

In eadem antecedenti figura, regula eadem, o. c. B D, ad o. c. cuiuscunque residui spatij, erunt ut factum sub numeris prima, secunda, & tertiae columnae potestatum eiusdem Tabellae, è regione spatij existentibus, ad eiusdem residuum, ab eodem dempto facto sub triplo differentiae numerorum prima, & secunda columna, & sub numero tertia, plus facto sub eisdem numeris prima, & secunda columna.

VT ex. gr. assumpto primo residuo spatio, è regione primi spatij in dicta tabella sunt in 1. 2. & 3. col. potestatum hi tres numeri, 2. 3. 4. factum sub quibus est 24. Differentia inter 2. & 3. est 1. eius tripulum 3. factum sub hoc triplo, & sub 4. est 12. factum sub 2. & 3. est 6. qui cum 12. facit 18. quo dempto ex 24. remanent 6. Dico igitur o. c. B D, ad o. c. primi residui spatij, A G C B, esse ut 24. ad 6. Quod patet per Prop. 21.



Cor. 1.
11. huius

Sed ut vniuersaliter fiat demonstratio, assumatur ex. gr. quartum residuum spatium, A L C B. Quoniam ergò in Prop. ant. ostensum est, o. q. B D, ad factum sub o. l. A L C B, A L C D, esse ut factum sub numeris 5. & 9. 1. & 2. columnae è regione quarti spatij, scilicet 45. ad differentiam inter 5. & 9. nempe ad 4. o. q. ergo, B D, ad tripulum facti sub o. l. A L C B, A L C D, erunt ut 45. ad 12. Sed ut o. q. B D, ad tripulum facti sub o. l. A L C B, A L C D, ita est factum sub o. l. B D, & sub o. q. B D, hoc est ita sunt o. c. B D, ad tripulum facti sub o. l. B D, & sub ducto o. l. A L C B, in o. l. A L C D. Ergo o. c. B D, ad tria facta sub

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 311

sub o. l. BD, o. l. ALCB, & o. l. ALCD, erunt vt 45. ad 12. quod serua. Item o. c. BD, ad o. c. ALCD, quarti spatij, sunt vt 13. numerus tertiæ col. ad 1. Ergo o. c. BD, ad tria facta sub o. l. BD, ALCB, ALCD, plus o. c. ALCD, erunt vt factum sub 13. & 45. nempe 585. ad 201. Nam si proportionis 45. ad 12. commutemus terminos, ducendo utrosque per 13. fiet pro anteced. numerus 585. & pro consequente 156. similiter si alterius proportionis terminos 13. & 1. ducamus per 45. fiet pro anteced. 585. & pro consequente 45. Retento ergo communi anteced. 585. & iunctis consequentibus 156. & 45. fiet consequens 201. Quapropter o. c. BD, ad tria facta sub o. l. BD, ALCB, ALCD, plus o. c. ALCD, erunt vt 585. ad 201. o. c. verò, BD, æquantur o. c. ALCB, ALCD, & 3. factis sub o. l. BD, ALCB, ALCD, iuxta dicta ad partem posteriorem Prop. 14. Ergo per conuersionem rationis o. c. BD, ad o. c. ALCB, erunt vt 585. ad residuum 384. nempe ab eo dempto 201. Pro cabis.

Porro 585. fit ex ductu 13. in 45. & 45. fit ex ductu 5. in 9. Quare antecedens 585. fit ex tribus hisce numeris 5. 9. 13. primæ, secundæ, & tertiæ col. consequens verò est residuum numeri 201. qui constat ex numero 156. & 45. quorum ille fit ex triplo differentiæ numerorum 5. & 9. qui est 12. ducto in 13. hic verò fit sub 5. & 9. Patet ergo propositum ex hoc similiter in reliquis residuis spatijs quibuscunque.

Vide proportionem o. c. BD, ad o. c. residuorum spatiorum usque ad decimum in precedenti columella.

Residua spatia.

	Proportio.	
1	24	6
2	105	48
3	280	162
4	585	384
5	1056	750
6	1729	1296
7	2640	2058
8	3825	372
9	5320	4374
10	7161	6000

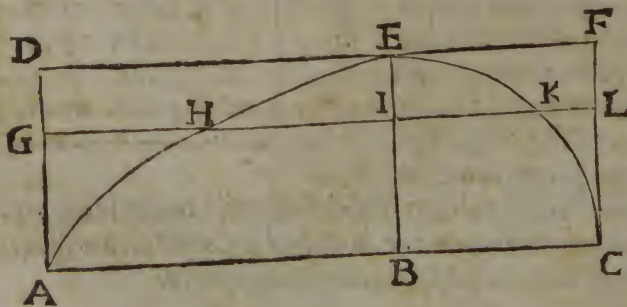
SCHQ.

SCHOLIUM I.

Methodo igitur consimili procedendo, expensis alijs sequentibus potest. poterit, qui voluerit o. p. quarumcunque ipsius, BD , ad o. p. eiusdem gradus residuorum quorumlibet spatiorum proportionem indagare. Quoniam enim mihi non vacat circa huiusmodi doctrinam amplius immorari, propterea hæc, & alia huiusmodi, quæ circa hoc facundissimum theorema de infinitis diagonalibus, vel, ut alii vocarunt, infinitarum parabolarum, inquire possunt, alijs, quibus plus est, quam mihi, otii, & sanitatis, ad alia properanti, indaganda relinquam.

SCHOLIUM II.

Non reticendum autem duxi hoc insigne circa potestates circuli, vel ellipsis, eas deduci posse ex pot. parabola, ita ut habita in superiori figura ratione o. p. BD , ad o. p. $AHEB$, semiparabolæ, regula, CD , incipiendo à prima, & per reliquas deinceps progrediendo in infinitum, habeatur quoque ratio o. p. quadrati circulo, vel parallelogrammi ellipsi circumscripti, ad o. p. eiusdem gradus circuli, vel ellipsis si non in omnibus, saltem in aliquibus pot. gradibus, quod ex subiecta figura clarius percipietur.



Sic

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 313

Sit enim semiparabola, AEB , diameter, AB , vertex, A , & producta, AB , in, C , ita ut, BC , sit equalis, BE , sit descriptus quadrans circuli, vel ellipsis, EC , quacunque existente, BC , & compleantur parallelogramma, DB , BF : ducta quoque sit quaecunque ipsi AC , equidistans, GL , secans, AE , in, H , & EC , in, K , & sit communis regula, AC .

Quoniam ergo ut, GI , ad, IH , ita est $q. LI$, ad $q. IK$, & GL , ubilibet ducta est, o. l. DB , ad o. l. ABE , erunt ut o. q. FB , ad o. q. EC . Similiter ut $q. GI$, ad $q. IH$, ita erit $qq. LI$, ad $qq. IK$. Ergo ut o. q. DB , ad o. q. ABE , ita erunt o. qq. FB , ad o. qq. EC , & subinde ut 15. ad 8. Pariter quia ut c. GI , ad c. IH , ita est cc. LI , ad cc. IK : nam c. GI , ad c. IH , habet triplicatam rationem eius, quam habet, GI , ad, IH , hoc est quam habet $q. LI$, ad $q. IK$, que est duplicata ipsius, LI , ad, IK , & ideo ratio c. GI , ad c. IH , erit sextuplicata rationis, LI , ad, IK . Erit ergo ut cc. LI , ad cc. IK . Est enim cc. sexta pot. & ideo in ratione sextuplicata ipsius, LI , ad, IK . Ut ergo o. c. DB , ad o. c. ABE , ita erunt o. cc. FB , ad o. cc. EC , nempe ut 35. ad 16.

Elicitur
ex. quar.
Quarti
Geom.
Ind.
Cor. 24.
huius.

Habemus ergo rationem o. l. FB , ad o. l. EC , proxime ut 14. ad 11. Similiter o. q. FB , ad o. q. EC , sunt ut 3. ad 2. per Cor. Propositionis 1. Lib. Tertij Geom. Ind. De ratione cuborum nil mihi constat. De qq. iam scimus o. qq. FB , ad o. qq. EC , esse ut 15. ad 8. De ceteris pot. usque ad cc. nil inquisivi. o. cc. FB , ad o. cc. EC , dictum est esse ut 35. ad 16. Ex reliquarum ergo pot. detecta ratione in parabola, possunt eadem rationes derivari in pot. circuli, vel ellipsis. Et ita considerato ordine harum pot. in circulo, poterit studiosus attendere num emergat nota vera ratio o. l. FB , ad o. l. EC , primæ potestatis; hoc est ratio parallelogrammi, FB ad quadrantem circuli, vel ellipsis, EC , seu vera circuli quadratura. Quod sedulo Lectori sufficiat hac occasione paucis indicasse.

Denique, tanquam coronidem, addimus mensuram fusi hyperbolici eiusdemq. segmentorum qua sunt planis secantibus axi hyperbolæ parallelis, supposita tamen eiusdem hyperbolæ quadratura, ut viderelicet in Prop. subsequentibus.

R r

PRO.

De usu Indivisibillum in Potestatib. Cossicis. 315

& quadrilinei, BCFH, sunt vt o. l. DH, ad o. l. BCFH, Cor. r.
hoc est vt, DH, ad quadrilineum, BCFH; cum ergo sup- 11. huius.
ponatur nota semihyperbola, CDF, & notum sit paralle-
logrammum, DH, erit quoq; nota ratio ipsius, DH, ad,
BCFH, & subinde nota ratio o. q. DH, ad factum sub o. l.
DH, &, BCFH. Fiat vt o. q. DH, ad factum sub o. l.
DH, &, BCFH, (quod est maius o. q. BCFH, quia æqua-
tur facto sub o. l. BCFH, CFD, & o. q. BCFH,) ita, MO,
ad, ON, quæ idcirco erit maior ipsa, OR. Erit ergo nota
quoq; ratio ipsius, MO, ad, ON. Sumatur, SN, æqualis
ipsi, NR. Quia ergo, o. q. DH, ad o. q. BCFH, sunt vt,
MO, ad, OR, & eadem ad factum sub o. l. DH, BCFH,
sunt vt, MO, ad, ON: ideò o. q. DH, ad differentiam o. q.
BCFH, & facti sub o. l. DH, &, BCFH, erunt vt, MO, ad,
NR, hoc est o. q. DH, ad factum sub o. l. DFC, BCFH,
erunt vt, MO, ad, NR, notam. Vnde o. q. DH, ad idem
factum bis, erunt vt, MO, ad, SR. Ergo colligendo, o. q.
DH, ad bis factum sub o. l. DFC, BCFH, plus o. q. BCFH,
erunt vt, MO, nota ad, OS, notam. Ergo per conuerfio-
nem rationis o. q. DH, (quæ sunt æqualia o. q. CDF, o. q.
BCFH, plus bis facto sub o. l. DFC, BCFH,) ad o. q. CDF, 13. huius.
erunt vt, OM, nota ad, MS, notam. Sed vt o. q. DH, ad
o. q. CDF, ita sunt quæcunq; solida ad inuicem similiaria 33. Exer-
cit. 1.
genita ex, DH, CDF, iuxta regulam, AD, inter quæ repe-
riuntur cylindrus genitus ex, DH, & semifusus hyperbo-
licus factus ex, CDF. Ergo dictus cylindrus ad dictum
semifusum, & subinde integer cylindrus (qui fieret ex du-
plo parallelogrammi, DH, hyperbolam integram com-
prehendente, essetq; illius duplus) ad fustum hyperboli-
cum genitum ex integra hyperbola (qui esset quoq; du-
plus semifusi) erit vt, OM, ad, MS, hoc est in ratione no-
ta. Sed ille cylindrus notus est, propter notas, BD, DF;
ergo & fustus. Quod, &c.

Cor. r.
ii. huius.

13. huius.

33. Exercit. I.

PRO.

COROLLARIUM.

Intelligitur pariter ex demonstratis nedum cylindrum su-
prædictum ad fufum, fed etiam quæcunq; folida simila-
ria, genita ex dicto parallelogrammo hyperbolam compre-
hendente, & ex hyperbola, fiue, AD , fit axis, fiue diameter,
currit enim eadem demonstratio, si & angulus, $BD F$, tunc
notus fupponatur, regula, AD , effe in ratione nota: & fubin-
de cum genitum ex parallelogrammo notum fit, etiam genita
ex hyperbola euadere nota.

PROPOSITIO XXXVI.

In eadem ant. figura, ijsdem fuppositis, fit in fuper inter,
 BD , HF , ducta quæcunq; IE , parallela ipfi, AD , fe-
cans curuam, CF , in, L ; & BC , in, T . Dico, fi præ-
ter fuperius nota, fupponantur quoq; notæ, DE , EF ,
notam euadere menfuram utriusq; segmentorum fufi
hyperbolici, geniti ex præfata hyperbola, qua fiunt pla-
no axi, CD , parallelo, ac per rectam, IE , tranfeunte.

Etenim fimili methodo fiet demonftratio. Namq;
ducta per, L , ipfa, XL , æquidiftante ipfi, DF , ma-
nifeftum eft o. q. XI , ad o. q. quadrilinei, $BC LI$, effe
vt q. XB , ad q. BC , plus $\frac{1}{2}$ q. IT , vel plus $\frac{1}{2}$ rectanguli,
 AXC , quod ferua. Et quia notæ funt, FE , ED , notæ
quoq; erunt, FD , DE , vel, XL , earumq; quadrata. Sed
vt q. DF , ad q. XL , ita eft rectangulum, ADC , ad rectan-
gulum, AXC , & notum eft rectangulum, ADC , ergo &
 AXC , & cum fit nota, AC , etiam, CX , nota erit, unde &
 BX , nota erit, & fubinde q. DB , & q. BX , nota erunt.
Ergo o. q. DI , ad o. q. XI , (quæ funt vt q. DB , ad q. BX ,)
ha-

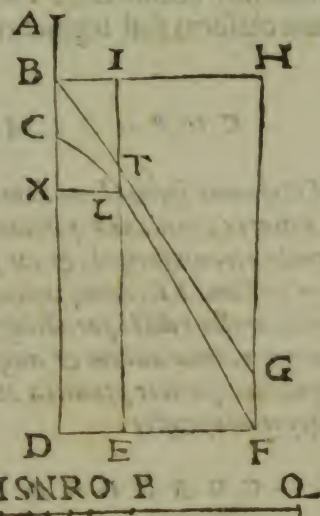
Eligitur
ex 21.
Quinti
Geo.
Ind.

39. Pri-
mi Geo.
Ind.

Cor. 1.
3. huius.

habebunt rationem notam; sed & o. q. XI, ad o. q. BCLI, habent rationem notam, quia sunt vt notum q. XB, ad notum q. BC, vna cum $\frac{1}{2}$ rectanguli, AXC, nota. Ergo o. q. DI, ad o. q. BCLI, habebunt rationem notam. Sit hæc quam habet quæcunq; magnitudo nota, MO, ad, OR. Insuper o. q. DI, ad factum sub o. l. DI, BCLI, sunt vt, DI, notum, propter notas, BD, DE, ad sparium, BCLI, notum, propter notam semihyperbolam, CXL, cuius est residuum, & ideò in ratione nota. Sic ergo fiat, MO, ad, ON, & ipsi, NR, sumatur æqualis, NS. Concludemus ergo vt in ant. Prop.

o. q. DI, ad o. q. BCLI, plus facto bis sub o. l. BCLI, CDEL, (quæ omnia nota sunt) esse vt, MO, ad, OS, quæ erit ratio nota. Et ideò per conuersionem rationis o. q. DI, ad o. q. CDEL, erunt vt, OM, ad, MS, hoc est in ratione nota. Cum verò o. q. DH, ad o. q. DI, sint vt, FD, ad, DE, hoc est in ratione nota: componendo, o. MSNRO P



4. huius.

q. DH, plus o. q. DI, hoc est o. q. parallelogrammi comprehendentis frustum hyperbolæ resectum per, IE, versus partem, D, erunt ad o. q. eiusdem frusti in ratione nota, nam ad o. q. semihyperbolæ deficientis sunt quoq; in ratione nota. Similiter o. q. DH, ad o. q. CDEL, habebunt rationem notam, sit autem hæc, quam habet, QM, ad, MS, & eadem o. q. DH, ad o. q. CDF, habent rationem notam, sit autem hæc, quam habet, QM, ad, MP. Ergo o. q. DH, ad o. q. LEF, erunt vt,

Per ant.

33. Exercit.
cit. 1.

ut, MQ , ad, SP , & in ratione nota. Et o. q. DH , ad o. q. EH , per conuersionem rationis sunt ut, MQ , ad, OQ , quia, QM , MO , MS , sunt deinceps ut o. q. DH , DI , $CDET$, idest in ratione nota. Ergo o. q. EH , ad o. q. LEF , erunt ut, OQ , ad, SP , hoc est in ratione nota. Ut vero o. q. ad o. q. ita sunt solida similia, &c. inter quæ sunt cylindrus genitus ex, EH , & segmentum fusi geniti ex frusto hyperbolæ, LEF . Ergo nota erit ratio cylindri geniti ex, EH , ad segmentum fusi genitum ex, LEF . Sed cylindrus ex, EH , genitus notus est. Ergo & tale segmentum fusi notum erit. Eadem ratione ostendemus reliquum eiusdem fusi segmentum notum esse. Quod, &c.

COROLLARIUM I.

33. Exercit.
cit. 1.

Pertipimus insimul eandem rationem esse inter solida similia, genita ex portionibus integri parallelogrammi hyperbolæ circumscripti, & ex frustis eiusdem hyperbolæ sectis per rectam, IE , eamque notam esse, & cum nota sint, quæ fiunt ex partibus dicti parallelogrammi, siue, CD , sit axis, siue diameter, tunc autem & angulus, CDF , notus esse debet, nota euadent pariter prædicta similia solida, genita ab eisdem hyperbolæ frustis.

COROLLARIUM II.

Cum ergo proposita in hac, & Prop. præcedenti, nota euadant, supposita hyperbolæ quadratura, hinc manifestum est è conuersò, si absolutè fusi hyperbolici aliquando reperiatur mensura, illicò notam fore hyperbolæ quadraturam.

SCHOLIUM.


Hæc circa usum Indiuisibilem in pot. cossicis apprimè nostræ Ind. Geometriæ congruere, rectèq; post illius traditam Epitomam in prima, & secunda Exercit. ac de hac
me.

De usu Indivisibilium in Potestatib. Cossicis. 319

*methodo dissertationem habitam in Exerc. tertia subiungi
diudicari: tum quia per hucusq; tradita in hac Exerc. quar-
ta in nobilissimo Matheos subiecto. quales sunt cossicæ pot.
amplius huiusmodi doctrina elucescit; tum etiam quia per
hæc aperti eiusdem rivuli in immensum campum diffunden-
tur. Cum enim rudiora tantum huius artis, & communiora
ob tenuitatem nostram attigerimus, speramus eos, qui ut di-
ximus, maiori otio, ac meliori, quam ipse, sanitate perfruan-
tur, illius penitiora in lucem esse prolaturus. Quibus idè
hanc provinciam relinquentes, hic iacta anchora, huiusmodi
speculationi finem imponimus.*

In qu

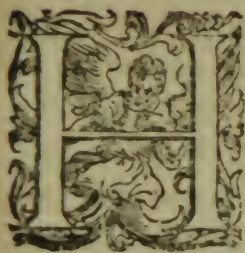
rent, /
difforn
lucem p
turam
ne mag
Exerc
salice
nemp
tione
grau



EXERCITATIO

Q V I N T A.

In qua de vniformiter difformiter grauibz
per Indiuisibilia instituitur
contemplatio.



*H*actenus Geometria non nisi grauitatem
vniformem in eodem graui supposuit,
ac examinauit: quamuis autem in cor-
poribus diuersis Varios quoq; eiusdem
gradus admiserit, attamen quæ circa
eandem grauitatem symptomata eueni-
rent, si in eodem graui non vniformiter, sed vniformiter
difformiter illa diffunderetur, nemo, quod sciam, hucusq; in
lucem protulit. Rem igitur gratam studiosis sperans me fa-
cturum esse, ad nouam hanc doctrinam excolendam non si-
ne magna curiositate animum applicui, duoq; præcipuè in hac
Exercitatione circa vniformiter difformiter graua (prout
scilicet à me in sequentibus definiuntur) meditatsum sum;
nempè quodnam sit eorum centrum grauitatis, & quam ra-
tionem habeat grauitas vniformis ad difformem in singulis
grauibus. Vtrumq; mihi suppeditarunt Indiuisibilia, &

Def. 8. &
9. subse-
quentes.

Ss

hoc

hoc saltem in insignioribus figuris. De creueram quaecunq;
 hic per ea ostenduntur, ut Indivisibilem parum amico am-
 plius satisfaceret, etiam stylo Archimedeo demonstrare, ve-
 luti in Prop. 8. & 10. subsequentibus studiosus animad-
 uertet: sed quia nimis longa hac Exere. euasisset, ac ne tibi
 praeiperem, benigne Lector, occasionem periculum faciendo
 utrum ea, nec ne vera prodiderint, consultò ab hoc abstinui.
 Inanem fortè aliquis putabit huiusmodi doctrinā ex eo quod
 his suppositionibus natura in suis operationibus nequaquam
 fortè consentiat. Huic tamen puto responderi posse non om-
 nia, quæ à Geometris considerantur, necesse esse ut ad amuf-
 sim in rerum natura reperiantur, quæ plerumq; materia
 sordibus, ac imperfectionibus inuolutæ, tanquam inconstan-
 tes agrè sub scientiam cadere possunt. Quapropter cogun-
 tur Mathematici abstrahere ab ipsa materia sensibili, ac in
 purissimis & simplicissimis figuris, eodem semper modo se ha-
 bentibus, suas contemplationes instituire. Sic & Archi-
 medes doctrinam de Spiralibus tradidit, etiam si fortè nul-
 la huiusmodi linea in mundo reperiatur. Sic & Galileus,
 ac nouissimè Torricellius, motus localis passiones iuxta ab ijs-
 dem suppositiones factas examinarunt, quomodoq; na-
 tura in ipso motu locali operetur. Quæ omnia etiam si ad hu-
 manos vsus minimè deseruirent, ea tamen ut contemplatri-
 cis nostræ virtutis alimenta neuiquam essent negligenda.
 Frustra enim alioquin tam anxie quærerent Geometra exa-
 ctissimam circuli quadraturam, duarum mediarum inter
 duas datas linearum quantitatem, anguli rectilinei trisectio-
 nem, & similia; cum in eo, quod spectat ad physicam uti-
 litatem satis superq; fuerit hæc propinquè adinuenisse. Undè
 egregiè

egregiè Proclus in Com. in Euclidem Lib. 1. Cap. 9. de huiusmodi Utilitate ab ipsa Mathesi in intellectum redundante sic locutus est. Eius autem rursus utilitatem non ad humanos vsus respicientes, neque necessitati studentes iudicare æquum ducemus: sic enim ipsam quoque contemplantem virtutem inutilem esse fatebimur, quæ seipsam ab humanis separat, hæcque minimè respicere, nec cognoscere appetit. Quod sanè Socrates etiam in Theæteto de proceribus fatidicis existentibus affirmans, ab omni quidem ad humanam vitam respectu eos auertit; ab omni verò necessitate, ac usu benè solutam ipsorum cogitationem ad omnium eorum, quæ sunt attollit cacumen. Etiam si igitur nihil tale, quale hic supponimus, reperiri posset in rerum natura, id tamen ut ad mentis directum utilitatem, & oblectamentum studioso excipiendum esset. Perinde enim ac Retiores in suis declamationibus, aut docendi alios, aut exercendi se gratia fictā causam agunt, ut postea in veris causis promptius orare possint: sic & ipse etiam si quodammodo fictam materiam proposuissem, hoc tamen & ad ingenij exercitium, & ad usum Indivisibilem amplius capescendum, plurimum valere nullus puto dubitabit. Quod si ex alia parte ipsius naturæ operationes attentius inspiciamus, an non ubique huiusce vñiformis difformitatis illico vestigia apparebunt? Cum experiamur actiones naturales quò magis Virtus à suo fonte elongatur, eò magis, ac magis elanguescere, donec omninò evanescat, quacunque ratione respectu distantiarum ab eodem fonte id contingat: ita ut si natura his nostris suppositionibus ad vñguem non consuetat, nec

tamen omninò dissentire videatur. Præterea hac occasione hic quoque diuersa ab alijs ratione, inueniri centra grauitatis insigniorum tam planarum, quàm solidarum figurarum vniiformiter grauium, nonnullaque in fine attingi circa materiam momentorum grauium, quæ à fulcimento sustinentur (cum affine quid redoleant dicta momenta grauitati deformi) Ut hæc Exerc. saltem quoad hanc partem non omnino in physicis spernenda vtilitatis censi possit. Denique qualiscunque sit hæc doctrina, eam tuo iudicio studiose Lector subijcere volui, cui si haud displicuisse cognouero ad eam accuratius elaborandam, si Deus vitam, mitioremq; ægritudinem concesserit, omnes neruos contendam, ut hæc tibi melius concinnata, ac graphicè descripta, amplius satisfacere possint. Sed omissis parergis nunc ad ipsam rem propius accedamus.



DE-

DEFINITIONES.

I.

Grauitas est vis eam habentis absolute descensiva.

II.

Graue dico, quod grauitatem habet, vel habere concipitur.

Sub nomine grauis hic comprehenduntur nedum corpora, quibus tantum, physice loquendo, grauitas competit; sed etiam superficies, linea, ac puncta. His enim perinde ac si à corporibus seuncta essent, grauitatem assignat intellectus, ut subinde ab alijs ad ipsa corpora commodius transeat. Non ita tamen ut eorum grauitates promiscue sint comparabiles, sed illorum tantum, quæ erunt eiusdem generis ut linearum inter se, superficierum inter se, &c.

III.

Momentum grauis est illius conatus ad descendendum, ex quacunque distantia suspensi.

Cum hic conatus sit in diuersis distantijs diuersus, ut in sequentibus patebit, hinc intelligitur idem graue diuersa quoque momenta habere posse.

IV.

Si graua æqualia (ut & eorum quæcunq; partes æquales) ex æqualibus distantijs suspensa æquèponderent: illa inter se comparata, (ut eorum vnumquodq; in seipso) dicentur eiusdem gradus grauitatis, vel vniformiter graua.

V.

Si graua æqualia, quorum vnumquodq; sit vniformiter graue, ex æqualibus distantijs suspensa non æquèponderent. vel si graua inæqualia, quorum vnumquodq; sit vniformiter graue, ex æqualibus distantijs suspensa æquèpon-

ponderent, dicentur inter se comparata diuersi gradus grauitatis.

*Alij vocant hos gradus diuersas species grauitatis; quomodo-
cunq; tamen eos velimus appellare, nil refert, dummodo in ipsa
re conueniamus, vt puto nos in hac, & superioribus definitio-
bus cum alijs huius doctrina Auctioribus concordare. Cum ve-
rò, quicunq; assignetur gradus grauitatis, eo maiorem, & mi-
norem quantumcunq; concipere possimus, non secus ac in omni
quantitate continua licet quacunq; data maiorem, vel minorem
ad libitum assignare; idè patet à dato gradu tam ascendendo,
quam descendendo, per infinitos gradus deinceps semper maio-
res, vel deinceps semper minores, processum fieri posse. Vnde
manifestum est dari posse quoq; progressum à nullo gradu semper
ascendendo per infinitos gradus grauitatis.*

VI.

Igitur limitem quotcunq; & quorumcunq; graduum gra-
uitatis appello nullum gradum, seu illud quod supponi-
tur nullum habere grauitatis gradum.

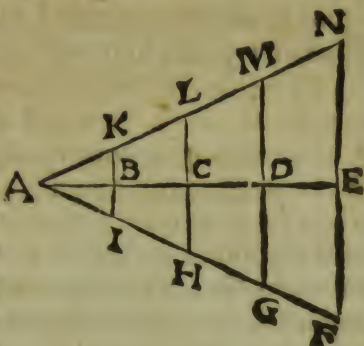
*Hic limes in sequentibus erit punctum, vel linea, vel super-
ficies.*

VII.

Cum à limite graduum grauitatis ad datum quemcunq;
gradum continuò ascendendo iuxta diuersas propor-
tiones incrementum graduum fieri possit, nunc tantum illud
supponemus, quo gradus grauitatis iuxta proportionem
distantiarum à limite (siue is sit punctum, siue linea, vel
superficies) augentur. Hoc autem incrementum vniforme
grauitatis dicitur.

*Ex hoc verò patet hoc incrementum vniforme grauitatis fie-
ri iuxta incrementum parallelarum basi cuiuscunq; triangu-
li constituto limite eiusdem vertice, & ab eo versus basim per
aequales distantias progrediendo. Vt in triangulo, AFN , ducta
ab, A , vertice, qui sit limes (subintellige semper limitem gra-
duum grauitatis, etsi hoc non exprimatur) super basim, FN ,
perpendiculari, AE , secetur alterum laterum, vt, AF , in
quotcunq; partes aequales, AI , IH , HG , GF ; & per puncta,
 G , H ,*

G, H, I, agantur eidem basi, FN, parallelae, GM, HL, IK, secantes, AE, AN, in punctis, D, C, B; M, L, K. Si ergo intellexerimus ab, A, limite continuo procedere gradus grauitatis usq; ad maximum in, E, per incrementum uniforme, idem processus erit linearum dicti trianguli ipsi, FN, parallelarū.



Et enim si ex gratia in continuo

graduum grauitatis incremento habeatur in distantia, AB, quidam gradus grauitatis, in, C, habebimus alium gradum duplum primi ex hypothesi, quia distantia, CA, dupla est, BA; in, D, triplum, & in, E, quadruplum, unde dicti gradus procedent ut linea praedicta, IK, HL, GM, FN. Immo si ipsa, IK, assumatur pro ipsomet gradu grauitatis, qui est in distantia, AB, reliqua, HL, GM, FN, referent reliquos gradus distantiarum, AC, AD, AE. Et vniuersaliter quaecunq; in triangulo, AFE, ipsi, FN, parallela connotabit gradum grauitatis qui erit in eiusdem parallela ab, A, distantia. Igitur dicti gradus nedum progrediuntur ut dicta parallela, sed eadem parallela pro ipsismet gradibus assumi possunt.

Insuper cum in basi aequali ipsi, FN, possint fieri triangula maioris, & minoris altitudinis, quam, AE; si eorum bases assumantur tanquam idem gradus grauitatis, quorum vertices sint limites patebit à limite usq; ad quemcunq; assignatum gradum grauitatis per omnes gradus intermedios sumptis eorum altitudinibus tanquam distantijs, & subinde per quācunq; distantiam eadem, AE, minorem, vel maiorem, processum fieri posse.

VIII.

SI, exposita quacunq; recta linea tanquam limite, ac regula, in eodem cum ipsa plano, & tota ad eandem directae lineae partem sit quaecunq; plana figura, in qua ductarum quocunq; linearum ipsi regulae parallelarum, & in seipsis vniiformiter grauium, gradus grauitatis sint in ratione distā-

E. Def. 2
Geo. Ind.

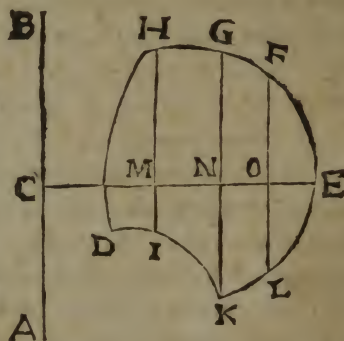
ua-

tiarum ab assignato limite. Dicta figura vocetur uniformiter difformiter grauis iuxta datum limitem.

IX.

SI exposito quocunq; plano tanquam limite, ac regula eidem æquidistantium planorum, tota ad eandem illius partem sit quæcunq; figura solida; in qua ductorum quocunq; planorum ipsi regulæ æquidistantium, & in seipsis uniformiter grauium, gradus grauitatis sint in ratione distantiarum ab assignato limite. Dicta solida figura vocetur uniformiter difformiter grauis iuxta datum limitem.

Vt si sit, AB, recta linea limes, & regula pro figura plana, D L E F, in eodem cum ipsa plano, & tota ad alteram eiusdem, AB, partem existente; ducantur autem in ea quocunque ipsi, AB, parallele, nempe, I H, K G, L F, singule in seipsis uniformiter graues; & sint earum gradus grauitatis in ratione distantiarum à limite, AB, nempe ipsarum, CM, CN, CO; illa dicetur uniformiter difformiter grauis iuxta limitem rectam, AB.



Ita quoq; si, AB, sit planum, limesq; ac regula pro figura solida, D L E F, in qua gradus grauitatis quocunq; planorum ipsi, AB, æquidistantium, nempe, I H, K G, L F, singulorumq; in seipsis uniformiter grauium, sint in ratione distantiarum, CM, CN, CO: illa dicetur uniformiter difformiter grauis iuxta limitem planum, AB.

Alio modo possent figure tam plane, quam solide uniformiter difformiter graues describi; scilicet eas esse, quæ gigni intelliguntur per fluxum rectæ lineæ, vel plani eidem, AB, limiti semper æquidistantis, cuius gradus grauitatis continuò ab, AB, descendendo augeatur iuxta incrementum distantiarum ab eodem limite, AB.

Breuitatis tamen causa figuras uniformiter difformiter graues tantum difformiter graues appellabimus, tacite uniformiter subin-

subintelligentes. Similiter cum limes erit recta linea, vel planum, ipsum semper quoq; supponemus linearum, vel planorum æquidistantium, quorum considerabuntur grauitates, esse regulam, licet non addetur nomen regula.

X.

Centrum grauitatis tam in vniformiter, quam in difformiter grauibus, est, ex quo, vel sola cogitatione, suspensum graue, quemcunque situm dederis illum retinet.

Hæc est Steuinij definitio pro vniformiter grauibus, quam & nos pro difformiter grauibus pariter retinemus.

XI.

Centrum æquillibrij dati grauis, vel duorum datorum grauium, est punctum, à quo suspenditur datum graue, seu aggregatum ex datis grauibus, per eorum centrum grauitatis.

XII.

Graua plana, vel solida proportionaliter analogia in grauitate dicuntur, quæ in eadem erunt altitudine, & in quibus ductis quocunque planis dictam altitudinem perpendiculariter secantibus, genitarum in alterutro grauium magnitudinum (siuè hæ sint lineæ rectæ, vel plana) grauitates erunt inter se, vt grauitates genitarum in reliquo graui, in directum prædictis respondentium. Et cum illorum homologæ erunt æquales, æqualiter analogia in grauitate, si libuerit, etiam vocabuntur.

Communis est hæc definitio tam vniformiter, quam difformiter grauibus. Similiter nedum conuenit grauibus eiusdem rationis, sed etiam diuersæ: vt cum inuicem comparabuntur graua, quorum vnum erit figura plana, alterum verò solida.

P O S T V L A T A.

I.

IN quocunque siuè vniformiter, siuè difformiter graui, vnicum esse centrum grauitatis.

II.

MOlium æqualium, & in seipsis, ac inter se vniformiter grauium, esse æquales grauitates.

III.

MOlium quarumcunque æquè grauium, & ab eadem, vel æqualibus distantijs suspensarum, æqualia esse momenta.

IV.

SI gradui grauitatis cuiuscunque molis in seipsa vniformiter grauis superaddi æqualis prædicto gradus grauitatis intelligatur, eiusdem molis grauitas duplicabitur. Et ita tres gradus dabunt triplam grauitatem, quatuor quadruplam, &c. tum in eadem, tum etiam in æqualibus figuris, quarum vnaquæque sit in seipsa vniformiter grauis.

V.

Per Indivisibilia.

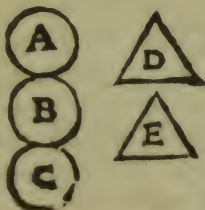
IDem esse centrum grauitatis cuiuscunque figuræ planæ, & omnium linearum eiusdem; ac cuiuscunque figuræ solidæ, & omnium planorum eiusdem, regula quauis assumpta, siuè figuræ vniformiter, siuè difformiter graues supponantur.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si duo quæcunque graua fuerint in seipsis, & inter se comparata, vniformiter graua: erit vt moles ad molem, ita grauitas ad grauitatem.

Sint duo quæcunque graua, A, D, in seipsis, & inter se comparata vniformiter graua. Dico molem, A, ad molem, D, esse vt grauitatem, A, ad grauitatem, D. Accipiantur ipsi, A, quotcunque moles æquales, B, C, in seipsis, & cum A, vniformiter graues. Similiter sumantur ipsi, D, quotcunque moles æquales, in seipsis, & cum, A, vniformiter graues, vt, E. Quoniam ergo moles, A, B, C, sunt inter se æquales, necnon in seipsis, & inter se vniformiter graues, earum grauitates erunt æquales. Eodem modo ostendemus grauitates ipsarum, D, E, esse æquales. Quotuplex ergo est aggregatum molium, ABC, molis, A, totuplex erit aggregatum grauitatum, ABC, grauitatis, A. Et ita quotuplex est aggregatum molium, DE, molis, D, totuplex erit aggregatum grauitatum, DE, grauitatis, D. Habemus igitur æquè multiplices primæ, & tertiæ, nempè molis, & grauitatis, A, vt & secundæ, & quartæ, nempè molis, & grauitatis, D, si autem aggregatum molium, ABC, fuerit æquale aggregato molium, DE, scilicet multiplex primæ multiplici secundæ; etiam aggregatum grauitatum, ABC, erit æquale aggregato grauitatum, DE, nempè multiplex tertiæ multiplici quartæ, & si illud erit maius, & hoc maius, vel si minus, & hoc minus. Ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam. Hoc est moles, A, ad molem, D, erit vt grauitas, A, ad grauitatem, D. Quod ostendendum erat.



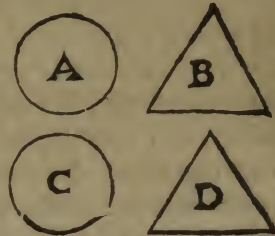
Post. 1.

Post. 2.
Def. 1.
5. Quinti
Elem.

PROPOSITIO II.

Si duo quaecunque graua fuerint mole aequalia, & eorum unumquodq; in seipso uniformiter graue, at inter se comparata non uniformiter graua: erit gradus grauitatis ad gradum grauitatis, ut grauitas ad grauitatem.

Sint, A, B, moles aequales, & earum vnaquæque in seipsa uniformiter grauis, at inter se comparatæ non uniformiter graues. Dico gradum grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B, esse ut grauitatem, A, ad grauitatem, B. Assumatur moles, C,



Post. 4.

Post. 2.
Defin. 5.
Quinti
Elem.

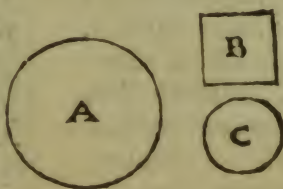
æqualis ipsi, A, sed cuius gradus grauitatis sit utcumq; multiplex gradus grauitatis, A, ut ex. gr. triplus. Similiter accipiat moles, D, æqualis ipsi, B, sed cuius gradus grauitatis sit utcumq; multiplex gradus grauitatis, B, ut ex. gr. duplus. Quoniam ergo ipsius, C, gradus grauitatis triplus est gradus, A, etiam grauitas, C, tripla erit grauitatis, A. Sic quia gradus, D, duplus est gradus, B, etiam grauitas, D, dupla erit grauitatis, B. Habemus igitur æquè multiplices primæ, & tertiæ, nempe gradum grauitatis, C, & grauitatem, C, gradus, A, & grauitatis, A. Similiter gradus, D, & grauitas, D, sunt æquè multiplices secundæ, & quartæ, nempe gradus, B, & grauitatis, B. Si autem multiplex primæ, nempe gradus, C, sit æqualis multiplici secundæ, hoc est gradu, D, etiam multiplex tertiæ, hoc est grauitas, C, erit æqualis multiplici quartæ, scilicet grauitati, B, quia moles, C, D, sunt æquales, cum adæquentur æqualibus, A, B. Et si ille fuerit maior, & hæc maior erit, vel si minor, & hæc minor. Ergo prima ad secundam erit ut tertia ad quartam. Hoc est gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B, erit ut grauitas, A, ad grauitatem, B. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO III.

Si duo quaecunque graua fuerint in seipsis vniformiter graua, at inter se diuersi gradus grauitatis: erunt eorundem grauitates iter se in ratione composita ex ratione molium, & ex ratione graduum grauitatis.

Sint duo quaecunque graua, A, B, in seipsis vniformiter graua, sed inter se diuersi gradus grauitatis. Dico grauitatem, A, ad grauitatem, B, habere rationem compositam ex ratione molis, A, ad molem, B, & ex ratione gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B. De foris enim sumatur moles, C, æqualis ipsi, B, in se vnif. grauis, sed eiusdem gradus grauitatis cum, A. Grauitas ergo, A, ad grauitatem, B, habebit rationem compositam ex ratione grauitatis, A, ad grauitatem, C, & grauitatis, C, ad grauitatem, B, sed grauitas, A, ad grauitatem, C, est vt moles, A, ad molem, C, seu ad molem, B, ex hypothefi ipsi, C, æqualem. Item grauitas, C, ad grauitatem, B, est vt gradus grauitatis, C, seu, A, ex suppositione, ad gradum grauitatis, B. Ergo grauitas, A, ad grauitatem, B, habet rationem compositam ex ratione grauitatis, A, ad grauitatem, B, & ex ratione gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B. Quod, &c.



Def. 12.
Primi
Geo. Ind.

1. huius.

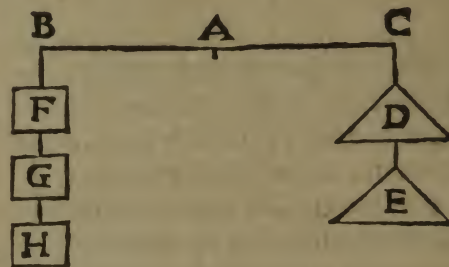
Prop. 2^a.

PRO.

PROPOSITIO IV.

Si duo quaecunq; siue unifor. siue diffor. grauia, ab eadem, vel æqualibus distantijs suspendantur: eorum momenta erunt in ratione grauitatum eorundem grauium.

Sint duo quaecunq; grauia, D, F, ab eadem, vel æqualibus distantijs, AC, AB, in libra, BC, suspensa. Dico eorum momenta esse, vt ipsorum met grauitates. Sumatur ipsi, F, quot-



Post. 3.

cunque moles singulæ æquægraues, G, H; & ipsi, D, aliæ quotcunque singulæ æquægraues, vt, E. Quoniam ergo, F, G, sunt moles æquægraues, & ab eadem distantia, AC, suspensæ, idè erunt æqualium momentorum. Eadem ratione ostendemus momentum ipsius, H, æquari momento ipsius, F. Quotuplex ergo est grauitas ipsorum grauium, FGH, grauitatis, F, totuplex est aggregatum ex momentis, HGF, seu momentum, HGF, momenti, F. Eodem modo ostendemus quotuplex est grauitas ipsorum, ED, grauitatis, D, totuplex esse momentum ipsorum, ED, momenti, D. Si autem grauitas, FGH, multiplex primæ, æqualis est grauitati, ED, multiplici secundæ, etiam momentum, FGH, multiplex tertiæ æquabitur momento, ED, multiplici quartæ, & si illa erit maior, & hoc maius erit, & si minor, minus. Ergo prima ad secundam erit vt tertia ad quartam. Hoc est grauitas, F, ad grauitatem, D, erit vt momentum, F, ad momentum, D. Quod, &c.

Post. 3.

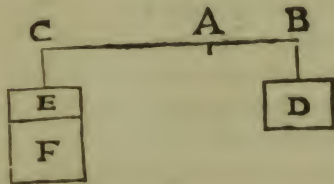
Def. 5.
Quinti
Elem.

PRO-

PROPOSITIO V.

Si quaecunq; æquè gravia ab inæqualibus distantijs suspendantur: erunt eorum momenta in ratione distantiarum.

Sint æquè gravia, EF, D, quæcunque, ab inæqualibus distantijs, AC, AB, suspensa. Dico eorum momenta esse in ratione distantiarum, AC, AB. Intelligatur ab, EF, maioris distantie ablata moles, E, ad cuius gravitatem sit



gravitas, A, reciprocè, ut distantia, CA, ad AB. Moles ergo, E, æquèponderabit ipsi, D, per ostensa ab Archimede in Prop. 6. Libri Primi Aequèpond. quæ ut ibidem ait & Guid. Vbaldus ad omnes quoque moles transferuntur. Igitur momentum ipsius, E, erit æquale momento ipsius, D. Est autem momentum, EF, ad momentum, E, hoc est ad momentum, D, ut gravitas, EF, scilicet, D, ad gravitatem, E: & gravitas, D, ad gravitatem, E, est ut, CA, ad AB, ex hypothesi. Ergo momentum, EF, ad momentum, D, est ut, CA, ad AB. Quapropter æquègraviū momenta sunt in ratione distantiarum, à quibus suspenduntur. Quod, &c.

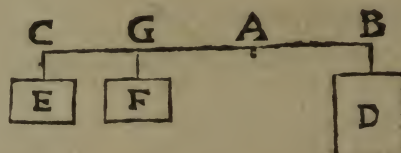
Prop. ant.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Quorumcunque grauium à quibuslibet distantijs suspensorum, momenta sunt in ratione composita ex ratione distantiarum, & grauitatum.

Sint à distantijs quibuslibet, A C, AB, suspensa quæcunq; grauia, E, D. Dico eorum momenta esse in



Def. 12.
Primi
Geo. Ind.
Prop. ant.

4. huius.

ratione composita ex ratione distantiarum, & grauitatum. De foris enim sumpta mole, F, ipsi, E, æquè graui, illa suspendatur in distantia, AG, ipsi, AB, æquali. Momentum ergo, E, ad momentum, D, habet rationem compositam ex ratione momenti, E, ad momentum, F, scilicet, CA, ad AG, vel AB, quia, E, F, sunt moles æquè graues; & ex ratione momenti, F, ad momentum, D, scilicet ex ratione grauitatis, F, seu, E, ad grauitatem, D, nam, GA, AB, sunt æquales distantiae. Ergo momentum, E ad momentum, D, est in ratione composita ex ratione, CA, ad, AB, & ex ratione grauitatis, E, ad grauitatem, D. Quod, &c.

SCHOLIUM.

Si ergo ostensa ab Archimede loco supracitato ad omnis generis grauia transferantur, patebit has tres proximas Propositiones superiores de ijs quoque verificari. Reminiscatur autem studiosus hoc, quod in presenti Prop. demonstratur suppositum fuisse in Exerc. Tertia, Cap. 4. Pag. 231. Illi ergo per hęc defectui nunc suppleri potest.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si recta quedam linea indefinita transeat per centra grauitatis quotcunque molium eiusdem generis : centrum grauitatis aggregati ex omnibus illis erit in eadem recta linea, & in ea ipsius portione, qua iungit centra grauitatis molium extremarum.

HAec Propositio manifesta est; si enim ex propositis molibus duas quascunque acceperimus, earum centrum grauitatis erit in recta iungente ipsarum centra grauitatis. Rursus assumpta alia quacunque mole, in intercepta inter huius centrum grauitatis, & centrum praedictarum duarum, erit harum trium centrum grauitatis. Idem verò ostendetur de quatuor, quinque, &c. Ergo omnium centrum grauitatis erit in iungente centra grauitatis extremarum, in hac enim erit centrum quotcunque assumptarum molium. Quod, &c.

Haecenus sine Indiuisibilibus nunc vero per illa procedemus.



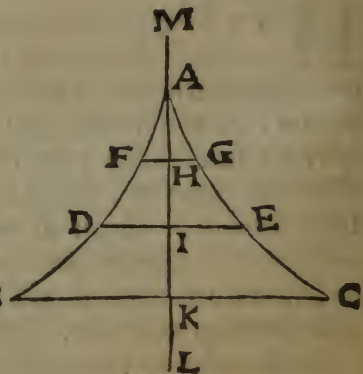
Vu

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea indefinita transeat per centrum gravitatis cuiusque omnium linearum figura plana, vel cuiusque omnium planorum solida, regula quavis assumpta: in eius portione in figura comprehensa, erit ipsius figura centrum gravitatis. Dicatur autem talis recta axis gravitatis eiusdem figura.

IN figura quacunque plana, ABC, transeat recta indefinita, ML, per centra gravitatis cuiuscunque omnium linearum eiusdem, regula, BC, ut per, H, I, K, centra gravitatis rectarum, FG, DE, BC, ipsi, BC, parallelarum, & sic in ceteris. Dico in, ABK, quæ concipitur in figura, esse centrū gravitatis eiusdem figuræ, ABC. Quoniam enim



Post. 5.

in, AK, sunt quarumlibet linearum ipsi, BC, parallelarum singillatim centra gravitatis, idè in eadem, AK, erit omnium centrum gravitatis, collectivè sumptarum, hoc enim patet per methodum antecedentis. At idem est centrum omnium linearum, & figuræ planæ ABC. Ergo in, AK, erit figuræ, ABC, pariter centrum gravitatis.

Post. 5.

Quod si supposuerimus, ABC, esse solidum, in quo, regula basi, BC, sint quotcunque plana ipsi, BC, parallela, DE, FG, & per eorum centra gravitatis, H, I, K, transire, AK; ostendemus eodem modo in, AK, esse centrum gravitatis omnium planorum solidi, ABC, regula, BC, & subinde etiam ipsius solidi. Quod, &c.

SCHO-

S C H O L I V M.

Hoc patet verificari siue figura tam plana, quam solida, supponantur uniformiter, siue difformiter graues, quia Postulatum 5 comprehendit utrumque genus grauium.

Si quis verò abhorreat ab Indivisibilibus, recolat ostensa circa uniformiter grauia à Luca Valerio Lib. Primo de cetro graui. solidorum, Prop. 22. ibi enim probat; Omnis figuræ circa diametrum in alteram partem deficientis in diametro (qua transit per centrum grauitatis cuiuscunq; linea ad ipsam ordinatim applicata, quia illam bifariam secat) esse centrum grauitatis. Idemq; colligit in Corollario eiusdem Prop. pro omni solido circa axim (qui transit per centrum grauitatis cuiuscunq; plani, tangenti solidum in vertice æquidistantis) hoc est in axe esse centrum grauitatis dicti solidi. Vniuersaliter autem constat ex ibidem ostensis; omnis figuræ planæ, siue solidæ, cuius termini omnis cauitas sit interior, atque idcò intra terminum centrum grauitatis, & cuius pars aliqua esse possit, quæ à tota figura deficiens minori defectu quacunque magnitudine præposita, habeat centrum grauitatis in aliqua certa linea recta intra terminum figuræ constituta, esse in ea recta linea totius figuræ centrum grauitatis. Per hac ergo habebis studiosus modum, quo sibi amplius satisfaciat in ijs omnibus figuris, quas huiusmodi conditionem habere comperierit. At vniuersalissimè pro omnibus figuris id demonstrare, aliter quam per Indivisibilia difficilimum puto.



ad distantiam, rectæ, LM, ab eodem, I, & ex ratione grauitatis, KN, ad grauitatem, LM, hoc est ex hypothefi ex ratione grauitatis, RV, ad grauitatem, PS. Sed ex iisdem componitur ratio momenti, RV, ad momentum, PS. Ergo momentum, KN, ad momentum, LM, erit vt momentum, RV, ad momentum, PS. Idem quoque eodem modo de momentis quarumcunque ipsi, AG, parallelarum sibi respondentium ostendetur, quod nempe sint proportionalia. Habemus ergo duos magnitudinum ordines, nempe momenta omnium linearum figuræ, ABC, & momēta omnium linearum figuræ, DEF, ita sibi, se habentia, vt unicuique momento linæ sumptæ in, ABC, respondeat momentum linæ in directum cum illa existentis, scilicet habemus tot momenta in vno ordine, quot in alio. Cum vero, ABC, per, IT, secetur in figuras, AIO, IBCO, & DEF, in figuras, DQT, QEFT: totque sint omnia momenta figuræ, IBCO, quot omnia momenta figuræ QEFT: similiter cum sint tot omnia momenta figuræ, AIO quot omnia momenta figuræ, DQT. Ideo omnia momenta, IBCO, ad omnia momenta, AIO, erunt vt omnia momenta, QEFT, ad omnia momenta, DQT, per demonstrata in Exercitatio. Quarta, & eius Scholio Prop. 10. Sed omnia momenta, IBCO, æquantur omnibus momentis, AIO, cum enim, I, sit centrum æquilibrij figuræ, ABC, erit in recta, IOT, tam centrum grauitatis eiusdem, ABC, quam omnium linearū, ABC, quarum, I, erit quoque centrum æquilibrij. Igitur & omnia momenta, QEFT, æquabuntur omnibus momentis, DQT. Igitur, I, erit centrum æquilibrij omnium linearum figuræ, DEF. Vnde in IT, erit earum centrum grauitatis, & subinde centrum grauitatis quoq; figuræ, D EE. Igitur centra grauitatis figurarum, ABC, DEF, æqualiter aberunt à verticibus earundem, A, D.

Vt vero intelligatur hoc verum esse de quibuscunque magnitudinibus proportionaliter analogis in grauitate, supponemus posterius, AG, BH, esse plana parallela, horizontique perpendicularia, & in iisdem, nempe in eadem altitudine constituta quęcunque grauia proportionaliter analogia in grauitate, vt ex. gr. ABC, figuram solidam, & D EF,

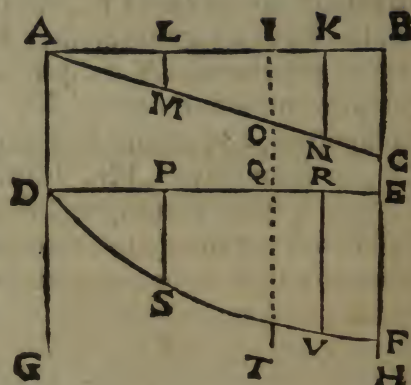
Def. 12.

6. huius.

Def. 11.
Post. 5.

Def. 11.
Post. 5.

EF, planam. Traiectis autem quocunque planis ipsis, AG, BH, parallelis, supponemus quoque ab ipsis fieri in solido, ABC, plana, LM, KN, & in figura plana, DEF, rectas, PS, RV, ita ut planum, LM, & recta, PS, fiat ab eodem plano, & ab eodem planum, KN, & recta, RV. Sint insuper ab, I, quod sit



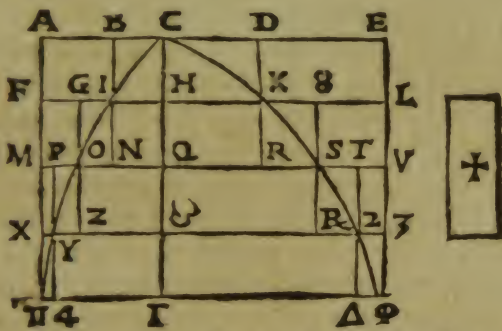
centrum æquilibrij grauis, ABC, suspensa vtraque graui, descendente pariter ab, I, recta, IT, horizonti perpendiculari, quæ sit in plano figuræ, DEF. Vel si non sit in eius plano, intelligemus tamen illam suspensam in plano per, I, T, transeunte, ac ipsis planis, AG, BH, æquidistante. Dico autem figuram, DEF, ita suspensam, mansuram esse, existentibus, PS, RV, vel easdem efficientibus parallelis planis, ipsi horizonti perpendicularibus. Ostendemus enim ut supra momenta planorum, KN, LM, esse ut momenta rectarum, RV, PS, sunt enim, KN, RV, æqualiter distantia à plano, IT, & subinde à puncto, vel punctis suspensionis; & sic de cæteris. Vnde concludemus omnia momenta, IBCO, ad omnia momenta, AIO, esse ut omnia momenta, QEFT, ad omnia momenta, DQT: ostendemusque omnia momenta, IBCO, AIO, adæquari, cum, I, sit centrum æquilibrij grauis, ABC. Quare patebit omnia momenta figurarum, QEFT, DQT, esse æqualia, & subinde vel, I, esse centrum æquilibrij, DEF, vel hoc, simul cum centro gravitatis eiusdem, DEF, esse in plano per, IT, transeunte, ipsis, AG, BH, parallelo. Quapropter centra gravitatis grauium, ABC, DEF, æqualiter aberunt ab eorum verticibus, AD. Quod, &c.

PRO:

X.

Si duo quaecunque graua plana, vel duo solida fuerint proportionaliter analoga in grauitate: eorum grauitates erunt inter se, ut grauitates basium, seu quarumcunque molium, in ipsis ex traiectione cuiuscunque plani, communem altitudinem perpendiculariter secantis, effectarum.

SInt prius
duo quocunq; plana
grauia, **C**r
n, **C**r, pro-
portionali-
ter analog
in grauitate,
in communi
altitudine,



Cr, ita vt ductis quocunque planis ipsam, Cr, secanti-
bus fiat in, Cnr, rectæ, y &, OQ, IH, & in, Cr +, re-
ctæ, & 2, QS, HK, & sit gravitas, y &, ad gravitatem, & 2
vt gravitas, OQ, ad gravitatem, QS &c. Dico gravitatem
figuræ, Cnr, ad gravitatem, Cr +, esse vt gravitas basis,
nr, ad gravitatem basis, r+, vel vt gravitas y &, ad gravi-
tatem, & 2 &c. Supponemus autem primò eas esse vnifor-
miter graues in seipsis, & inter se. Erit ergo vt gravitas, nr,
ad gravitatem, r+, ita gravitas cuiuscunque, vt, y &, ad
gravitatem, & 2, & sic de singulis. Igitur vt vnum ad vnum
sic omnia ad omnia. Nempe vt gravitas, nr, ad gravita-
tem, r+, ita erunt gravitates o. l. Cnr, ad gravitates o. l.
Cnr. Cum verò vt gravitas, nr, ad gravitatem, r+, ita
sit, nr, ad r+, & sic in cæteris: erunt gravitates o. l. Cnr,
ad gravitates o. l. Cr+, vt, o. l. Cnr, ad o. l. Cr+, scilicet
vt,

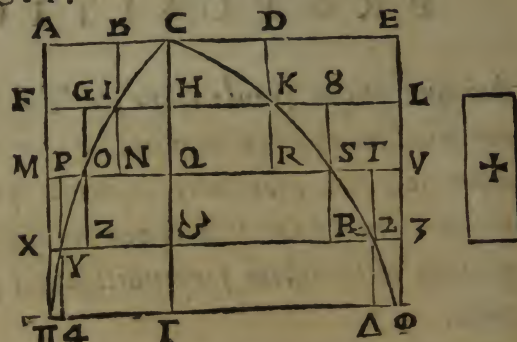
Def. 12.

Cor. 4.
Exerc. 1.

1. huius.

1. huius. vt, Cnr , ad, $Cr\phi$, hoc est vt grauitas figuræ, Cnr , ad grauitatem figuræ, $Cr\phi$.

Si verò di-
etæ figuræ
fuerint in sei-
pſis quidem
vniformiter
graues, sed
inter se di-
uerſigradus,
nec ſint pa-
rallelogram



Def. 12.

2. huius.

3. huius.

ma, constituemus in eadem altitudine, Cr , & in basibus, nr , $r\phi$, parallelogramma, Ar , rE , ita vt, Ar , sit vniformiter graue cum, Cnr , & Er , cum, $Cr\phi$. Supponemusq; traiecta plana in ipsis effecisse rectas, $X&$, MQ , FH , in, A , r , &, & 3, QV , HL , in, Er . Erit ergo grauitas, nr , ad grau. $y&$, vt grau. $r\phi$, ad grau. & 2: quapropter grauitas, $X&$, ipsi, nr , grau. æqualis, ad gr. & y , erit vt grau. 3 &, ipsi grau. $r\phi$, æqualis, ad grau. & 2, & sic in cæteris. Ergo grauitates o. l. Ar , ad grau. o. l. Cnr , erunt vt gr. o. l. Er , ad gr. o. l. $Cr\phi$. Quoniam verò, Ar , Cnr , sunt vniformiter graues, idè vt grauitates o. l. earundem, ita sunt o. l. & vt o. l. ita figuræ, & vt figuræ ita earum grauitates. Eodem modo ostendemus grauitates o. l. Er , $Cr\phi$, esse vt grauitates figurarum, Er , $Cr\phi$. Ergo grauitates ipsorum, Ar , rE , ad grauitates figurarum, Cnr , $Cr\phi$, erunt in eadem ratione. Quare grauitas, Ar , ad grauitatem, Er , erit vt grauitas, Cnr , ad grauitatem, $Cr\phi$. Sed grauitas, Ar , ad grauitatem, Er , habet rationem compositam ex ratione plani, Ar , ad planum, Er , scilicet ex ratione, nr , ad, $r\phi$, & ex ratione gradus grauitatis ad gradum grauitatis, tam in planis, Ar , rE , quam in lineis, nr , $r\phi$: hoc est grauitates, Ar , rE , sunt vt grauitates, nr , $r\phi$. Ergo & grauitates figurarum, Cnr , $Cr\phi$, erunt inter se, vt grauitates, nr , $r\phi$. Quod patet de illis quoque si fuissent parallelogramma.

Denique alteram ipsarum, vt, $Cr\phi$, supponamus difformiter grauem iuxta limitem, CE , vel illi parallela extra,

extra ductam, sed, Er , vniformiter graue. Ostendemus ergo modo, quo supra, grauitates o. l. Ar , ad grauitates omnium linearum, Cnr , esse vt grauitates o. l. Er , ad grauitates o. l. Cr . Sed vt grauitates o. l. ita sunt grauitates figurarum etiam in vnif. grauibus, vt mox probabitur. Ergo grauitates, Cnr , Cr , erunt vt grauitates, Ar , Er , seu vt grauitates, nr , r , &c.

Præsuppositum verò sic ostendetur. Nam quæcunque figuræ vel planæ, vel solidæ, æqualiter analogæ in grauitate siuè vniformiter, siuè difformiter graues, sunt æquægraues. Si enim ex illis accipiantur duæ quæcunque vel ambo planæ, vel ambo solidæ, & in libra suspendantur, grauitates o. l. earundem in planis, seu o. planorum in solidis, erunt inter se æquales, cum sint æqualiter analogæ in grauitate: & vt vnum ad vnum sic omnia ad omnia. At centrum grauitatis o. l. (seu o. planorum) cum sint æquægrauiæ erit in medio rectæ iungentis earum centra grauitatis, & hoc commune est ipsis, & figuris. Ergo figuræ æquæponderabunt, secus enim earum centrum gr. non esset in medio. Quapropter erunt inter se æquægraues. Si ergo velimus ex. gr. probare grauitates o. l. Cnr , Cr , esse vt grauitates figurarum, supponemus quandam tertiam figuram vniformiter grauem cum, Cnr , sed æqualiter analogam in grau. ipsi, Cr , cui idcirco ex demonstratis erit æquægrauis, sicuti & grauitates o. l. æquales erunt. Grauitates autem o. l. huius tertiæ figuræ, & ipsius, Cnr , erunt vt grauitates ipsarum figurarum, quia erunt vt o. l. & subinde, vt figuræ, earumq; grauitates. Ergo & grauitates o. l. Cnr , Cr , erunt inter se, vt grauitates earundem figurarum. Quod & de difformiter grauibus inter se comparatis manifestum est, conferendo eas cum vniformiter graui, verificari.

In solidis autem eadem fiet demonstratio; vt in, Cnr , Cr , si nunc solidæ intelligantur, & Ar , Er , sint cylindrici, & si pro rectis plana subintelligemus. Quod tanquam intellectu facile Lectoris industriæ relinquemus. Admoneo autem hæc quoq; verificari quæcunq; sit difformitas grauitatis, vt si esset qualem explicamus in Def. 14. quia currunt

xx

eadem

Def. 11.

Post. 3.
Post. 5.

3. Exerc. 4.
1. huius.

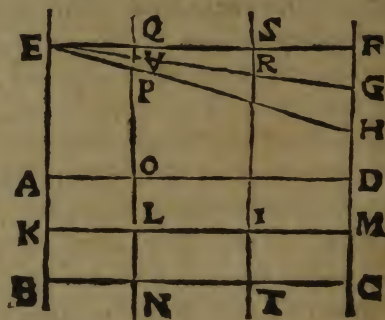
Def. 14.
Post. 5. ch.
14. huius.

Probabimus enim gravitatem, EH , ad gr. HD , esse vi gravitatem, AH , ad gr. HB , sicuti sunt gravitates basium eorundem. Verum supponemus, DH , uniformiter grave, communi existente gravitate, HK , tam ipsi, DH , quam figura, CHK , cum deficientia gravitatis erit à, Γ , versus, C , sic enim patebit gravitatem, DH , maiorem esse gravitate, CHK , & sic totius circumscripta gravitatem esse maiorem gravitate, $C\Gamma\phi$. Cum verò deficientia gravitatis erit à, C , versus, Γ , tunc utemur figuris, $ACII$, & $CE\phi$, tanquā difformiter gravibus, quibus circumscriptionem, & inscriptionem factam supponemus, eodem enim modo ostēdetur gravitatē circumscripta maiorem esse gravitate, $C\Gamma\phi$. Sicuti gravitatem quoque inscripta eadem esse minorem itidem patefiet. Cetera vero artificibus ad demonstrationem complendam nota sunt. Per hūc ergo modum poterit studiosus contexere demonstrationem in omnibus allatis casibus, tam in planis, quam in solidis huic circumscriptiōni, & inscriptiōni congruis. Quod & de precedenti Propositione, ac alijs huiusmodi per Indivisibilia hic procedentibus, (ne nimis longa euadat hac Exercit.) dictum volo, quas cui libuerit iuxta hunc modum Archimedem demonstrandas relinquo. His verò premisis nunc accedemus ad inuestiganda centra gravitatis aliquarum planarum, ac solidarum figurarum difformiter gravium, pro quibus uniformiter gravium centra gr. iam inuēta supponemus, iisque prout expectet in sequentibus utemur.

PROPOSITIO XI.

*Si quodcunq; parallelogrammum sit difformiter graue iuxta
limitem quoduis ipsius latus: centrum grauitatis eius-
dem diuidet diametrum limiti insistentem, ita vt pars
ad limitem sit reliqua dupla.*

Sit parallelogrammum
quodcunq; ABCD,
& in eo quodlibet late-
rum, AB, sumatur tan-
quam limes, & regula,
penes quod sit vniformi-
ter difformiter graue. Di-
co centrū grauitatis ipsius
secare diametrum limiti
insistentem, nempe, KM,
in puncto, I, ita vt, KI,
sit dupla, IM. Extendantur indefinitē, BA, CD, paral-
lelae, & in iisdem sit constitutum quodcunq; triangulum,
EFH, vniformiter graue, in quo diuisa basi, FH, bifariam in,
G, & iuncta, EG, manifestum est centrum grauitatis esse
in, R, in quo secatur, EG, ita vt sit, ER, dupla, RG. Nunc
inter, EB, FC, extendatur per, R, indefinita, ST, & alia
quæcunq; QN, ambæ æquidistantes ipsis, EB, FC: ipsius
verò, QN, portio concepta in triangulo, EFH, sit, QP, &
in parallelogrammo, AC, ipsa, ON. Cum ergo, AB, sit
limes grauitatis, & regula, cui æquidistant, DC, ON, erit
grauitas ipsius, DC, ad grauitatem ipsius, NO, vt distan-
tia ipsius, DC, à limite, AB, ad distantiam, ON, ab eodem
limite, hoc est vt, MK, ad, KL, vel, FE, ad, EQ, scili-
cet vt, FH, ad, QP, & subinde vt grauitas, FH, ad graui-
tatem ipsius, QP; & hoc vbilibet intra parallelas, EB, FC,
verificabitur. Ergo parallelogrammum, AC, erit proportio-
naliter analogum in grauitate ipsi triangulo, EFH. Qua-
pro-



Commād.
ad Prop.
14. Primi
Aequipō.
Archim.

Def. 8.

1. huius.

Def. 12.

propter centrum gravitatis parallelogrammi, AC, erit in eadem recta, ST, in qua est centrum, R, trianguli, EFH, ut æqualiter absint à verticibus, E, AB, dictarum figurarum. Vnde illud erit in concursu cum diametro, KM, (est enim quoque in diametro, KM,) hoc est in, I, in quo, KM, proportionaliter secatur ut, EG, in R, propter parallelas, EB, ST, FC. Cum ergo, ER, sit dupla, RG, etiam, KI, erit dupla, IM. Igitur centrum gravitatis parallelogrammi, AC, secat diametrum, KM, ita ut pars ad limitem, AB, sit dupla reliquæ. Quod erat demonstrandum.

9. huius.

8. huius.

C O R O L L A R I U M I.

EX demonstratis constat punctum, I, nedum esse centrum gravitatis parallelogrammi, AC, sed etiam cylindri circa axem, KM, seu in univ. cuiuscunque cylindrici circa axem gravitatis, KM, si hæc difformia iuxta limitem planum, AB, vel, EB, dicta solida in una oppositarum basium ut, AB, tangentem supponantur. Sit enim, QN, planum utcunque ductum aquidistans ipsi plano, EB, & efficiens in cylindrico, AC, figuram, ON, ut ex. gr. in cylindro, AC, circulum, ON. Erit ergo gravitas circuli, DC, ad gravitatem circuli, ON, ut, MK, ad, KL, idest ut gravitas, DC, tanquam lateris parallelogrammi, AC, ad gravitatem rectæ, ON. Et quia, QN, planum inter, EB, FC, absque electione ductum est: sequitur parallelogrammum, AC, & cylindrum, AC, esse magnitudines proportionaliter analogas in gravitate. Habebunt ergo centrum gravitatis in eodem plano parallelo ipsi, EB. Cum vero centrum gravitatis cylindri, quippe qui est solidum circa axem gravitatis, KM, sit in, KM, necessario erit in, I. Per hanc ergo rationem explicatam singulariter in cylindro patet universaliter in omni cylindrico circa axem gravitatis, KM, centrum gravitatis esse punctum, I.

Def. 8.

Def. 12.

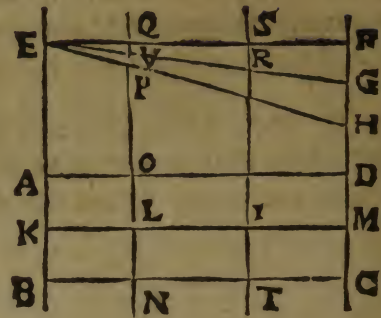
9. huius.

8. huius.

COL.

COROLLARIUM II.

Colligitur insuper si intra, EB, FC , plana parallela ducatur quodcunque; planum ipsis equidistans, QN ; centrum gravitatis parallelogrammi, OC , & subinde cuiuscunque cylindrici circa axem gravitatis, LM , (si hac omnia esse difformiter gravia supponantur iuxta



9. huius.
Archim.
lib. 1. de
Aequi-
pond.
Prop. 15.
Luc. Val.
lib. 1.
Prop. 20.

limitem, EB) secare, LM , quemadmodum centrum gravitatis trapezii, $QFHP$, uniformiter gravis secatur, VG , diametrum eiusdem trapezii. Sunt enim haec magnitudines ex demonstratis proportionaliter analogae in gravitate. Et quia, VG , ita secatur à centro gravitatis trapezii, $QPHF$, ut pars versus, QP , ad reliquam sit, ut dupla, FH , una cum, QP , ad duplam, QP , una cum, FH ; est autem ut, FH , ad, QP , ita, FE , ad, EQ , & MK , ad, KL , & subinde ut dupla, FH , cum, QP , ad duplam, QP , cum, FH , ita dupla, MK , cum, KL , ad duplam, KL , cum, MK . Quapropter centrum gravitatis parallelogrammi, AC , seu cuiuslibet cylindrici circa axem gravitatis, LM , imò & ipsius, LM , ita secabit ipsum, LM , ut pars versus limitem, AB , sit ad reliquam, ut dupla, MK , cum, KL , ad duplam, KL , cum, MK , scilicet ut dupla distantiae à limite remotioris basis, una cum distantia propinioris, ad duplam distantiae propinioris una cum distantia remotioris basis.

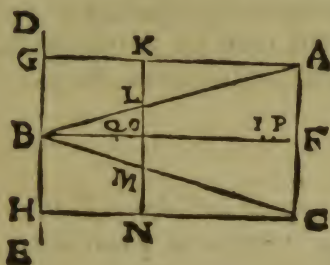


PRO:

PROPOSITIO XII.

Si proponatur quodcunque triangulum, per cuius verticem acta eiusdem basi parallela sit limes, iuxta quem supponatur difformiter graue: centrum grauitatis dicti trianguli erit in linea recta ducta à vertice ad medium punctum basis, ipsam ita diuidens, ut pars ad verticem sit reliquæ tripla.

SIt quodcunq; triangulum, ABC, per cuius verticem, B, ducta, DE, basi, AC, parallela, ipsa eligatur tanquã limes, iuxta quem supponatur ipsum triangulum, ABC, difformiter graue; secta autem, AC, bifariam in, F, iungatur, BF, quæ secetur in, I, ita



ut, BI, sit tripla ipsius, IF. Dico punctum, I, esse centrum grauitatis trianguli, ABC. Ducantur per puncta, A, C, ipsi, BF, parallelæ, AG, CH, & circa axim, BF, in basi circulo, AC, intelligatur conus, ABC, vniformiter grauis. Insuper ducatur quodcunq; planum basi circulo, AC, æquidistans, & efficiens in cono circulum, LM, in parallelogrammo, GC, rectam, KN, & in triangulo, ABC, rectam, LM, ac in, BF, punctum, O. Igitur, KN, erit parallela ipsi, AC, supponemus autem & parallelogrammum, GC, difformiter graue iuxta litem, DE. Grauitas ergo rectæ, AC, ad grauitatem rectæ, KN, erit vt, FB, ad, BO, & grauitas, KN, ad grauitatem, LM, erit vt, KN, ad LM, (quia recta, KN, supponitur in seipsa vniformiter grauis) seu vt, AC, ad, LM, hoc est vt, FB, ad, BO. Igitur grauitas, AC, ad grauitatem, LM,

4.1. Coni.

Def. 8.

t, huius.

ha-

i. huius.

2.12.Elen.

Def. 12.

8. huius.

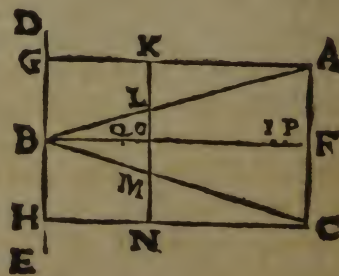
Luc. V. 1.
lib. I.

Prop. 39.

habebit rationem compositam ex duabus rationibus ipsius, FB, ad, BO, nempe erit vt quadratum, FB, ad quadratum, BO. Rursus grauitas circuli, AC, ad grauitatem circuli LM, est vt circulus, AC, ad circulum, LM, (quia conus supponitur vniformiter grauis) hoc est vt quadratum, AC, ad quadratum, LM, & subinde vt quadratum, FB, ad quadratum, BO. Ergo grauitas, AC, rectæ lineæ ad grauitatem rectæ, LM, erit vt grauitas circuli, AC, ad grauitatem circuli, LM, &, LM, ad libitum ducta est: igitur triangulum, ABC, & conus, ABC, erunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate. Est autem centrum grauitatis trianguli, ABC, cum sit figura circa diametrum, BF, in ipsa, BF, in qua pariter est centrum grauitatis con. Ergo commune habebunt centrum grauitatis. Sed centrum grauitatis con. est punctum, I, ergo, I, erit quoq; centrum grauitatis trianguli, ABC. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

Liquet ex demonstratis trapezium quodcumque resectum linea, vel plano basi, AC , parallelo, ut, ALM C , esse proportionaliter analogum in gravitate cum frusto conii, $LACM$, eodem plano secto, & ideo has habere commune centrum gravitatis. Verum centrum gravi-



Elicitur
ex Prop.
35. lib. 3.
Luc. Val,

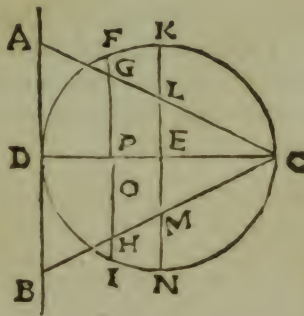
tatis frusti coni habetur (signato, Q , centro gravitatis
coni, LBM ,) si fiat ut excessus cubi, FB , super,
 BO , ad cubum, BO , ita, QI , ad IP , est enim
punctum, P . Ergo, P , erit centrum gra-
vitatibus trapezj, $ALMC$, difforni-
ser gravis iuxta limi-
tem, DE .

PROJ

PROPOSITIO XIII.

Si quodcunq; triangulum supponatur difformiter graue iuxta limitem basim : centrum gravitatis erit in puncto medio rectæ lineæ, quæ, ducitur à vertice ad medium punctum basim eiusdem trianguli.

Sit primò triangulum, ABC , æqualium laterum, AC , CB , & difformiter graue iuxta limitem, AB , sectaque AB , bifariam in, D , iungatur, CD , quæ pariter bifariam secetur in, E . Dico punctum, E , esse cætrum gravitatis trianguli, ABC . Fiat circa, DC , tanquam circa axim sphaera, $CKDN$, quæ intelligatur esse vniformiter grauis.



Per centrum in super, E , traiciatur planum, rectè secans axem, DC , & efficiens in sphaera circulum, KN , & in triangulo rectam, LM . Similiter ducatur aliud quodcunq; planum ipsi, DC , erectum, efficiens in sphaera circulum, FI , & in triangulo rectam, GH . Erunt ergo ambo hæc plana parallela plano per, AB , transeunti, sphaeramq; tangenti, cum CD , propter æqualia latera, CA , CB , sit ipsi, AB , perpendicularis. Deniq; ex recta, GH , abscindatur, GO , æqualis ipsi, LM . Gravitas ergo rectæ, LM , ad gravitatem rectæ, GH , de foris sumpta gravitate rectæ, GO , habebit rationem compositam ex ratione gravitatis, LM , ad gravitatem, GO , hoc est ex ratione, ED , ad, DP , & ex

Def. 8.

ratione gravitatis, GO , ad gravitatem, GH , nempe ex ratione, GO , vel, LM , ad, GH , quia, GH , ponitur in seipsa vniformiter grauis. Sed vt, LM , ad, GH , ita est, EC , ad, CP . Ergo gravitas, LM , ad gravitatem, GH , habet

1. huius.

Yy

ratio-

23. Sexti
Elem.

rationem compositam ex ratione, ED, ad, DP, & ex ratione, EC, ad CP. Hæ verò duæ rationes component rationem rectanguli, DEC, ad rectangulum, DPC. Ergo gravitas, LM, ad gravitatem, GH, est vt rectangulum, DEC, ad rectangulum, DPC. Sed vt rectangulum, DEC, ad rectangulum, DPC, ita est quadratum, EK, ad quadratum, PF, & ita circulus, KN, ad circulum, FI, & ita gravitas circuli, KN, ad gravitatem circuli, FI, quia sphaera supponitur vniformiter grauis. Igitur gravitas, LM, ad gravitatem, GH, est vt gravitas circuli, KN, ad gravitatem circuli, FI, & planum, FI, ad libitum ductum est. Ergo triangulum, ABC, & sphaera, C

1. Duod.
Elem.
2. huius.

Def. 12.

1. huius.

2. huius.
Luc. Val.
lib. 1.
Prop. 1.

KDN, erunt magnitudines proportionaliter analogæ in gravitate, & sunt circa eandem, CD, quæ est diameter trianguli, & axis sphaeræ, habens idcirco in seipsa vtriusq; centrum gravitatis. Ergo in eodem puncto ipsius, DC, est centrum gravitatis trianguli, ABC, & sphaeræ, CKDN. Sed centrum gravitatis sphaeræ idem est cum centro figuræ, nempe est punctum, E, ergo &, E, erit centrum gravitatis trianguli, ABC.

Def. 12.

Quod si triangulum propositum esset quidem in basi, A B, & in eadem altitudine, sed ducta ab illius vertice ad punctum, D, non esset ipsi, AB, perpendicularis: tunc assumpto triangulo eiusdem cum eo altitudinis, & basis, vt, ABC, cuius, CD, est perpendicularis ipsi, AB, prius, vt factum est, ostenderemus centrum gravitatis istius esse in medio rectæ, CD, deinde concluderemus centrum gravitatis illius esse in medio rectæ verticem eiusdem cum, D, coniungentis, ex eo quod hæc duo triangula essent proportionaliter analogæ in gravitate, propter æqualitatem rectarum ipsi, AB, parallelarum, & ab eodem, AB, æquè remotatum, & subinde propter earum æquales gravitates.

COR.

COROLLARIUM.

Si triangulum, & sphaera, communi plano ipsi plano, AB, æquidistante secantur, constat centrum gravitatis segmenti trianguli, & sphaera eidem conterminantis, commune esse, quia sunt magnitudines proportionaliter analogae in gravitate. Sic igitur ex. gr. centrum gravitatis portionis sphaera, FDI, erit & centrum gravitatis trapezii, ABHG, & sic res se habebit in reliquis huiusmodi segmentis trianguli propositi, & sphaera siue, CD, sit ipsi, AB, perpendicularis, siue non, dummodo triangulum, & sphaera sint in eadem altitudine respectu ipsius, AB. Cum ergo ex Luca Valerio, & alijs, sed præcipue ex Torricellio compendiosissima ratione, ut ipse palam faciet, & ex me in sequentibus constent centra gravitatis harum sphaera portionum, idcirco hac quoque pro segmentis propositi trianguli recipiemus.

9. huius.

Schol. 2.
32. huius.

PROPOSITIO XIV.

Si propositum quodcunque triangulum supponatur difformiter graue iuxta limitem rectam lineam, versus verticem extra triangulum ductam basi parallelam: secta autem basi bifariam, à puncto sectionis per verticem recta linea usque ad limitem producat: centrum gravitatis dicti trianguli dividit eius diametrum verticalem, sicuti centrum gravitatis conoidis hyperbolici, circa axem altitudinem trianguli, ac hyperbola descripti, cuius latus transversum sit intercepta inter verticem, & limitem, dividit ipsius conoidis axem.

Yy 2

Sit

conoidis, unde in, AD, & in eodem illius puncto est centrum gravitatis tam conoidis, quam trianguli. Quod si triangulum fuerit scalenum colligimus propositum iuxta modum Prop. ant. Quod, &c.

Porro ex Luca Valerio Lib. Secundo Prop. 43. & Lib. Tercio Prop. 7. centrum gravitatis conoidis hyperbolici est punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, qua basim attingit, sic dividitur, ut pars basi propinquior sit ad reliquam, ut sexquialtera transuersi lateris hyperbolæ, qua conoides describit, ad axem conoidis.

COROLLARIUM I.

EX demonstratis colligitur si triangulum dictum, & conoides secantur quomodocumq; planis basi, seu limiti parallelis, segmentorum trianguli, & conoidis sibi respondentium, idem esse centrum gravitatis, cum illa sint magnitudines proportionaliter analogæ in gravitate. Centrum autem gravitatis huiusmodi segmenti conoidis hyperbolici docet idem Luca Val. Lib. Secundo Prop. 45. 1. huius

COROLLARIUM II.

SI trapezium, OVRP, habens oppositas bases, OV, minorem, & PR, maiorem. parallelas, tangatur à limite, EG, in, OV, & sit, SQ, bissecans ipsas, OV, PR, eidem, EG, perpendicularis, intelligaturq; trapezium difformiter grave iuxta limitem, EG. Erit centrum gravitatis huius trapezii in, SQ, & in eo puncto, quod est centrum gravitatis conoidis hyperbolici circa axem, SQ, latere transverso, TS, reliqua ipsius, QS, ad verticem trianguli, PTR, hyperbolæ dictæ conoides gignentis. Hoc autem ostendetur, instituta eadem præcisè demonstratione superiori. Quæ peracta concludemus hoc idem de quovis trapezio cum hoc aquè alto quod basi minori quomodocumq; adiaceat, limiti, EG, nempe quod centrum gravitatis illius erit in bissecante oppositas bases, & in eadem limiti, EG, parallela, transeunte per centrum gravitatis conoidis hyperbolici, circa axem, SQ, descripti.

SCHO-

SI quis cupiat cuiuscunque propositi rectilinei difformiter grauis iuxta limitem rectam quamlibet tangentem ipsum, vel tangenti parallelam, extra figuram ubilibet constitutam, centrum gravitatis inuenire; id ei licebit, eodem in triangula resoluta, iuxta modum in vniformiter grauibz consuetum nempe detecta ratione gravitatum difformium eorundem triangulorum per Cor. 2. Prop. 37. subsequentis; cum per superiora innotescat centrum gravitatis cuiuscunque trianguli iuxta assignatum limitem difformiter grauis. Quod & in planis non rectilineis, & in solidis difformiter grauibz pariter Lector intelliget fieri posse, cum eorum fuerint centra gravitatis inuenta, adhibito eodem Cor. 2. dictæ Prop. 37.

Ad hæc enim post rectilineas figuras transire æquum esset, verum hoc aliquantulum cogimur differre, ut viam quandam ad rimanda gravitatis centra in difformiter grauibz, præallata vniversaliorem parare possimus, quam tamen, ut quoddam exemplar huius doctrina studioso præbeamus, circa insigniores tantum figuras prosequemur.

Immo ut hæc altius promoueat, cum infinitis modis gravitatis absoluta difformitas variari possit, & sub his sint pariter infiniti modi variandi vnif. difformiter eandem gravitatem, quorum hucusque, vnum tantum attigimus, ex his nonnullos, & eos quoque infinitos seligere, ac expendere decreui, qui ex duabus definitionibus subsequentibus, cum allatis in huius Exerc. initio numero continuatis, Philogeometra satis, puto, innotescens.

DEFINITIO XIII.

SI gradus gravitatis à limite intelligantur continuò progredi (ut hucusque suppositum est) in ratione distantiarum ab eodem limite: hoc dicitur incrementum difforme (subaudi semper vniformiter difforme) gravitatis, primæ speciei. Ac si ijdem gradus sint in ratione quadratorum earundem distantiarum, vocabitur incrementum difforme secundæ speciei. Si in ratione cuborum, tertiæ speciei. Si quadratoquadratorum, quartæ. Et sic deinceps in potestatibus cossicis subsequentibus in infinitum.

XIV.

XIV.

Hic ergo consequenter quæcunq; figura plana, in qua ductarum quotcunq; rectorum, in seipsis sigillatim vniformiter grauium, limiti parallelarum, & quæcunq; solida, in qua ductorum quotcunq; planorum in seipsis singillatim vniformiter grauium, limiti parallelorum; gradus grauitatis fuerint in ratione distantiarum à dato limite; vocabitur difformiter grauis in prima specie difformitatis: & eius grauitas, prima grauitas difformis eiusdem appellabitur. Quod si rectorum, vel planorum gradus grauitatis fuerint vt quadrata distantiarum à limite, dicetur figura difformiter grauis in secunda specie: & eius grauitas, secunda grauitas difformis. Si verò illi fuerint vt cubi distantiarum, dicetur difformiter grauis in tertia specie; & eius grauitas, tertia grauitas difformis. Et sic deinceps in infinitum, &c.

COROLLARIUM.

Hinc sequitur, sicuti incrementum difforme grauitatis prima speciei ostendebatur à parallelis basi cuiuscunque trianguli, cuius apex esset limes; ita vt triangulum se haberet veluti quedam scala graduum grauitatis in ipsa difformitatis prima specie; pariter graduum grauitatis in secunda specie fore scalam secundum spatium parallelogrammi, seu trilineum parabola quadratice, in tertia cubica, in quarta quadratoquadratica, &c. Vnde si omnia hæc trilinea duplicetur cum dicto triangulo trilineorum primo sintq; in communi basi dati cuiusq; gradus grauitatis. & circa eandem diametrum, vertice limite; habebimus in ipsis omnes scalas pro assignatis speciebus difformitatis ipsius grauitatis. Vt enim se habent gradus grauitatis in qualibet specie, ita quoq; sunt applicata ad diametrum trilinei eiusdem numeri cum numero speciei, vt patuit in Exerc.

In Def. 71

Vide
Prop. 23.
in Exerc.
4.

Quarta, Prop. 23.

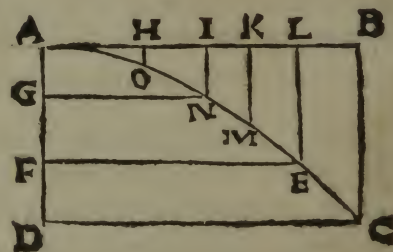
Quoniam verò ad inuestiganda figurarum centra grauitatis in quauis specie difformitatis, & iuxta modum, quem innuimus, præmisso vniuersaliorem, quibusdam Propositionibus Lemmaticis indigemus, ideò hæc sunt nobis prius demonstranda, quod nunc exequemur.

PRO:

PROPOSITIO XV.

Si in proposito quocunq; ex dictis trilineis, eiusdem basi parallelis quibuscunq; ductis, compleantur parallelogramma sub ipsis, & portionibus diametri ab eisdem abscissis versus verticem: circumscripta factis trilinei segmentis parallelogramma ad eadem segmenta eandem rationem habebunt. Et hoc idem continget in eiusdem trilinei residuo spatio, seu semiparabola.

Sit vnum quodlibet ex dictis trilineis, ABC, in quo ductis quibuscunq; LE, in basi, CB, parallelis compleantur parallelogramma, ABCD, ALEF, AING. Dico parallelogrammum, FL, ad segmentum, ALE, esse, vt parallelogrammum, GI, ad segmentum, AIN. Ductis enim in trilineis, ALE, AIN, quibuscunq; basibus, LE, IN, parallelis, nempe, KM, HO, erit, LE, ad, BC, conuertendo, vt pot. LA, ad post. AB, gradus nempe trilineo, ABC, congruentis; & BC, ad, KM, vt pot. BA, ad pot. AK, eiusdem gradus. Ergo ex æquali, EL, ad KM, erit vt pot. LA, ad pot. AK, eiusdem gradus. Sic ostendemus, IN, ad, HO, esse vt pot. IA, ad pot. AH, prædicti gradus. Sed in omnibus huiusmodi trilineis ostenditur in Exerc. 4. Prop. 23. circumscripta parallelogramma ad sua trilinea quandam determinatam rationem habere. Vt in primo trilineo, seu in triangulo, parallelogrammum esse duplum trilinei, in secundo esse triplum, &c. Ergo quam rationem habebit parallelogrammum, DB, ad trilineum, ABC, eandem habebunt parallelogramma, FL, GI, ad sua trilinea,



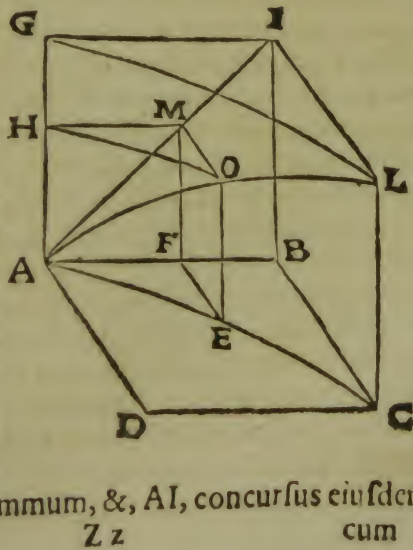
23. Exerc.
4.

nea, seu segmenta, ALE, AIN. Quia veid permutando vt totum, FL, ad totum, GI, ita est pars, ALE, ad partem, AIN, ideò reliquum ad reliquum, nempè, semiparabola, FAE, ad semiparabolam, GAN, erit vt totum, FL, ad totum, GH: vnde permutando, & conuertendo, parallelogramma, FL, GI, ad semiparabolas, seu semiparabolæ, DC, segmenta, AFE, AGN, eandem ratione habebunt.

PROPOSITIO XVI.

Si circumscriptum cuiusq; ex dictis trilineis parallelogrammum incipiens reuolui circa basim eiusdem trilinei tanquam axem, vicinque eleuetur, cylindricusque sub ipsis compleatur: & per verticem trilinei, latusq; parallelogrammi, quod illius basi opponitur, planum indefinite extendatur, cylindricum secans in duas partes, seu truncos. Erit truncus inferior ad superiorem, vt parallelogrammum ad trilineum.

S It parallelogrammū, ABCD, vni ex dictis trilineis, quod sit, ABC, circumscriptum. Eleuetur autem, DB, vt cunq; circa axem, BC, & sit idem, AC, LB, compleaturq; cylindricus sub ipsis, GILCAB, quem secet planum indefinite extensum per, A, IL. Dicotitūcum inferiorem, AILCB, ad superiorem, GALI, esse vt, DB, ad trilineum, ABC. Erit itaque, GB, parallelogrammum, & AI, concursus eiusdem cum



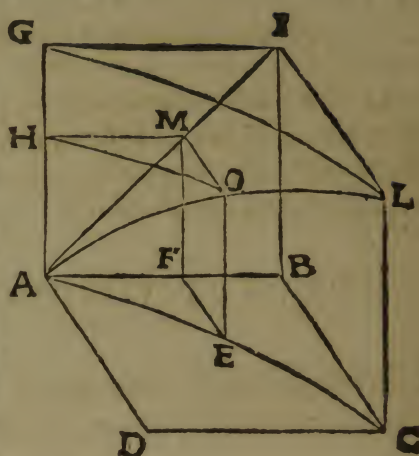
15. vnd.
Elem.

23. Sex.
Elem.

Prop.
ant.

Corol.
Prop. 4.
Exerc. 1.

cum plano, AIL, recta
linea. Sumatur in ea
quodcunq; punctum, M,
à quo ducantur paralle-
læ, MO, ipsi, IL; MH,
ipsi, IG, & MF, ipsi, I
B. Planum ergo, per,
HM, MO, transiens æqui-
distabit ipsi, GIL, & trā-
fiens per, OM, MF, ipsi,
LB; esto quod in truncis
produxerint figuras, H
MO, MOEF. Erit igitur,
OHMFAE, cylindricus, & subinde figura,



HMO, similis, & æqualis ipsi, AFE, ac similiter posita.
Figura verò, MOEF, erit parallelogrammum ipsi, LB,
æquiangulum, cum eidem æquidistet, transeunti per late-
ra cylindrici, GBC, vnde transibit quoq; per eius latera,
æquidistabitque, OE, ipsi, MF, & MO, est parallela, FE,
suntque, MF, IB, FE, BC, parallelæ. Quoniam ergo pa-
rallelogrammum, LB, ad, OF, habet rationem compo-
sitam ex ratione, IB, ad, MF, hoc est, IA, ad, AM, seu,
GI, ad, HM; & ex ratione, BC, ad, FE, hoc est, IL, ad,
MO. Duæ rationes verò, GI, ad, HM, & IL, ad, MO,
componunt rationem parallelogrammi, GIL, ad, HMO,
seu trilinei, GIL, ad, HMO, cum adæquantur ipsis, ABC,
AFE. Ergo, LB, ad, OF, est vt, GIL, ad, HMO; & per-
mutando, LB, ad, GIL, erit vt, OF, ad, HMO, & hoc
vbicunq; M, enim ab libitum sumptum est. Ergo omnia
plana trunci, AILCB, regula, LB, ad omnia plana trunci,
AGIL, regula, DB, sunt vt vnum ad vnum, scilicet vt,
BL, ad, GIL, seu vt, DB, ad, ABC, & altitudines trun-
corum respectu suarum basium sunt æquales (secus enim
non valeret hæc ratio demonstrandi) quapropter truncus,
AILCB, ad truncum, GALI, est vt, DB, ad, ABC.
Quod, &c.

COR-

COROLLARIUM

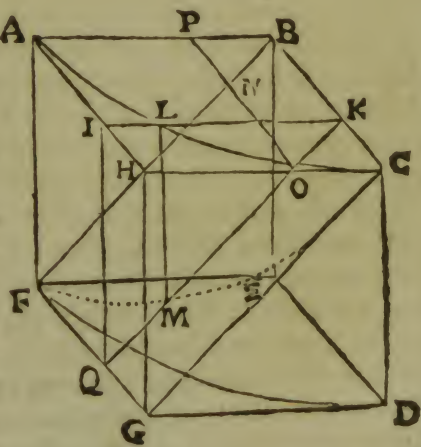
Si vice trilinei fuisset eius semiparabola in basi, BC , diametro, AB , eodem modo ostensum fuisset truncum inferiorem cylindrici in eadem ut in basi constituti, ad superiorem esse ut, DB , ad dictam semiparabolam.

PROPOSITIO XVII.

Si fuerit quicunq; cylindricus plano sectus per verticem inferioris basis, & per basim, seu tangentem in opposito vertice superiorem extenso: parallela dictæ basi, vel tangenti, quæ transsit per alterutrum basium centrum gravitatis, secabit eiusdem basis altitudinem in ratione reciproca partium, seu truncorum eiusdem cylindrici.

Sit quicunq; cylindricus, $ABIDFE$, in oppositis basibus, FED , ABC , plano sectus per, F , verticem basis, FED , & per basim, BC , extenso, quod efficiat figuram, BFC , in eodem cylindrico. Transeat autem quædam ipsi, BC , parallela per cætrum gravitatis ex. gr. N , superioris basis, secans eiusdem altitudinem, quæ sit, AB , in, P .

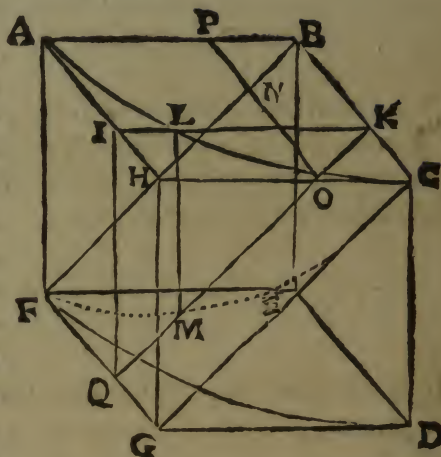
Dico ut, AP , ad, PB , ita reciprocè esse truncum inferiorem, $BFCDE$, ad superiorem, $AFCB$. Circumscribatur ipsi, FED , parallelogrammum, $FGDE$, in cuius basi, &



Zz 2

in

in eadem altitudine, fiat
paralleleppipedum, BG,
cylindrico circumscriptū,
quod plano, FBC, exten-
so secetur in duo prisma-
ta, BCGHAF, BCDEF
G, quæ erunt æqualia.
Rursus inter plana, AE,
HD, traiciatur quod-
cunq; planum ipsis æqui-
distans, quod faciat in
prismate superiori trian-
gulum, KIQ, & in trun-
co superiori cylindrici
triangulum, MLK; & quia æquidistat transeunti per latera



Lemma
ad Prop.
11. primi
Geom.
Indiu.

Cor.
Prop. 10.
Exerc. 4.

3. Exerc. 1.

cylindrici, erit, LM, parallela eidem lateri, & subinde ipsi, IQ, quæ est parallela ipsi, AF, lateri cylindrici. Quoniam verò triangulum, QIK, simile est triangulo, MLK, erit ad illud sicut quadratum, IK, ad quadratum, KL, & hoc ubi-
cunque, suntq; antecedentia inter se æqualia. Ergo ut
omnia plana superioris prismatis ad omnia plana superioris
trunci, ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, BH,
ad o. q. figuræ, ABC, regula AB. Sed o. q. BH, ad o. q.
ABC, habent rationem compositam ex ratione, HB, ad,
ABC, hoc est solidi, BG, ad cylindricum, BFD, & ex ra-
tione dimidiæ, AB, (quæ est distantia centri gravitatis pa-
rallelogrammi, BH, à recta, BC,) ad, PB, distantiam cen-
tri, N, ab eadem, BC, vt elicitur ex demonstratione Roc-
chæ pro regula Guldini, allata in Exerc. Tertia, Cap. 14.
Pag. 230. quâ idem Roccha adinuenit occasione mēsurandi
fusi parabolici. Ergo omnia plana prismatis, ad o. plana
trunci superioris (hoc est prisma ad truncum superiorem)
habent rationem compositam ex ratione solidi, BG, ad cy-
lindricum, BFD, & ex ratione dimidiæ, AB, ad, BP.
Quia verò solidum, BG, duplum est prismatis, sicuti, AB,
dupla suæ medietatis; ideò solidum, BG, ad truncum su-
periolem erit in ratione composita ex ratione, BG, ad cylin-
dricum, & ex ratione, AB, ad, BP. Sed ratio, BG, ad
trun-

truncum superiorem est quoq; composita ex ratione, BG, Def. 13,
ad cylindricum, & cylindrici ad truncum. Ergo si aufera- primi
tur communis ratio solidi, BG, ad cylindricum, remane- Geo. Ind.
bit ratio cylindrici ad truncum superiorem eadem rationi,
AB, ad, BP. Quare diuidendo truncus inferior ad supe-
riorem erit vt, AP, ad, PB. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

Hinc patet siè contra in eadem figura ducatur parallela
eiusdem basi, vel tangenti, diuidens altitudinem in
ratione truncorum reciproca, in ea esse centrum gravitatis di-
ctæ figure. Et quia in figuris circa diametrum centrum gra- s. huius
uitatis est in diametro, propterea in illis dictum centrum secat
diametrum in ratione reciproca truncorum.

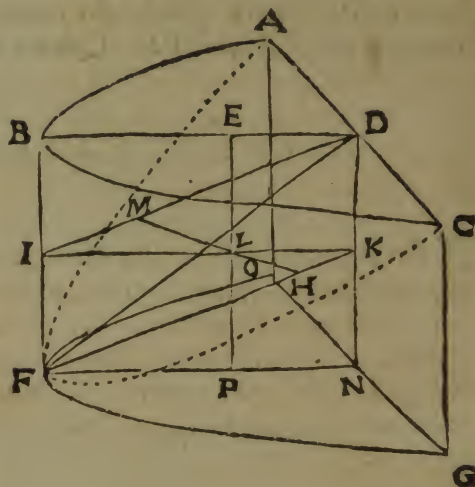
SCHOLIUM.

Cum proposuissem clarissimo Torricellio inueniendam ra-
tionem truncorum in solo cylindrico in parabola constitu-
to, nedum istam adinuenit, sed quicunque esset cylindricus,
dummodo eius basis esset figura circa diametrum: osten-
dens truncos esse in ratione reciproca partiũ diame-
tri à centro gravitatis separatarum, quod &
mihi superiorem contexendi, qualiscunq;
sit, occasionem prauit. Et quia de-
monstratio elegantissima est,
& adducta breuior,
ideò hic eam
subnectere libuit,
que talis
est.

ALI

ALITER EX TORRICELLIO.

Sit cylindricus, ABCGFO, habens circa diametros, BD, FN, figuras, ABC, OFG, quarum centra grauitatis, E, P: secetur autem plano, FAC, per, F, & tangentem in, D, figuram, ABC, seu eius basim, AC, extenso. Dico partem cylindrici inferiorem ad superiorem esse vt, BE, ad, ED, vel,



FP, ad, PN. Ducantur rectæ, BF, EP, DN, DF, & à medijs punctis ipsarum, BF, DN, nempè, I, K, rectæ, ID, KF, necnon, IK, secans, EP, in, L. Erunt itaque, BF, EP, DN, inter se parallelæ, quia iungunt æquales, & parallelas. Ob eandem rationem erunt parallelæ, BD, IK, vel, IK, FN, vt &, DI, KF. Quoniam verò, DI, bifariam secat, BF, ideò bifariam quoq; secabit omnes in triangulo, DBF, ipsi, BF, æquidistantes, quæ sunt diametri parallelogrammorum in solido, ABCF, plano, AG, parallelorum. Quapropter transibit, ID, per eorum omnium centra grauitatis, & erit in eadem, ID, centrum grauitatis solidi, ABCF; hoc verò, vbicunque sit, supponatur esse, M. Eodem modo ostendemus in, FK, esse centrum grauitatis solidi, ACGFO, & est, L, medium punctum rectæ, EP, centrum grauitatis cylindrici, ABCGFO. Si ergo ab, M, per, L, producat, MLH, vsq; ad, FK, cui incidat in, H, erit, H, centrum grauitatis solidi, ACGFO. Quia ergo triangu-
gula, MIL, LKH, sunt similia propter parallelas, DI, KF,
ideò

9. huius;

ideò vt, ML, ad, LH, ita est, IL, ad LK: sed vt, ML, ad, LH, ita est solidum, ACGFO, ad solidum, ABCF, ergo vt, IL, ad, LK, & subinde, vt, BE, ad, ED, vel, FP, ad, PN, ita est solidum inferius, ACGFO, ad superius, ABCF. Quod ostendendum proponebatur.

6. Prop.
Acquz p.
Arch.

Licet autem præcedens demonstratio sit vniuersalior, facile tamen puto ad eandem vniuersalitatem hanc reduci posse. Porro notat, si in recta iungente puncta, F, E, sint quoq; centra gravitatis omnium planorum in solido, ABCF, ipsi, ABC, æquidistantium, in mutuo concursu rectarum, FE, ID, verum illius centrum reperiri.

C O R O L L A R I V M.

SI cylindricas, ACGFO, supponatur difformiter grauis in quacunq; specie, iuxta limitem planum, AG, vel tangens in, FB, aut illis parallelam, & sint, E, P, centra gravitatis basium, ABC, OFG; erunt, BE, ED, vel, FP, PN, in ratione reciproca gravitatum truncorum: currit enim hic eadem præcisè demonstratio. Quod si, FE, transeat quoq; per centra gravitatis planorum in solido, ABCE, ipsi, ABCF, æquidistantium, eius centrum gravitatis erit itidem in concursu rectarum, DI, EF.

Poterat prior pars huius Corollarij probari per ostensa in superiori nostra demonstratione, intelligendo alium cylindricum uniformiter grauem, ac proportionaliter analogum in gravitate ipsi, ACGFO, cuius bases opposita fuissent circa diametros, FN, BD. Nam ex hoc propositum pro difformiter graui colligi potuisset. Verum cum hoc compendiosius habeatur ex demonstratione Torricellij nihil ultra prædictis addendum censui.

PRO.

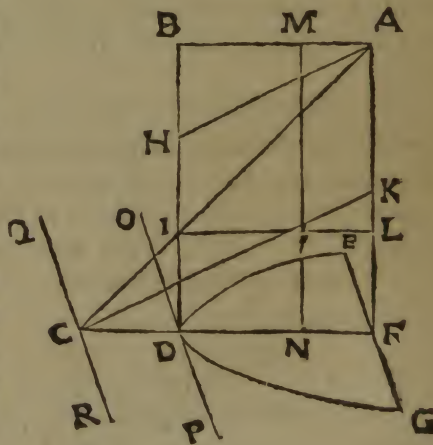
PROPOSITIO XVIII.

Si cylindricus uniformiter, vel utcumq; difformiter grauis, in basi figura circa diametrum, secetur plano transeunte per alterutrum ex verticibus superioris basis, & per equidistantem tangenti in opposito vertice inferioris, ad eandem partem verticis extra figuram constitutam, quæ limes supponatur: centrum gravitatis basis cylindrici diuidet compositam ex diametro, eiusq; indefinite productæ residuo vsq; ad limitem, in ratione reciproca grauitatum truncorum eiusdem cylindrici.

S It cylindricus uniformiter, vel utcūq; difformiter grauis in basi figura, EDG, circa diametrū, DF; cuius tātū parallelogrammū, BAFD, exponimus, transiens per axem grauitatis, MN, & diametros, BA, DF, oppositarum basium. Hic secetur plano transeunte per, A, &, QR, parallelam tangenti, OP, quæ sit limes, factis truncis, AFDI, ABI. Dico, producta, FD, vsq; ad, Q

R, limitem in, C, centrum grauitatis, N, secare, CF, in ratione reciproca grauitatum truncorum, AFDI, ABI. Hoc posset probari vel per à nobis ostensa, vel per modum

Tor-



Ex Corol.
proxime
superiori.

P R O P O S I T I O X I X.

Nam si intelligamus cylindricum in basi, FA

D, qualem poscit Prop. 16. huius, sectum plano per, A, & latus oppositum ipsi, FD, transeunte; erit parallelogrammum, CDF, ad trilineum, AFD, vt truncus eiusdem inferior ad superiorem, per ostensa in eadem Prop. 16. At inferior truncus ad superiorem est, vt, AH, ad, HE, per Cor. Prop. 17. Ergo parallelogrammum, CDF, ad trilineum, AFD, vel, CE, ad trilineum, AED, est, vt, AH, ad, HE. Eodem modo propositum de parabola ostendemus.

COROLLARIUM I.

Hinc sequitur in trilineo primo, AH, ad, HE, esse vt 2. ad 1. in secundo vt 3. ad 1. in tertio vt 4. ad 1. Et sic deinceps, &c. antecedente semper unitate aucto, & retenta in omnibus unitate pro consequente. In prima verò parabola, sc. in triangulo, BAD, erit, AG, ad, GC, vt 2. ad 1. in secunda vt 3. ad 2. in tertia, vt 4. ad 3. & sic deinceps, &c. auctis semper singulis terminis unitate: hoc est in vtriusq; figuris quemadmodum se habet parallelogrammum, CE, ad trilinea, AED, & ad semiparabolas, ACD. Quæ ratio habetur in Exerc. Quarta ex Prop. 23. eiusq; Cor.

COROLLARIUM II.

Consequitur insuper ex dictis, in omnibus hisce figuris, earumq; segmentis, per applicatas versus verticem abscissis; centra gravitatis earum, segmentorumq; diametros, similiter secare. Talis enim sectio fit iuxta rationem circumscriptorum ipsis parallelogrammorum ad ipsa segmenta, quæ in omnibus eadem est, vt patuit in Prop. 15. Torricellius prius inuenerat dictorum trilineorum, & parabolarum centra gravitatis, quæ cum mihi communicasset absq; tamen demonstratione, humaniterq; in usum permisisset, ipse superiorẽ excogitavi, quam nescio an concordet cum ab eodem allata.

18. huius.

PRO-

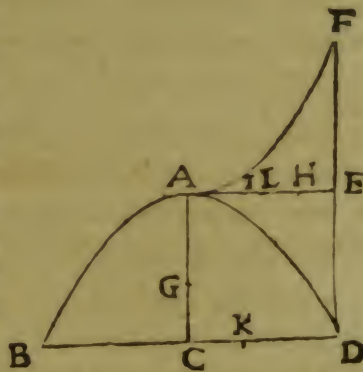
PROPOSITIO XX.

In eodem Schemate antecedenti iisdem suppositis, si, ADC , duplicetur, ut fiat circa, CD , communem basim tanquam circa diametrum figura ex duabus semiparabolis, ADC , composita: & ut, AE , cum, EH , ad, HE , ita sit, DK , ad, KC . Dico, K , esse centrum gravitatis dictæ figurae.

Dividatur, AE , bifariam in, L , quod erit centrum gravitatis parallelogrammi in basi, FD , trilineo, AED , circumscripti; eruntque pariter, H , L , centra æquilibrij, H , trilinei, AED , &, L , parallelogrammi, CE . Fiat ut, ACD , ad, AED , ita, HL , ad, LI , eritque, I , centrum æquilibrij semiparabolæ, ADC . Quoniam verò ut, CE , ad, AED , ita est, AH , ad, HE , seu, EL , LH , ad, HE , vel dupla, LH , cum, HE , ad, HE ; erit diuidendo, ut, ACD , ad, AED , vel ut, HL , ad, LI , seu dupla, HL , ad duplam, LI , ita dupla, HL , ad, HE ; unde, HE , erit dupla, LI . Igitur, LE , superabit, HI , dimidio, HE , seu ipsa, IL , sed, LE , vel, AL , superat, AI , eadem, IL , ergo, AI , IH , sunt æquales. Et quia, AE , ad, EH , est ut dimidia, AL , ad dimidiam, LI , per conversionem rationis erit, EA , ad, AH , ut, AL , vel, EL , ad, AI . Et quia ut, AH , ad, HE , ita est, CE , ad, AED , hoc est, HI , ad, IL , convertendo, EH , ad, HA , erit ut, LI , ad, IH , hoc est ad, IA , quia, HI , IA , ostensæ sunt æquales. Igitur cum, EA , ad, AH , sit ut, EL , ad, IA , &, EH , ad, HA , ut, LI ,

Aaa 2

LI,



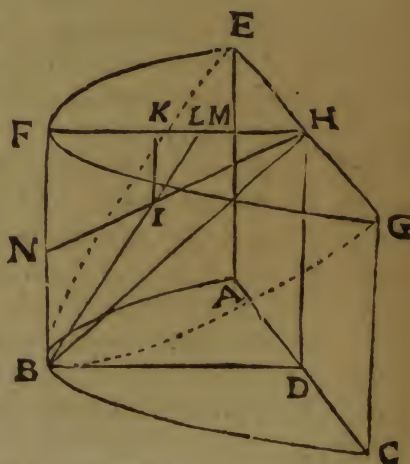
6. Prop.
primi
Aequip.
Arch.

Prop. 6.
primi
Aequip.
Arch.

LI, ad, IA, colligendo antecedentia, erit vt, AEH, ad, HA, ita, EI, ad, IA. Sed vt, AEH, ad, HA, ita est, DK, ad, KC. Ergo, AE, CD, similiter sectæ sunt in, I, K. Est autem, I, centrum æquilibrij semiparabolæ, ACD. Ergo, K, quod est in diametro duplicatæ figuræ, erit eiusdem centrum grauitatis.

PROPOSITIO XXI.

Si cylindricus uniformiter grauis, EFCBA, in oppositis basibus, ABC, EFG, constitutus, quæ singulæ sint parallelogrammum, vel una quæcunq; ex sæpè dictis infinitis parabolis, seu trilineis, circa diametros, BD, FH, & in basibus, AC, EG, existentibus; plano per verticem unius dictarum oppositarum basium, & per basim alterius transeunte, vt per, B, EG, secetur: sit autem, L, centrum grauitatis basis, EFG, & subinde centrum æquilibrij cylindrici, EFGCBA, & fiat vt, FL, ad duplam, LH, ita, FK, ad, KH; & vt, FH, ad, HL, ita, FM, ad, MH. Erunt, K, M, centra æquilibrij trūcorum; K, quidem eius, quod tribus superficiebus, EFG, EBG, EFGBE, vel quatuor, & M, reli-



qui,

qui, quod quinque, EBG , ABC , $EACG$, EBA ,
 GBC , comprehenditur.

DVcantur, BL , & HN , quæ bifariam secet ipsam, BF ,
 in, N , ijs concurrentibus in, I , iungaturq; IK . Quoniã
 ergo in duas rectas, HF , BF , ab earum terminis, H , B , re-
 flectuntur duæ rectæ, HN , BL , erit per ostensa à Ptolemæo
 Lib. 1. Almagesti Cap. 12. proportio ipsius, HL , ad, LF ,
 composita ex proportione, HI , ad, IN , & NB , ad, BF . At
 si inter, HL , LF , de foris sumamus duplam, HL , eadem
 ratio ipsius, HL , ad, LF , erit composita ex rationibus, Def. 12.
 HL , ad duplam, HL , & duplæ, HL , ad, LF . Ergo duæ primi
 rationes, HI , ad, IN , & NB , ad, BF , æquantur duabus Geo. Ind.
 rationibus, nempe ipsius, HL , ad duplam, HL , & duplæ,
 HL , ad, LF . Sed ratio ipsius, HL , ad duplam, HL , eadem
 est rationi ipsius, NB , ad, BF , cum utraq; sit subdupla.
 Ergo ratio duplæ, HL , ad, LF , eadem est rationi, HI , ad,
 IN . Quia verò ut, FL , ad duplam, LH , ita est ex constru-
 ctione, FK , ad, KH , erit conuertendo ut dupla, HL , ad,
 LF , hoc est per ostensa, ut, HI , ad, IN , ita, HK , ad, KF . 2. Sexti
 Erit ergo, IK , parallela, FB . Quoniam verò, I , est cen- Elem.
 trum gravitatis trunci, $EFGB$, quia, HN , transit per cen- 3. huius.
 tra gravitatis omnium parallelogrammorum, quæ fiunt à
 secantibus planis ipsi, EC , parallelis; & BL , transit per
 centra gravitatis omnium parabolæ, vel trilineorum in
 trunco, $EFGB$, conceptorum, ac ipsi basi, EFG , æquidi-
 stantium: ideò erit, K , eiusdem trunci centrum æquilibrium.

Rursus quia ut truncus inferior, $EABCG$, ad superio-
 rem, $EFGB$, ita est, FL , ad, LH , & ut, FL , ad duplam,
 LH , ita ex constructione est, FK , ad, KH : ideò, ut, FL ,
 ad, LH , seu ut truncus inferior ad superiorem, ita erit, FK ,
 ad dimidiam, KH . Et componendo ut, FH , ad, HL , seu
 ex constructione, ut, FM , ad, MH , ita erit, FK , cum di-
 midia, KH , ad dimidiam, KH : & iterum componendo,
 ut, FK , cum duobus dimidijs, KH , seu cum, KH , hoc est
 ut tota, FH , ad dimidiam, KH , ita erit eadem, FH , ad, H
 M . Ergo, HM , erit dimidia, KH . Cum verò ostensum sit,
 FK , ad dimidiam, KH , esse ut, FL , ad, LH : erit, FK , ad,
 MH ,

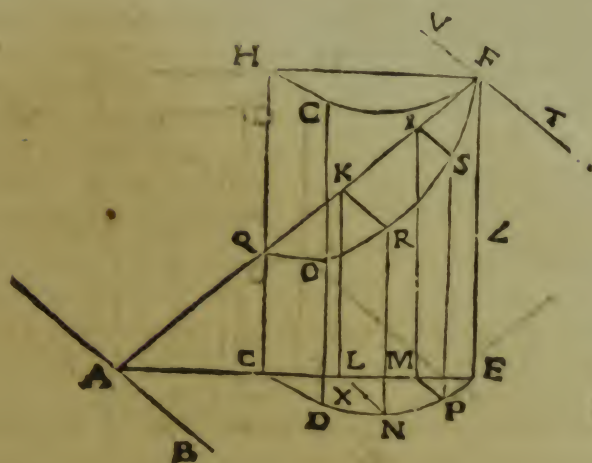
Corol.
 Prop. 17.
 iuxta 2.
 demon.

MH, vt tota, FL, ad totam, LH. Vnde reliqua, KL, ad reliquam, LM, erit vt tota, FL, ad totam, LH, scilicet vt truncus inferior ad superiorem. Cum ergo, L, sit centrum æquilibrij totius cylindrici, & K, trunci superioris, erit, M, centrum æquilibrij trunci inferioris. Licet autem figura exhibeat parabolam, idem tamen currit in parallelogrammo, & quocunque trilineo, quia, BL, HN, sunt semper axes grauitatis in huiusmodi truncis, talibus cylindricorum suppositis basibus.

P R O P O S I T I O XXII.

Cuiuslibet figuræ planæ circa diametrum, ac in prima difformitatis specie difformiter graui, iuxta limitem rectam lineam ipsam in vertice tangentem, vel eidem tangenti parallelam, extra figuram ubicunque constitutam, est proportionaliter analogum in grauitate segmentum inferius cylindrici in basi proposita figura existentis, altitudine quacunque & uniformiter grauis; quod sit ducto plano indefinito per punctum, in quo diameter, producta si opus sit, incidit limiti, & per rectam tangentem superiorem cylindrici basim in extremitate diametri à limite remotiorem.

SIt figura plana quæcunque circa diametrum, CE, cuius tantum dimidiam, CDE, exhibemus, in prima difformitatis specie difformiter grauis iuxta limitem rectam lineam, quæ figuram tangat in, C, seu eidem tangenti æquidister, vt, AB, extra figuram, cui incidat producta, EC, in, A. Insuper in basi, CDE, intelligatur constitui cylindricum, HGFEDC, vniformiter grauem, cuius, FE, sit latus. Erit ergo, HFEC, parallelogrammum, quia, CE, est recta linea. Deniq; per, A, & rectam, VT, tangentem figuram, HGF, (similem, æqualem, & similiter positam ipsi, CDE,) æqui-

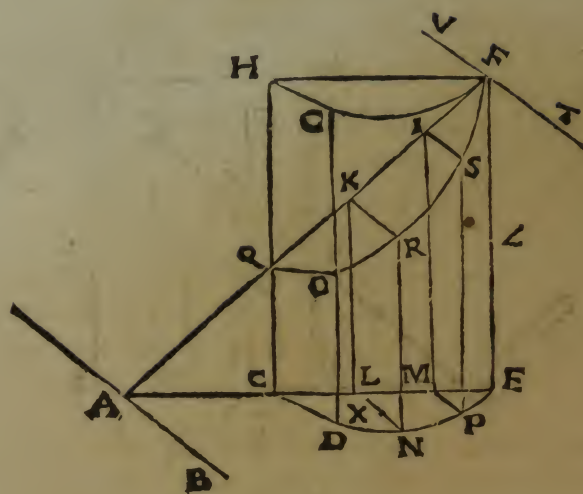


æquidistantem limiti, AB , & ab eo remotiorem, extendatur indefinitè planum, quod in plano parallelogrammi, HE , faciat rectam, AQF , & in solido gignat figuram, QOF , per quam cylindricus, HED , secabitur in duo frustra, vnum inferius, $QOFEDC$, alterum superius, $HGFOQ$, quæ trunci appellati sunt. Dico ergo figuram, CDE , esse proportionaliter analogam in gravitate inferiori trunco, $QOFEDC$. Ducantur enim intra cylindricum, HED , quocunque plana æquidistantia transeunt per, VT , FE , & subinde & limiti, AB , & inter se parallela, ac efficientia in trunco, $QOFEDC$, figuras, $ISPM$, $KRNL$, quæ erunt parallelogramma æquiangula, quia, PM , SI , æquidistant ipsi, VT , & idè sunt inter se parallelæ. Similiter, SP , IM , sunt eidem, FE , parallelæ, & idè etiam inter se erunt parallelæ; quapropter, SM , erit parallelogrammum. Eodem modo constabit, RL , esse parallelogrammum, & prædicto æquiangulum. His præmissis, quoniam gravitas rectæ, MP , ad gravitatem rectæ, LN , habet rationem compositam ex ratione gravitatis, MP , ad gravitatem rectæ eidem, MP , æqualis sumptæ in, LN , quæ sit, LX , idè ex ratione, MA , ad, AL , & ex ratione gravitatis, LX , ad gravitatem, LN , idè

16. Vnd. Elem.

10. Vnd. Elem.

Def. 9.



1. huius.

23. Sexti

Elem.

1. huius.

idest ex ratione, LX , seu, MP , ad, LN , quia, LN , supponitur in seipsa vniformiter grauis. Duæ autem rationes, MA , ad, AL , siue (ob similitudinem triangulorum, IAM , KAL ,) ipsius, IM , ad, KL , &, MP , ad, LN , componunt rationem parallelogrammi, SM , ad sibi parallelogrammum æquiangulum, RL , & subinde grauitatis, SM , ad grauitatem, RL , nam truncus, $QOFEDC$, supponitur vniformiter grauis. Ergo grauitas, MP , ad grauitatem, LN , est vt grauitas, SM , ad grauitatem, RL , & sic in cæteris. Et proindè figura, CDE , difformiter grauis, & truncus, $QOFEDC$, vnif. grauis sunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate.

Casum prætermisimus quando limes transit per verticem, C , cum ex præallato facile intelligi possit, tunc enim planum secans ducitur per, C , &, VT , ac figura, CDE , quæ tunc supponitur difformiter grauis iuxta dictum litem, ostendetur eodem modo ipsi facto trunco, $CDEF$, esse proportionaliter analogæ in grauitate.

Quod verò probatum est de exposita semifigura, CDE , idem eodem modo ostendetur de reliqua semifigura, quæ subintelligitur esse ad aliam partem axis, CE , nempe eam esse

esse proportionaliter analogam in gravitate semicylindric trunco, qui erit portio integri cylindrici super basim integrâ figuram constituti. Ex quo patebit integram figuram circa diametrum, CB, esse proportionaliter analogam in gravitate trunco eiusdem inferiori uniformiter graui, resecto eodem plano per, AF, VT, transcunte.

C O R O L L A R I V M.

Colligitur ex demonstratis centrum gravitatis planâ figurâ 9. huius. propositâ, & sui trunci, æqualiter abesse à vertice, C, seu à limite, A. Vnde si trunci habeatur centrum gravitatis, innotescet quoque centrum gravitatis propositæ planâ figurâ, illud 8. huius. enim erit quoque in diametris figurâ. E contra si detur centrū gravitatis planâ figurâ, notum evadet centrum gravitatis sui trunci; erit enim quoque in rectâ, AZ, (si duceretur,) bissecante rectam, FE, quia in ea reperiuntur centra gravitatis parallelogrammorum, quorum dimidia sunt, SM, RL, & reliquorum huiusmodi quorumcumque, eadem enim, AZ, bissecaret eorum diametros, KL, IM, &c. cum æquidistant ipsi, FE. Ergo notum erit centrum gravitatis dicti trunci.

Porrò his præmissis nunc iterum accedemus ad inuestiganda per hanc rationem inuenta superius centra planarū figurarum, & postmodum alia, quæ supersunt in insignioribus planis, & solidis figuris. plura brevitatis causa, resecantes, ac in aliud commodius tempus differentes.

P R O P O S I T I O XXIII.

Si parallelogrammum, triangulum, prædictaq; trilinea exponantur, quæ sint in prima specie difformiter graua, iuxta limitem rectam lineam eorum basibus parallelam per verticem ductam: centrum gravitatis eorundem ita secabit diametrum, ut pars ad verticem sit ad reliquam in parallelogrammo, ut 2. ad 1. in triangulo, ut 3. ad 1

B b b

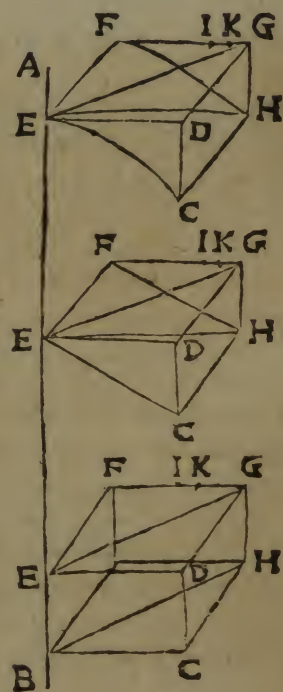
in tri-

in trilineo quadratico, vt 4. ad 1. in cubico vt 5. ad 1.

& sic deinceps antecedente semper unitate aucto, & retenta pro consequente ipsa unitate.

Sint parallelogrammum, triāgulum, & trilineum quadraticum, quorum tamen medietates tantum exhibemus, EDC, circa diametrum, ED, eaque in prima specie difformiter grauiam iuxta limitem rectam, AB, eorum basibus, CD, parallelam per verticem, E, ductam. Dico centrum grauitatis eorundem secare diametrum, ED, vt propositum est. Sint enim in ipsis constituti cylindrici quicunque, FCD, vni-formiter graues, quorum oppositæ bases, FGH, transeatq; planū per, E, & GH, secans cylindricū in duos truncos, EGHCD, inferiorem, & EFGH, superiorem. Igitur per Cor. ant. æqualiter distabunt à limite, AB, seu vertice, E, centrum grauitatis duplæ figuræ, EDC, & dupli dicti trunci inferioris, quod sic obtinebitur.

Quoniam ex Cor. pr. Prop. 19. nota sunt centra grauitatis figurarum, EDC, duplicatarum, tāquam vni-formiter grauiū: siquidem in parallelogrammo centrum grauitatis secat diametrum, ED, per æqualia, in triangulo pars ad verticem est reliquæ dupla, in trilineo quadratico tripla, &c. ideò si in parallelogrammo biffecetur, FG, in, I, in triangulo verò fiat, FI, ad, IG, vt 2. ad 1. in trilineo, vt 3. ad 1. erunt puncta, I, centra æquilibrij duplicatorum cylindricorum, FED. At per Prop. ant. si fiat vt, FG, ad, GI, ita, FK, ad, KG, erit, K, centrum æquilibrij dupli trunci, EGHCD, & subinde figuræ,

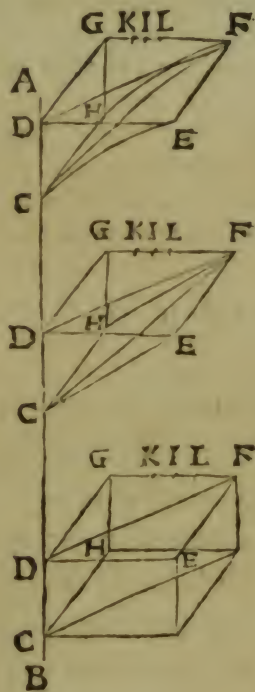


ra, FGH, vel, EDC, duplicata. Est verò illius centrū grauitatis in diametro, ED. Ergo centrum grauitatis parallelogrammi dupli, EC, ita secat eius diametrum vt pars ad verticem sit ad reliquam sicut 2. ad 1. in triangulo vt 3. ad 1. in trilineo quadratico vt 4. ad 1. & sic in cubico vt 5. ad 1. &c. Quod ostendendum proponebatur.

PROPOSITIO XXIV.

In iisdem figuris Prop. ant. sed in prima specie iuxta limitē basim difformiter grauis centrum grauitatis ita secat diametrum, vt pars ad verticem sit ad reliquam, in parallelogrammo sicuti 1. ad 2. in triangulo, vt 2. ad 2. in trilineo quadratico, vt 3. ad 2. in cubico, vt 4. ad 2. & sic deinceps antecedente semper aucto unitate, & retento binario pro consequente.

Sint expositæ eadem figuræ, sed basibus, DC, limitē, AB, applicatæ, iuxta quam, AB, sint in prima specie difformiter graues Dico centrum grauitatis eorundem secare diametrum, ED, vt propositum est. Sint. n. rursus in iisdem constituti cylindrici, FC, vniiformiter graues, qui secantur planis per bases, DC, & per, F, ductis, in truncum inferiorem, FDCE, & superiorem, FGHCD. Igitur per Cor. Prop. 22. æqualiter distabunt à limitibus, DC, centrum grauitatis



Bbb 2

duplæ

Cor. 1.
19. huius.

duplæ figuræ, EDC, & dupli dicti trunci inferioris, quod sic obtinebitur. Iam constat centrum grauitatis earūdem figurarum tanquam vniformiter grauium, & subinde constat punctum, I, veluti in Prop. ant. centrum æquilibrij dupli cylindrici, FC, scilicet in parallelogrammo est, FI, ad, IG, vt 1. ad 1. in triangulo vt 2. ad 1. in trilineo quadratico vt 3. ad 1. &c. At per Prop. 21. superiorem si fiat vt, FI, ad duplam, IG, ita, FL, ad, LG, erit, L, centrum æquilibrij dupli trunci, FDCE, inferioris, & subinde figuræ, FGH, vel, EDC, duplicatæ. Est verò etiam in diametro, DE. Ergo centrum grauitatis parallelogrammi dupli, CE, ita secat eius diametrum vt pars ad verticem, E, sit ad reliquā vt 1. ad 2. in triangulo vt 2. ad 2. in trilineo quadratico vt 3. ad 2. in cubico vt 4. ad 2. &c. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I V M.

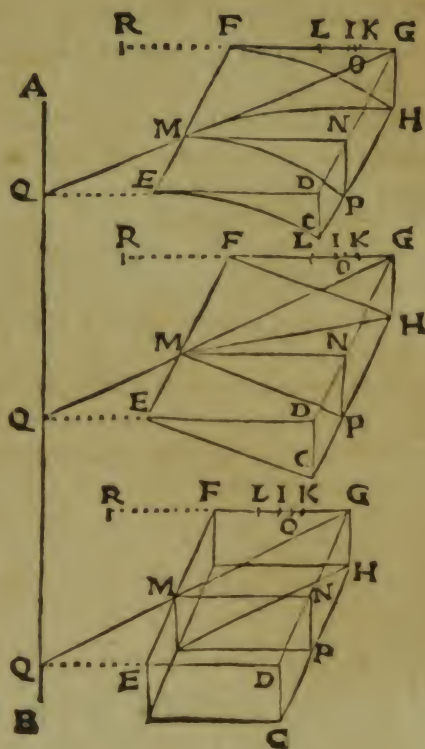
EX hac, & ant. Prop. patent quoque centra æquilibrij truncorum in dictis cylindricis constitutorū, quæ sunt eadem puncta, K, L: nempe, K, trunci maioris dupli, FHCDG, & L, trunci minoris dupli, FECD.

P R O P O S I T I O XXV.

In iisdem figuris, sed in prima specie difformiter grauib; iuxta limitem rectam ultra verticem basi parallelam; centrum grauitatis diuidit in parallelogrammo sextam partem diametri, ordine tertiam à basi, ita vt pars versus basim sit ad reliquam, vt dupla limitaris (sic liceat appellare reliquam diametri productæ vsq; ad limitem) ad diametrum. In triangulo secat duodecimam partem diametri, ordine quartam à basi ita vt pars ad basim sit ad reliquam, sicuti sexquialtera limitaris ad diametrum. In trilineo quadratico diuidit vigesimam partem ordine quin-

De usu Ind. in vnif. diffor. grauibus. 381
 quintam, ita vt pars ad basim sit ad reliquam, sicuti sex
 quertia limitaris ad diametrum. Et sic deinceps in re-
 liquis trilineis simili seruatō processu.

Sint eēdem semi-
 figuræ, EDC,
 in prima specie dif-
 formiter graues iu-
 xta limitem rectā,
 AB, vltra verticē,
 E, basi, DC, paral-
 lelam. Dico earū-
 dem duplicatarum
 centrum grauitatis
 ita secare præfatas
 diametri partes, vt
 dictum est. Sint in
 iisdem cōstituti cy-
 lindrici vniformi-
 ter graues, FCD,
 & producta diame-
 tro, DE, vsque ad
 limitem, AB, in, Q,
 fiat, QE, quam vo-
 co limitarē: exten-
 datur quoque in
 definite planū per,
 AB, & oppositæ ba-
 sis, FGH, basim,
 GH, secans cylin-



drum, FC, in duos truncos, nempè superiorem, FGHM, &
 inferiorem, GHMECD, traductoq; plano, MNP, per, M,
 oppositis basibus æquidistante, fiant cylindrici, FGHMPN,
 PMNDCE. Notentur quoque in diametro, FG, tria pun-
 cta, I, K, L, vt in Prop. duabus ant. effectum est. Erit ergo,
 I, centrum grauitatis figuræ, cuius dimidia, FGH, tanquam
 vniformiter grauis, & insuper centrū æquilibrij cylindrici,
 cuius

cuius medietas, FC. Sic &, K, erit centrum æquilibrium
 dupli trunci, GMPN, &, L, dupli trunci, GHMF.
 Insuper se extendatur, GF, in, R, ita ut, FR, sit
 æqualis limitari, EQ, erit, RI, ad, IG, ut truncus, GHMECD,
 ad truncum, FGHM. Si ergo fiat ut, RI, ad, IG, ita, LI, ad,
 IO, erit, LI, ad, IO, ut dictus truncus inferior ad superiorem.
 Sed, L, est centrum æquilibrium dupli trunci, GHFM, &, I,
 dupli cylindrici, FCD, ergo, O, erit centrum æquilibrium du-
 pli trunci, GHMECD, & subinde centrum grauitatis duplæ
 figuræ, FGH, difformiter grauis. Quod autem, O, cadat inter
 puncta, I, K, patet quia, I, est centrum æquilibrium dupli cy-
 lindrici, MNPCED, &, K, dupli trunci, MGHPN, unde
 centrum æquilibrium totius dupli trunci, GHMECD, nempe,
 O, cadet inter, I, K. Rursus quia truncus, MGHPN, ad
 truncum, GHMF, est ut, FI, ad, IG, & pariter, ut, LI, ad,
 IK, cum, L, I, K, sint centra æquilibrium duplorum trunci,
 FMHG, cylindrici, FC, & trunci, MGHPN. Ideò erit ut,
 FI, ad, IG, ita, LI, ad, IK, unde erit, LI, eadem pars ipsius,
 FI, ac, IK, ipsius, IG, & hæc omnia in omnibus hisce figuris
 vera sunt; nunc ergo eas singillatim examinemus incipientes
 à parallelogrammo, FGH. In eo igitur est, IG, medietas ip-
 sius, FG, &, KG, tertia pars, ergo, IK, earum differentia erit
 sexta pars eiusdem, FG, & ordine tertia à basi, GH. Quoniã
 ergo factum est ut, RI, ad, IG, ita, LI, ad, IO, erit permutando,
 RI, ad, IL, ut, GI, ad, IO, & antecedentium sub tripla, hoc
 est erit $\frac{1}{3}$, RF, cum $\frac{1}{3}$, FI, ad, LI, ita $\frac{1}{3}$, IG, ad, IO. Sed, IK,
 est $\frac{1}{3}$, IG, &, LI, $\frac{1}{3}$, FI, eadem pars nempe ac, KI, ipsius, IG,
 per hic ostensa. Ergo erit $\frac{1}{3}$, RF, cum, LI, ad, LI, ut, KI, ad, IO,
 & diuidendo, erit $\frac{1}{3}$, RF, ad, LI, ut, KO, ad, OI. Sed ut $\frac{1}{3}$,
 RF, ad, LI, ita eorum sexcupla, nempe ita $\frac{2}{3}$, seu dupla, RF,
 ad sexcuplam ipsius, LI, scilicet ad diametrum, FG, est enim,
 LI, differentia inter medietatem, FI, ipsius, FG, &, FL, quæ
 est $\frac{1}{3}$, eiusdem, FG, & subinde est, LI, sexta pars ipsius, FG.
 Probauimus ergo in parallelogrammo centrum grauitatis, O,
 ita secare, IK, sextâ partē ipsius, FG, & ordine tertiâ à basi,
 GH, ut, KO, ad, OI, sit veluti dupla, RF, ad, FG, quod & pro
 dupla figura, EDC, verificatur.

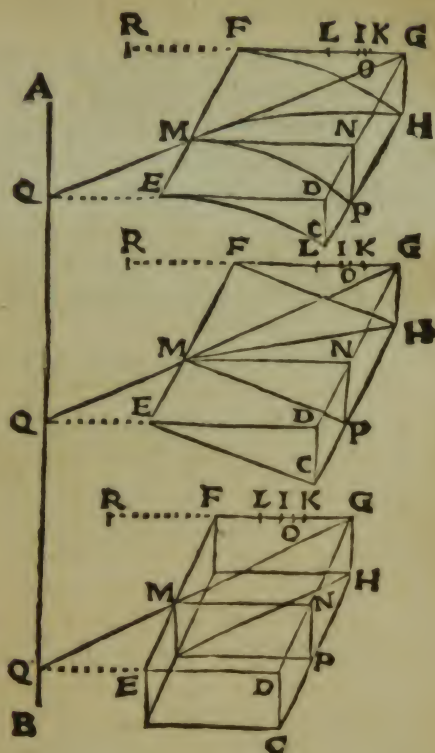
In

In triângulo ve-
rò, FGH, cum sit,
RI, ad, IG, vt, LI,
ad, IO, erit permu-
tando, RI, ad, LI,
vt, IG, ad IO, & an-
tecedentiũ subqua-
drupla, nempè erit
 $\frac{1}{4}$, RF, cum $\frac{1}{4}$, FI,
nempè cũ, LI, ad,
LI, ita $\frac{1}{4}$, IG, nēpè,
IK, ad, IO. Et di-
uidēdo erit $\frac{1}{4}$, RF,
ad, LI, vt, KO, ad,
OI. At vt $\frac{1}{4}$, RF, ad,
LI, ita, sexcuplatis
terminis, est sex-
quialtera, RF, ad,
FG, quia, LI, diffe-
rentia inter, FL,
mediatatem, & FI,
 $\frac{2}{3}$, FG, est $\frac{1}{3}$, ipsius,
FG. Ergo, O, secar,
KI, duodecimā par-
tē ipsius, FG, (cum
sit differētia inter,

IG, $\frac{1}{3}$, & KG, $\frac{1}{3}$ ipsius, FG,) ordine quartam à basi, GH, ita
vt sit, KO, ad, OI, sicuti sexquialtera, RF, ad ipsam, FG.

Sic in trilineo quadratico est, IK, differentia inter, IG, $\frac{1}{4}$,
& KG, $\frac{1}{4}$ ipsius, FG, $\frac{1}{5}$, & ordine quinta à basi, ostēditurq;
KI, ad, IO, esse vt $\frac{1}{4}$, RF, cum $\frac{1}{4}$, FI, hoc est cum, LI, ad ipsam,
LI, & diuidendo probatur, KO, ad, OI, esse vt $\frac{1}{4}$, RF, ad, LI,
seu quintuplicatis terminis, vt RF, ad, FI. Et quia, GF, est
sexquitercia, FI, ideò vt, RF, ad, FI, vel, KO, ad, OI, ita erit
sexquitercia ipsius, RF, ad, FG.

In Trilineo pariter cubico erit, IK, pars trigesima, nempè
differentia inter, IG, $\frac{1}{5}$, & KG, $\frac{1}{5}$ ipsius, FG, ac ordi-
ne sexta à basi, GH, & LI, $\frac{1}{6}$ ipsius, IF, & vt, KO,
ad,



ad, OI, sic ostendetur esse, RF, ad, FI, & ita sexquiquarta ipsius, RF, ad, FG, quia, FG, est sexquiquarta ipsius, FI.

In reliquis erit ordinatè, IK, ipsius, FG, pars quadragesima secunda, ordine septima à basi; quinquagesima sexta, ordine octava, septuagesima secunda, ordine nona, addendo semper in ordine unitatem, & in partibus præcedentem excessum per binarium augendo. Similiter in subsequen- tibus subsumemus ipsius, RF, sexquiquintam, sexquiseptimam, sexquiseptimam, & sic deinceps iuxta reliquas proportionis super particularis species ordinatim subsequentes.

S C H O L I U M.

IN triangulo, EDC, seu, FGH, reperitur quoque hoc modo proportio; nempe, O, ita secatur, FG, ut sit, FO, ad, OG, sicuti quatuor limitares, RF, cum tribus diametris, FG, ad duas limitares, RF, cum diametro, FG; quemadmodum experienti manifestum erit.

P R O P O S I T I O XXVI.

In iisdem figuris, sed in prima specie difformiter grauib; iuxta limitem rectam basi parallelam, & ultra ipsam ductam; centrum gravitatis dividit in parallelogrammo sextam partem diametri post $\frac{3}{5}$ eiusdem à basi numeratas hoc est ordine quartam, ita ut pars versus verticem sit ad reliquam, sicuti dupla limitaris ad diametrum. In triangulo ita secatur $\frac{7}{12}$ diametri post $\frac{4}{12}$ à basi numeratas, ut pars versus verticem sit ad reliquam, veluti tripla limitaris ad diametrum. In trilineo quadrato ita secatur $\frac{3}{5}$ diametri post $\frac{2}{5}$ à basi numeratas, ut pars versus verticem sit ad reliquam, veluti quadrupla limitaris.

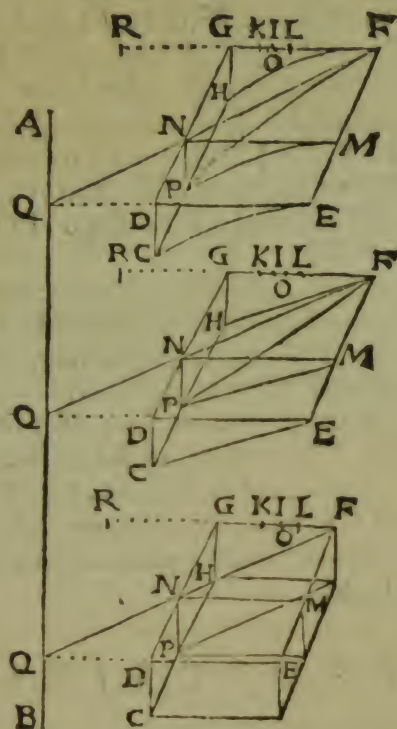
De usu Ind. in univ. differ. gravibus. 385
 taris ad diametrum. Et sic in reliquis trilineis simili
 servato processu.

IN iisdem superi-
 oribus figuris
 eadem constructa
 supponemus, at ba-
 sis, CD, sit obversa
 limiti, AB, ipsi pa-
 rallelo, transeatq;
 planum secans per,
 AB, & verticem, E.
 Quoad parallelo-
 gramum ergo de-
 monstratio non erit
 alia à superiori.

In triangulo ve-
 rò sic propositum
 ostendemus. Erit
 itaque, RI, ad, IF, vt
 truncus inferior ad
 superiorem, quod
 si fiat vt hic ad il-
 lum, ita, KI, ad, IO,
 ostēdetur, O, vt in
 Prop. ant. esse cen-
 trum æquilibrij tā
 dupli trunci, FEC

PND, quam duplæ figuræ, GFH, illudq; cadere inter, I, L,
 puncta. Porro cum, KI, in eadem probata sit esse in paral-
 lelogrammo $\frac{1}{2}$ ipsius, GF, in triangulo $\frac{1}{4}$ in trilineo q. $\frac{1}{2}$, in
 cubico $\frac{1}{8}$, in quadratoq; $\frac{1}{4}$, &c. sitq; vt, GI, ad, IF, ita, KI,
 ad, IL, quia illæ sunt vt trunci, FMPN, FGPNH, & GI, æqualis
 ipsi, IF, in parallelogrammo, in triāgulo verò sit, GI, $\frac{1}{2}$ ipsius,
 IF, in trilineo q. $\frac{1}{2}$, in cubico $\frac{1}{8}$ in q. $\frac{1}{4}$ &c. eiusdem, IF, paret in
 parallelogrammo, IL, esse $\frac{1}{2}$ & GI, $\frac{1}{2}$ à basi, GH, numeratas.
 Sic in triangulo erit, IL, $\frac{1}{4}$ post, GI, $\frac{1}{4}$ ipsius, GF, numeratas
 à basi, GH. In trilineo q. erit, IL, tripla ipsius, IK, $\frac{1}{2}$ GF,

Ccc post,



18. huius.

17. huius.

post, $GI, \frac{1}{2}$, eiusdem, GF . In cubico erit, IL , quadrupla, KI , post, GF , post, $\frac{1}{2}$ à basi, GH , numeratas, & sic deinceps in reliquis trilineis. Nunc ostendendum in triangulo remanet, LO , ad, OI , esse vt tripla, RG , ad, GF , quod sic probatur. Cum enim, RI , ad, IF , sit vt, KI , ad, IO , permutando, erit, RI , ad, IK , vt, FI , ad, IO . Est autem, IL , $\frac{1}{2}$ ipsius, IF , sicuti, KI , est $\frac{1}{2}$ ipsius, IG . Ergo erit vt $\frac{1}{2}$, RI , hoc est vt $\frac{1}{2}$, RG , cum, KI , ad, KI , ita, LI , ad, IO , & diuidendo vt $\frac{1}{2}$, RG , ad, KI , ita erit, LO , ad, OI . Sed vt $\frac{1}{2}$, RG , ad, KI , ita eorum quadrupla, scilicet ita, RG , ad, GI , & vt, RG , ad, GI , ita tripla, RG , ad, GF , quia, GF , est tripla, GI . Ergo, LO , ad, OI , est vt tripla, RG , ad, GF .

In trilineo q. est, IL , $\frac{1}{2}$, IF , probaturque, LI , ad, IO , esse vt $\frac{1}{2}$, RG , cum, KI , ad, KI , & diuidendo, LO , ad, OI , vt $\frac{1}{2}$, RG , ad, KI , vel vt, RG , ad, GI , seu denique vt quadrupla, RG , ad, GF , quia, GF , est quadrupla, GI .

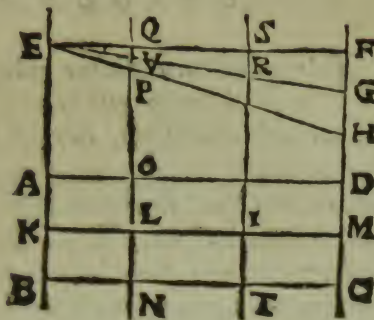
In cubico pariter est, LI , $\frac{1}{2}$, IF , probaturque, LI , ad, IO , esse vt $\frac{1}{2}$, RG , cum, KI , ad, KI , & diuidendo, LO , ad, OI , vt $\frac{1}{2}$, RG , ad, KI , vel vt, RG , ad, GI , & subinde vt quintupla, RG , ad, GF , quia, GF , est quintupla, GI . Hac arte in reliquis trilineis similis proportionis progressio colligetur. Quod, &c.

PROPOSITIO XXVII.

Cuiuscunque parallelogrammi, vel trianguli, in quacunque specie difformiter grauis, iuxta litem rectam basi parallelam per verticem transeuntem, centrum grauitatis exhibere.

EXponatur denuo Schema Propositionis XI. huius, in quo limes sit, AB , æquidistans basibus, CD , parallelogrammi, & HF , trianguli, cæteris, vt ibidem constructis. Quod ergo, KI , sit dupla, IM , dum, AC , supponitur in prima specie difformiter graue, probabitur præcisè vt ibidem. At si concipiatur, AC , tanquam diffor-

difformiter graue in secūda specie, tunc sic discutemus. Grauitas, CD, ad grauitatem, NO, erit vt q. MK, ad q. KL, hoc est (si circa diametrum, KM, in basi, DC, supponatur trilineū quadraticū vniformiter graue) vt in eodem ad, KM, applicatæ in punctis, M, L, & subinde vt ipsarum applicatarum grauitates.



Def. 13.

Ergo, AC, erit proportionaliter analogum in grauitate præfato trilineo quadratico. Sed eius centrum grauitatis vt, I, facit, KI, triplam, ipsius, IM. Ergo, I, erit quoque centrū grauitatis parallelæ grammæ, AC, difformiter grauis in secunda specie, faciens, KI, triplam, IM. Sic ostendemus in tertia specie, quarta, quinta, &c. Fieri, KI, quadruplam, quintuplam, sextuplam, &c. ipsius, IM.

Cor. 1.
19. huius.

Pari ratione si supponamus triangulum, EFH, in prima specie diffor. graue, ostendemus more solito grauitatem, FH, ad, grauitatem, QP, habere rationem compositam ex ratione, FE, ad, EQ, & ex ratione, HF, ad, PQ, nempe grau. FH, ad grau. QP, esse vt q. FE, ad q. EQ, hoc est vt applicatæ in trilineo quadratico per puncta, E, Q, & vt earum grauitates, si ipsum intelligamus esse vniform. graue. Ergo æquæ aberunt à vertice, E, eorum cētra grauitatis, quia erunt proportionaliter analogæ in grauitate. Est autem centrum grauitatis trianguli, EFH, pariter in diametro, EG, ergo erit in, R, vbi fit, ER, tripla, RG.

9. huius.

Quod si supposuerimus triangulum, EFH, diff. graue in secunda specie, ostēdemus ipsum esse proportionaliter analogum in grauitate trilineo cubico, & subinde, ER, esse quadruplam, RG. Sic probabimus in tertia specie esse quintuplam, in quarta sextuplam, &c.

Cor. 1. 19
huius.

COROLLARIUM.

Hic potest vniuersalius colligi de cylindricis circa axim, KM , diffor. grauibus, nempe in quacunque specie, limite, EB , quod in dicta Prop in prima specie tantum inferebatur. Immo si in basi, AC , fuerint quoque cylindrici diffor. graues in quacunque specie, iuxta limitem, EB , seu planum ipsorum tangens, ac transiens per, EB , patefiet hinc quoque colligi eorum centra grauitatis; sunt enim in eadem distantia à limite tam cylindricorum, quam parallelogrammi, AC , centra grauitatis, & in eorum diametris. Simili modo pro conicis per viam trianguli, EFH , in quacunque specie diff. grauibus eadem centra colligemus: vt etiam haberi poterunt in parabolicis cylindricis diffor. grauibus, cum, vt sit in sequentibus fuerint parabolarum inquisita centra grauitatis; sicuti & in omnibus cylindricis in basibus figuris planis, quorum sint nota centra grauitatis, constitutis.

9. huius.

SCHOLIUM.

Ex his facile Lector intelliget cuiuscunque trilinei in quacunque specie diffor. grauis iuxta limitem per verticem transcuntem centra grauitatis haberi posse. Quae ipsi meditando relinquimus, sicut etiam eorum centra, cum fuerint vt. cumque diff. grauia iuxta limitem per basim transcuntem, vel eidem equidistanter ductum, sed extra figuram, vt ea, quae spectant ad trapezia, & alia quamplurima scitu digna: angustia enim temporis laboras & ferè semper aegritudine vexatus cogor haec in aliud tempus differre contemplanda, & nunc studiosis tantum innuere. Quapropter in quibusdam adhuc figuris tam planis, quam solidis, solum centra grauitatis meditabimur cum fuerint diffor. grauia iuxta limitem per verticem transcurrentem, ac basi parallelum. Nunc ergo à parallelogrammis, & triangulis transibimus ad centra grauitatis rimanda in parabolicis diffor. grauibus, licet tantum in prima specie difformitatis.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

In parabola lineari, quadratica, cubica, &c. in prima specie tantum diffor. graui iuxta limitem rectam basi parallelam in vertice tangentem, centra grauitatis parallelam facere.

EXponatur hic denuò Schema Propof. 21. huius, in quo fupponemus cylindricum, $E G C B A$, vnif. grauem, fed parabolam, $A B C$, vel, $E F G$, in prima fpecie diffor. grauem, limite per verticem, B , vel, F , tranfeunte. Iam conftant cētra grauitatis parabolārū linearis, quadraticæ, cubicæ, &c. ita fecare diametrum vt pars verfus verticem fit ad reliquā in lineari vt 2. ad 1. in q. vt 3. ad 2. in C , vt 4. ad 3. &c. progreflionen. q; eſſe vt in his numeris.

2	3	4	5	6	&c.
1	2	3	4	5	

Insuper manifestum est quoq; centrum grauitatis trunci inferioris, BEGA, vnif. grauis, & parabola, ABC, diffor. grauis æqualiter abesse à vertice, B. Sed illius trunci habetur centrum grauitatis, vel æquilibrj, M, si fiat, vt, FH, ad, HI, ita, FM, ad, MH. Ergo habebitur quoque centrum gr. parabola, EIG, vel, ABC. Vnde cum in parabola lineati sit, FH, ad, HI, vt 3. ad 1. erit, FM, ad, MH, vt 3. ad 1. & in quadratica, vt 5. ad 2. in cubica, vt 7. ad 3. &c. ita vt progressio stet vt in his numeris.

Ex Cor.
1. Prop.
19. huins.

Cor.
22. huius

21. huius,

Cor. 1.
19. huius.

3 5 7 9 11
1 2 3 4 5 Quod &c.

COROLLARIUM.

SI easdem parabolas supponeremus diff. graues in prima specie iuxta limitem basim: cum habeatur centrum gr. trunci superioris, EFGB, unif. grauis, & subinde parabola, EFG, in prima specie diff. grauis, limite EG, (quia si inuerteretur cylindricus, basis, & truncus fierent inferiores) faciendo ut, FL, ad duplam, LH, ita, FK, ad, KH. Manifestum est parabola, EFG, diffor. grauis in prima specie iuxta limitem, EG, centrum gr secare, FH, (ut in, K,) ita ut in parabola lineari, FK, sit ad, KH, ut 2. ad 2. in q. ut 3. ad 4. in c. ut 4. ad 6. &c. unde sic se habebit progressio.

2 3 4 5 6
2 4 6 8 10 &c.

SCHOLIUM.

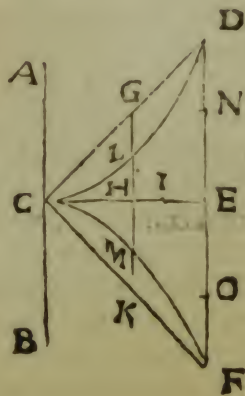
Congrueret ut earundem parabolarum necnon circuli in omni specie difformiter grauium, iuxta limitem tangentem in vertice, vel illi parallelam reperirentur centra grauitatis, ut & portionum eorundem. Hæc obtineri possunt si in ipsis, vel eorum portionibus, supponerentur constituti cylindrici, quorum diagonaliter resectorum habeantur centra grauitatis inferiorum truncorum, ut in prima specie diffor. docet nos Prop. 22. huius, cum eius Corollario. Sed quia illa nunc rimari non vacat, ideo studiosis hæc relinquemus inuestiganda, à planisque ad solida gradum facientes, primò Coni centrum grauitatis inquiremus.

PRO:

PROPOSITIO. XXIX.

Si conus quicunque supponatur primo vnif. deinde diffor. grauis, iuxta litem planum per verticem transiens, basique parallelum, nempè ordinatim in specie 1. 2. 3. 4. & c. Centrum grauitatis ita secabit illius axim, vt pars ad verticem sit reliqua tripla in vnif. graui, quadrupla in primo diffor. quintupla in secundo, sextupla in tertio, & c. & sic deinceps simili seruato processu.

Si conus, DEF, in basi circulo, DF, axi, CE, primò vnif. grauis, eiusque centrum grauitatis, I. Dico, CI, esse triplam ipsius, IE. Intelligamus quoque trilineum quadraticum vnif. CDF, graue, illudq; cum cono secari quocumque plano circulo, DF, æquidistate, ac faciente in trilineo rectam, LM, & in cono circulum, GK, æquidistantia ipsi, DF. Grauitas ergo circuli, DF, ad grauitatem circuli, GK, erit vt circulus, DF, ad circulum, GK, hoc est vt quadratum, DF, ad quadratum, GK, vel vt quadratum, EC, ad quadratum, CH, nempè vt recta, DF, ad rectam, LM, & subinde vt grauitas rectæ, DF, ad grauitatem rectæ, LM. Ergo trilineum, DCF, & conus, DCF, erunt proportionaliter analogi in grauitate, eorumque centra grauitatis æqualiter aberunt a vertice, C, & sunt in, CE. In trilineo autem, DCF, illius centrum grauitatis ita secat, CE, vt pars ad verticem, C, sit reliqua tripla. Ergo & in cono, DCF. &c.



Sup.

9. huius.
8. huius.
Cor. 1.
19. huius.

Supponamus nunc conum, DCF, diff. grauem in prima specie iuxta limitem, AB, æquidistâtem circulo, DF. Dico, si, I, supponatur illius centrū grauitatis, esse, CI, quadruplā, IE. Sit enim modò, CDF, trilineum cubicum vnif. graue & vtraque secta plano per, H, basi, DF, æquidistante, facienteq; in trilineo rectam, LM, & in cono circulum, GK. Si ergo circa, E, centrum in plano circuli,

Def. 12.
1. Geo.
Indini.

1. huius.

Def. 9.

23. Ex. 4.

9. huius.
18 19. huius.

Cot. 1.
19. huius.

DF, assumatur circulus, NO, æqualis circulo, GK, illeq; medius intelligatur inter circulos, DF, GK, erit proportio grauitatis circuli, DF, ad grauitatem circuli, GK, composita ex proportione gr. circuli, DF, ad gr. circuli, NO, scilicet ex proportione circuli, DF, ad circulum, NO, vel, GK, hoc est quadrati, DF, ad quadratum, GK, vel quadrati, EC, ad quadratum, CH; & ex proportione gr. circuli, NO, ad gr. circuli, GK, hoc est ex proportione, EC, ad, CH. Duæ rationes verò quadrati, EC, ad q. CH, & EC, ad, CH, faciunt rationem cubi, EC, ad cubum, CH. Ergo gr. circuli, DF, ad gr. circuli, GK, erit vt cubus, EC, ad cubum, CH, nempè vt recta, DF, ad rectam, LM, & vt grauitas rectæ, DF, ad gr. rectæ, LM, Sunt ergo trilineum cubicum, DCF, vnif. graue, & conus, DCF, in prima specie diff. graues, proportionaliter analogi in grauitate. Ergo, CI, erit quadrupla, IE, veluti se habet in trilineo cubico.

Eadem ratione vltius procedentes ostendemus, CI, esse quintuplam, IE, in cono, DCF, diff. graui in secunda specie, quia fit propor. analogus in grauitate trilineo qq. in quo sic diuiditur, CE, ab eius centro grauitatis. Similiter probabimus, CI, esse sextuplam, IE, in cono, DCF, diff. graui in tertia specie, quia fit propor. analogus in grauitate trilineo qc. & sic deinceps in reliquis rationem dictæ progressionis eodem modo demonstrabimus. Quod, &c.



PRO-

PROPOSITIO XXX.

Si conoides quodcumq; parabolicum supponatur primò uniformiter, deinde difformiter graue iuxta limitem planum per Verticem transiens, basiq; parallelum, nempe ordinatum in specie 1. 2. 3. 4. & c. Centrum grauitatis ita secabit illius axim, ut pars ad Verticem sit reliqua dupla in Uniformiter graui, tripla in primo aifformi, quadrupla in secundo, quintupla in tercio, & c. & sic deinceps simili seriuato processu.

20.1. Con.

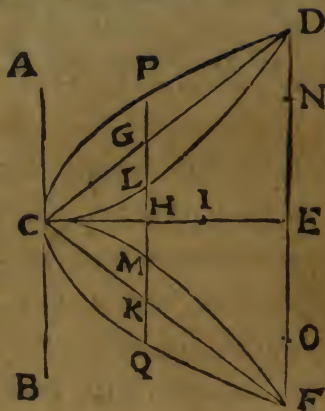
D ă d

Sir

Sit enim trilineū quadraticum, $DLCMF$, in quo plano per, H , ducto facta sit, LM , parallela ipsi, DF , & sumatur in, DF , circa, E , centrum circulus, NO , æqualis circulo, PQ . Erit ergo ratio gr. circuli, DF , ad gr. circuli, PQ , composita ex ratione gr. circuli, DF , ad gr. circuli, NO , sc. ex ratione circuli, DF , ad circulum, NO , vel, PQ , vel q. DF , ad q. PG , hoc est, EC , ad, CH ; & ex ratione gr. circuli, NO , ad gr. circuli, PQ , scilicet ex hypotesi ex ratione, EC , ad, CH . Duæ rationes verò, EC , ad, CH , faciunt rationem q. EC , ad q. CH , vel rectæ, DF , ad rectam, LM , vel gravitatis earundem rectarum. Ergo Conoides, & triangulum dictum erunt propor. analoga in gravitate. Quare erit, CI , tripla, IE .

1. huius.

Def. 9.

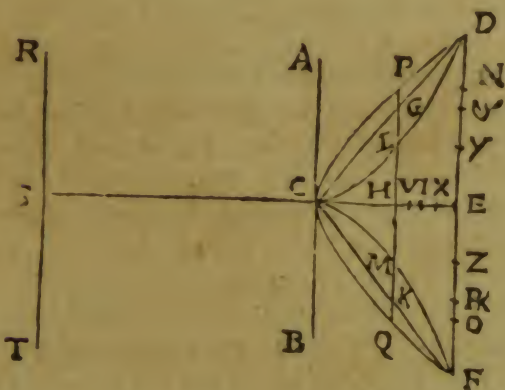
23. Exer.
4.

Eodem modo in conoide difformiter graui in secunda specie, vtentes trilineo cubico, ostendemus, CI , esse quadruplam, IE . Et sic in 3. 4. 5. specie, &c. procedentes vt in Prop. ant. effectum est, per subsequencia trilinea propositum verificari ostendemus. Quod, &c.

PROPOSITIO XXXI.

Si conoides quodcunq; hyperbolicum supponatur primò uniformiter, deinde difformiter graue iuxta limitem planum per verticem transiens, basi; parallelum, nempe ordinatum in specie 1. 2. 3. 4. 5. &c. Centrum gravitatis ita secabit illius axis partem duodecimam ordine quartam à basi, vt pars versus basim sit ad reliquam veluti sexquialtera lateris transfuerfi hyperbola, que conoi-

D
 N
 -E
 -S
 -F
 EC
 prior
 vel
 co-
 quart
 mundi
 de mo-
 rali et
 quibus
 C.
 in co-
 muni
 p. 10
 p. 11
 p. 12
 p. 13
 p. 14
 p. 15
 p. 16
 p. 17
 p. 18
 p. 19
 p. 20
 p. 21
 p. 22
 p. 23
 p. 24
 p. 25
 p. 26
 p. 27
 p. 28
 p. 29
 p. 30
 p. 31
 p. 32
 p. 33
 p. 34
 p. 35
 p. 36
 p. 37
 p. 38
 p. 39
 p. 40
 p. 41
 p. 42
 p. 43
 p. 44
 p. 45
 p. 46
 p. 47
 p. 48
 p. 49
 p. 50
 p. 51
 p. 52
 p. 53
 p. 54
 p. 55
 p. 56
 p. 57
 p. 58
 p. 59
 p. 60
 p. 61
 p. 62
 p. 63
 p. 64
 p. 65
 p. 66
 p. 67
 p. 68
 p. 69
 p. 70
 p. 71
 p. 72
 p. 73
 p. 74
 p. 75
 p. 76
 p. 77
 p. 78
 p. 79
 p. 80
 p. 81
 p. 82
 p. 83
 p. 84
 p. 85
 p. 86
 p. 87
 p. 88
 p. 89
 p. 90
 p. 91
 p. 92
 p. 93
 p. 94
 p. 95
 p. 96
 p. 97
 p. 98
 p. 99
 p. 100
 p. 101
 p. 102
 p. 103
 p. 104
 p. 105
 p. 106
 p. 107
 p. 108
 p. 109
 p. 110
 p. 111
 p. 112
 p. 113
 p. 114
 p. 115
 p. 116
 p. 117
 p. 118
 p. 119
 p. 120
 p. 121
 p. 122
 p. 123
 p. 124
 p. 125
 p. 126
 p. 127
 p. 128
 p. 129
 p. 130
 p. 131
 p. 132
 p. 133
 p. 134
 p. 135
 p. 136
 p. 137
 p. 138
 p. 139
 p. 140
 p. 141
 p. 142
 p. 143
 p. 144
 p. 145
 p. 146
 p. 147
 p. 148
 p. 149
 p. 150
 p. 151
 p. 152
 p. 153
 p. 154
 p. 155
 p. 156
 p. 157
 p. 158
 p. 159
 p. 160
 p. 161
 p. 162
 p. 163
 p. 164
 p. 165
 p. 166
 p. 167
 p. 168
 p. 169
 p. 170
 p. 171
 p. 172
 p. 173
 p. 174
 p. 175
 p. 176
 p. 177
 p. 178
 p. 179
 p. 180
 p. 181
 p. 182
 p. 183
 p. 184
 p. 185
 p. 186
 p. 187
 p. 188
 p. 189
 p. 190
 p. 191
 p. 192
 p. 193
 p. 194
 p. 195
 p. 196
 p. 197
 p. 198
 p. 199
 p. 200
 p. 201
 p. 202
 p. 203
 p. 204
 p. 205
 p. 206
 p. 207
 p. 208
 p. 209
 p. 210
 p. 211
 p. 212
 p. 213
 p. 214
 p. 215
 p. 216
 p. 217
 p. 218
 p. 219
 p. 220
 p. 221
 p. 222
 p. 223
 p. 224
 p. 225
 p. 226
 p. 227
 p. 228
 p. 229
 p. 230
 p. 231
 p. 232
 p. 233
 p. 234
 p. 235
 p. 236
 p. 237
 p. 238
 p. 239
 p. 240
 p. 241
 p. 242
 p. 243
 p. 244
 p. 245
 p. 246
 p. 247
 p. 248
 p. 249
 p. 250
 p. 251
 p. 252
 p. 253
 p. 254
 p. 255
 p. 256
 p. 257
 p. 258
 p. 259
 p. 260
 p. 261
 p. 262
 p. 263
 p. 264
 p. 265
 p. 266
 p. 267
 p. 268
 p. 269
 p. 270
 p. 271
 p. 272
 p. 273
 p. 274
 p. 275
 p. 276
 p. 277
 p. 278
 p. 279
 p. 280
 p. 281
 p. 282
 p. 283
 p. 284
 p. 285
 p. 286
 p. 287
 p. 288
 p. 289
 p. 290
 p. 291
 p. 292
 p. 293
 p. 294
 p. 295
 p. 296
 p. 297
 p. 298
 p. 299
 p. 300
 p. 301
 p. 302
 p. 303
 p. 304
 p. 305
 p. 306
 p. 307
 p. 308
 p. 309
 p. 310
 p. 311
 p. 312
 p. 313
 p. 314
 p. 315
 p. 316
 p. 317
 p. 318
 p. 319
 p. 320
 p. 321
 p. 322
 p. 323
 p. 324
 p. 325
 p. 326
 p. 327
 p. 328
 p. 329
 p. 330
 p. 331
 p. 332
 p. 333
 p. 334
 p. 335
 p. 336
 p. 337
 p. 338
 p. 339
 p. 340
 p. 341
 p. 342
 p. 343
 p. 344
 p. 345
 p. 346
 p. 347
 p. 348
 p. 349
 p. 350
 p. 351
 p. 352
 p. 353
 p. 354
 p. 355
 p. 356
 p. 357
 p. 358
 p. 359
 p. 360
 p. 361
 p. 362
 p. 363
 p. 364
 p. 365
 p. 366
 p. 367
 p. 368
 p. 369
 p. 370
 p. 371
 p. 372
 p. 373
 p. 374
 p. 375
 p. 376
 p. 377
 p. 378
 p. 379
 p. 380
 p. 381
 p. 382
 p. 383
 p. 384
 p. 385
 p. 386
 p. 387
 p. 388
 p. 389
 p. 390
 p. 391
 p. 392
 p. 393
 p. 394
 p. 395
 p. 396
 p. 397
 p. 398
 p. 399
 p. 400
 p. 401
 p. 402
 p. 403
 p. 404
 p. 405
 p. 406
 p. 407
 p. 408
 p. 409
 p. 410
 p. 411
 p. 412
 p. 413
 p. 414
 p. 415
 p. 416
 p. 417
 p



卷之四

ipe-

ac triangulum inter se proportionaliter analoga in grauitate, communeque habebunt, I, centrum grauitatis. Sed in triangulo illud secat, VX, ita vt, XI, ad, IV, sit vt sexquialtera limitaris, SC, ad, CE. Ergo & in conoide, DCF, ipsum, I, sic diuidet, VX, vt sit, XI, ad, IV, veluti sexquialtera lateris transversi, SC, ad axem conoidis, CE.

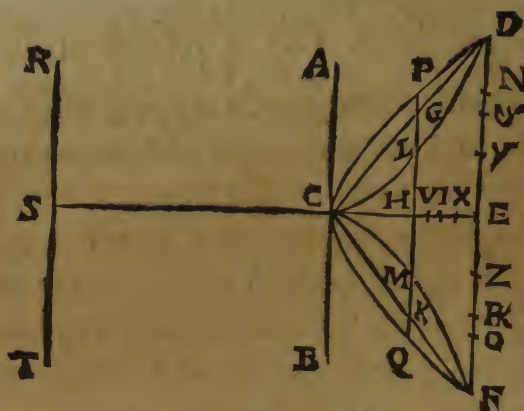
9. huius.

25. huius.

Sit nunc conoides, DCF, in prima specie difformiter graue iuxta limitem, ACB, per, C, ipsi, DF, æquidistanter transcurrentem, &, VR, pars vigesima, CE, ordine quinta à basi, DF, secata à centro gr. conoidis, I. Dico, XI, ad, IV, esse vt sexquiertia, SC, ad, CE. Fiat trilineum quadraticum, DLCMF, in prima specie difformiter graue iuxta limitem, RST, in quo ducto plano effecta fuerit recta, LM, parallela, DF, cui sumatur æqualis, YZ, sicut, & circulo, PQ, æqualis circulus, NO. Ostendemus ergo grauitatem circuli, DF, ad grauitatem circuli, PQ, habere rationem compositam ex ratione gr. circuli, DF, ad grauitatem circuli, NO, hoc est ex ratione circuli, DF, ad circulum, NO, vel, QP, seu q. DF, ad q. PQ, hoc est rectanguli, SVC, ad rectangulum, SHC; & ex ratione gr. circuli, NO, ad gr. circuli, PQ, nempe ex hypothese ex ratione, EC, ad, CH, nam pro conoide est limes, AB,) quæ duæ rationes, nempe rectanguli, SEC, ad rectangulum, SHC, & rectæ, EC, ad, CH, component rationem paralleleppipedi sub, CE, & rectangulo, SEC, ad paralleleppipedum sub, CH, & rectangulo, SHC, hoc est paralleleppipedi sub, SE, & quadrato, EC, ad paralleleppipedum sub, SH, & q. HC. Insuper gr. rectæ, DF, ad gr. rectæ, LM, habet rationem compositam ex ratione gr. DF, ad gr. YZ, hoc est ex ratione, DF, ad YZ, vel ad, LM, nempe ex ratione q. EC, ad q. CH, & ex ratione gr. rectæ, YZ, ad gr. LM, idest ex hypothese ex ratione, ES, ad, SH, (nam pro trilineo est limes, RT,) quæ duæ rationes faciunt quoque rationem paralleleppipedi sub, SE, & q. EC, ad paralleleppipedum sub, SH, & q. HC. Ergo trilineum, DLCMF, difformiter graue limite, R T, & conoides, DCF, difformiter graue limite, A B, & vtraque in

21. I. COR.

23. Exerc.



9. huius. in prima specie, erunt propor. analoga in grauitate, com-
muneq; habebunt centrum grauitatis. Sed in trilineo cen-
trum gr. quod fit, I, ita secatur, VX, ut fit, XI, ad IV, veluti
sexquitercia, SC, ad, CE. Ergo, I, quatenus est centrum
gr. conoidis, DCF, ita secatur, VX, ut fit, XI, ad, IV, veluti
sexquitercia lateris transversi, SC, ad axim, CE.

Quod si conoides supponatur difformiter graue in secunda specie, limite, AB, utemur trilineo cubico, CDE, in prima specie difformiter graui, limite, RT, ostendemusq; ea esse propor. analoga in gr. ut supra factum est; assumptaq; VX, tanquam trigesima parte, CE, ordine sexta à basi, DE, diuisa ab, I, communi centro gr. probabimus ut supra, XI, ad, IV, esse ut sexquiquartam lateris transuersi, SC, ad axem, CE. Et tali methodo in reliquis speciebus diffor. procedentes eliciamus pro conoide, DCF, centra gr. prout ea pro trilineis in prima tantum specie difformiter grauib; notificauimus in Prop. 25. Superiori. Quod, &c.

SCHOLIUM.

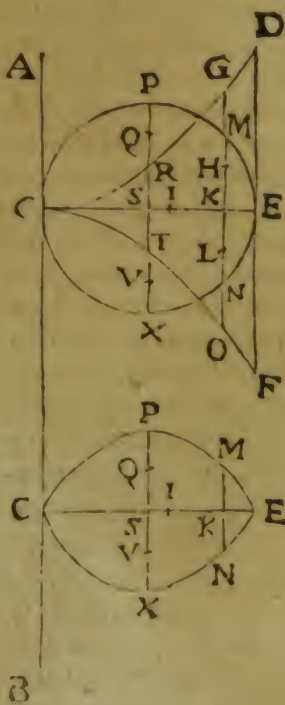
Iuxta scholium Prop. 25. superioris, poterit quoque ostendi in conoide, DCF, univ. grani, esse, CI, ad, IE, ut 4. SC, cum 3. CE, ad 2. SC, cum 1. CE.

PRO.

PROPOSITIO XXXII.

Si sphaera, vel sphaeroides, supponatur primò unif. deinde diff. gravis iuxta litem planum ipsam in vertice tangens, nempe ordinatim in specie 1. 2. 3. 4. 5. &c. Centrum gravitatis ita secabit eorum axim ut pars ad litem sit ad reliquam in unif. gravi, sicuti 2. ad 2. in primo difformi, ut 3. ad 2. in secundo, ut 4. ad 2. in tertio ut 5. ad 2. & sic deinceps aucto semper unitate antecedente, & retento ipso binario pro communi termino consequente.

Si sphaera, vel sphaeroides circa axim, CE, centro, S, & si quidem supponatur unif. gravis, manifestum est illius centrum, S, esse quoque centrum gravitatis eiusdem, & partes axis ut 2. ad 2. Sit nunc in prima specie diff. gravis iuxta litem planum, AB, tangens ipsam in vertice, C, eiusque centrum gr. 1. Dico, CI, ad, IE, esse ut 3. ad 2. Intelligatur. n. trilineum quadraticum in basi, DF, ipsi, AB, parallela, & circa diametrum, CE, nempe, CDE, in prima specie diff. grave, sed iuxta litem, DF, Insuper ducantur intra, DF, AB, duo quaecunque plana, ut per, S, K, ipsi, AB, a quidistantia, & efficiant in trilineo rectas, RT, GO, ipsi, DF, parallelas, ac in sphaera, vel sphaeroide, circulos, PX,



NM.

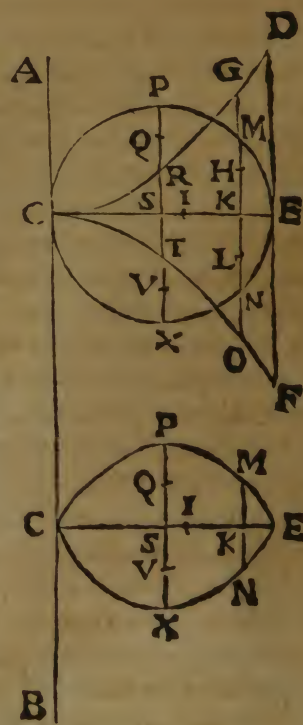
Def. 12.
1. Geom.
1. diu.

11.1, Con.

13. Ex. 4.

MN. Sumatur insuper in, GO, recta, HL, ipsi, RT, æqualis, & in plano circuli, PX, circulus, QV, æqualis ipsi, MN. Igitur grauitas circuli, MN, ad gr. circuli, PX, habet rationem compositam ex ratione gr. circuli, MN, ad gr. circuli sibi æqualis, QV, hoc est ex hypothesi, ex ratione, KC, ad, CS, (quia pro sphaera, vel sphæroide est limes, AB,) & ex ratione gr. circuli, QV, ad gr. circuli, PX, quæ est eadem rationi circuli, QV, vel, MN, ad circulum, PX, seu q. MN, ad q. PX, vel rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC. Duæ rationes verò, KC, ad, CS, & rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC, componunt rationem parallelepipedum sub, EK, & q. KC, ad parallelepipedum sub, ES, & q. SC. Ergo gr. circuli, MN, ad gr. circuli, PX, est vt parallelepipedum sub, EK, & q. KC, ad parallelepipedum sub, ES, & q. SC, quod serua.

Vltius grauitas rectæ, GO, ad grauitatem rectæ, RT, habet rationem compositam ex ratione gr. GO, ad gr. HL, nempe ex ratione, GO, ad, HL, vel ad illi æqualem, RT, hoc est ex ratione q. KC, ad q. CS, & ex ratione gr. rectæ, HL, ad gr. rectæ, RT, nempe ex hypothesi ex ratione, EK, ad, ES, (quia pro trilineo, DCF, est limes, DF,) duæ rationes verò q. KC, ad q. CS, & EK, ad, ES, faciunt rationem parallelepipedum sub, EK, & q. KC, ad parallelepipedum sub, ES, & q. SC. Ergo gr. rectæ, GO, ad gr. rectæ, RT, est vt parallelepipedum sub, EK, & q. KC, ad parallelepipedum sub, ES, & q. SC. Sed sic etiam probatum est esse gr. circuli, MN, ad gr. circuli, PX. Ergo trilineum, CDF, & sphaera, vel sphæroides, CPEX,



sunt

sunt proportionaliter analogia in gravitate, commune habebunt igitur centrum gravitatis. At in trilineo centrum gr. ita secat, CE, ut pars versus verticem, C, sit ad reliquam, 24. huius.
ut 3. ad 2. Ergo, CI, ad, IE, erit ut 3. ad 2.

Quod si sphaera, vel sphaeroides, fuerint diff. grauia in secunda, tertia, quarta specie, &c. iuxta eundem limitem, AB; utemur pro quadratico, trilineo cubico, qq. qc. &c. tanquam diff. graui semper in prima specie iuxta limitem, DF, ostendentes esse propor. analogum in gravitate cum dicta sphaera, vel sphaeroide. Et subinde colligemus ex Prop. 24. superiori, in tertia specie, CI, ad, IE, esse ut 4. ad 2. in quarta, ut 5. ad 2. & sic deinceps ut propositum est. Quod &c.

S C H O L I U M I.

SI circa, CE, Diametrum fuerit compositum ex duabus parabolis, CPE, CXE, quarum diametri, PS, SX, sint in directum, supponaturq; hac figura primo unif. deinde diffor. grauis limite, AB, nempe ordinatim in prima 2. 3. 4. 5. specie, &c. eadem centra gravitatis pro dicta figura colligantur. Est enim, quod ducta plana ipsi, AB, parallela effecerint rectas, PX, MN, ipsi, AB, parallelas, facile igitur ostendemus gr. MN, recta ad gr. recta, PX, esse ut gr. circuli, MN, ad gr. circuli, PX. Sumpta enim, QV, aequali, MN, habebit gr. MN, ad gr. PX, rationem compositam ex ratione gr. MN, ad, gr. QV, hoc est, KC, ad, CS, & gr. circuli, MN, ad gr. circuli, QV; & ex ratione gr. recta, QV, ad rectam, PX, hoc est ex ratione, QV, vel, MN, ad, PX, seu rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC, vel q. MN, ad q. PX, aut circuli, MN, ad circulum, PX; siue gr. circuli, MN, ad, gr. circuli, PX, & hoc in prima diffor. figura. Cum ergo gravitates rectarum, MN, PX, in figura parabolica, & gravitates circulorum, MN, PX, in sphaera, vel sphaeroide sint in ratione composita ex iisdem rationibus, erunt propor. analogia in gr. & centra gravitatis eodem modo secabunt, CE. In alijs vero 9. huius. speciebus diffor. non erit difficile eadem centra colligere propter analogiam quam habent in figura parabolica ordinatim ad, CE, applicatae cum quadratis applicatarum ad axim, CE, in sphaera, vel sphaeroide.

Ecc

SCHO.

S C H O L I V M II.

Non prætereundum quoque est in eadem superiori figura si velimus ex. gr. centrum gr. portionis sphaera, vel sphaeroidis, MCN, vnif. vel vt cumq; diffor. grauis iuxta limitem, AB, id obtineri posse mediante triangulo, vel trilineo, GCO, cum quo est propor. analogum in grauitate, vt patet ex demonstratione presentis Propositionis. Cum ergo triangulum, vel trilineum, GCO, sit diff. graue in prima specie iuxta limitem, DF, patet eiusdem centrum gr. petendum esse ex Prop. 26. superiori. Igitur portionis, MCN, vnif. grauis, centrum grauitatis, quod est illi commune cum triangulo, GCO (quippe quæ sunt propor. analogæ in grauitate) ita secabit $\frac{2}{12}$ axis, CK, post $\frac{4}{12}$ à basi, MN, numeratas, vel si mauis dicere sextam partem, CK, ordine tertiâ à basi, MN, vt pars versus verticem, C, sit ad reliquâ sicuti tripla, EK, ad, KC. Per quod nedum scimus in hemisphærio, vel hemisphæroide illius axim ita diuidi à centro gr. vt pars versus verticem sit ad reliquâ sicuti 5. ad 3. sed vniuersaliter prodeunt centra gr. omnium sphaerae portionum planis tangenti, AB, parallelis versus, C, resectorum. Similiter portionis, MCN, in prima specie diff. grauis limite, AB, centrum gr. ita secabit $\frac{3}{20}$ ipsius, CK, post eiusdem $\frac{5}{20}$ à basi, MN, numeratas, vt pars versus verticem, C, sit ad reliquam veluti quadrupla, KE, ad, KC. Et sic in reliquis speciebus simili seruatō processu, quem indicat dicta Prop. 26. Immo hæc quoque circa segmenta figura parabolica, EPCX, resecta versus, C, per rectas ipsi, AB, parallelas ob eandem rationem verificabuntur.

Hæc pauca circa centra grauitatis figurarum tam vnif. quàm diff. grauium libuit speculari, potius vt fecundissime huius doctrinae quedam exempla traderemus, quam vt planè eandem tractaremus. Agnoscet enim facilè studiosus qualia, & quot scitu digna cogimur intermittere, vt alias sæpè admonui, quæ lector puto aequi boniq; faciet, nec id ei omninò in gratum futurum spero, cū in hac doctrina excolenda amplissimus eidem locus reliquatur. Antequam verò ad huius Exercitationis finem accedamus, visum est quoque aliquod exemplar afferre cuiusdam alterius difformitatis eiusdem grauitatis, quàm exsequenti descriptione, cū allatis numero continuata nunc Lector intelliget.

D E-

DEFINITIO XV.

SI centrum cuiuscunque circuli, vel sphaeræ statuatur tanquam limes, iuxta quem augeantur in periphærijs circuli, & in superficiebus sphaeræ, super dicto centro descriptibilibus, gradus grauitatis iuxta rationem distantiarum à limite; vel si limes statuatur in periphæria dati circuli, aut sphaeræ, ita vt grauissimum sit in centro. Dicentur circulus, & sphaera, ijsque inclusæ figuræ, orbiculariter difformiter graues in prima specie, iuxta datum limitem. Quod si gradus grauitatis fuerint, vt quadrata, vel cubi, qq. qc. &c. distantiarum: dicentur orbiculariter difformiter graua in secunda, tertia, quarta, quinta specie, &c. vt supra quoque consuetum fuit.

SCHOLIUM.

HAc definitione premissa, vt & in huiusmodi difformitate grauitatis aliquod exemplum præbeamus, sufficere nobis tantum in semicirculo, & hemisphærio orbiculariter difformit. graui limite centro, & in prima specie, centrum grauitatis inuenire. Vt verò modus illud inuestigandi, quicumque sit, probabiliter euadat, per eundem prius centrum grauitatis eorundem
 tanquam
 unifor. grauium in
 quiremus.



P R O P O S I T I O. XXXIII.

In semicirculo uniformiter graui centrum grauitatis indagare.

Torricel.
lius,
Guldinus
Centrob
ryca li. i.

4. Sex
Elem.

Flat vt arcus, BGC, ad chor
dam, BC, in dato semicir-
culo, BGC, ita axis, GA, ad,
AD. Erit ergo, D, centrum
grauitatis arcus, BGC, per ab
alijs ostensa. Sumatur ipsius,
DA, $\frac{1}{2}$, DP. Dico, P, esse centrū
grauitatis semicirculi, BGC.
Intelligamus arcū, BGC, tan-
quā appēsū in libra, GA, eiusq; cētro gr. D, sic & reliquos ar-
cus descriptibiles super centro, A, apprehendemus tanquam
suspensos in punctis rectæ, DA, nempe in suis centris graui-
tatis. Insuper ducatur per, D, ipsa, LM, parallela, ipsi, BC,
& iungantur, LA, AM; ac centro, A, interuallo quocunque
minori, GV, vt, AP, describatur arcus, EPF, secans, LA, AM,
in, H, K, & iungatur, HK, dirimens, GA, in, I. Intelligamus
rursus, LM, tanquam appensam in libra, GA, sui que centro
grauitatis, D. Similiter vt, GA, vel, LA, ad, AD, idest arcus,
BGC, ad, BC, vel, EPF, ad, EF, ita est, HA, vel, PA, ad, AI.
Vnde, I, erit centrum gr. tam arcus, EPF, quam rectæ, HK, in
quo vtrique suspensi concipiantur. Eodem modo quos-
cumq; aliorum arcus ipsi, BGC, similes, & rectam iungentē
puncta occursum illius cum, LA, AM, intelligemus in cō-
muni sui centro suspensa. Est autem vt arcus, BGC, ad,
EPF, ita, LA, ad, AH, &, LM, ad, HK, & subinde grauitas ar-
cus, BGC, ad gr. EPF, vt gr. rectæ, LM, ad gr. rectæ, HK.
Ergo semicirculus, BGC, & triangulum, LAM, sunt propor-
analogia in grauitate. Habebunt ergo commune centrum
grauitatis. At illud in triangulo, LAM, est punctum, P, igitur,
P, erit centrum gr. semicirculi, BGC. Hoc autem con-
cordat



cordat cum Torricellio, & Guldino, qui lib. 1. Centrobary-
ce, pag. 105. ait, si fiat vt $\frac{1}{2}$, BGC, ad $\frac{1}{2}$, BC, hoc est vt, GA,
ad, AD, ita $\frac{2}{3}$, GA, ad aliam sumptam in, AG, ab, A, eius ter-
minum esse centrum gr. semicirculi, BGC. Sed tale est, P,
quia, PA, est $\frac{2}{3}$, AD, & vt, GA, ad, AD, siuè $\frac{1}{2}$, BGC, ad $\frac{1}{2}$,
BC, ita sunt $\frac{2}{3}$, GA, ad, AP. Quod &c.

P R O P O S I T I O. XXXIV.

In hemisphærio unif. gravi centrum gravitatis palam fa-
cere.

Sit hæmisphærium, BGC, vnif.graue. Quæritur eius centrum grauitatis. Sit axis, GA, bisariam sectus in, D, intelligaturque vnus, LAM, in basi circulo, LM, circulo, BC, parallelo, & vertice centro, A. Similiter super eodem, A, centro, radio minori, AG, describatur quæcunque superficies, sphærica, EPF, quæ secet conic. LAM, superficiem in periphæria circuli, HK, qui æquidistabit ipsi, LM, secet verò, GA, in, I. Punctum ergo, D, erit cẽtrum grauitatis superficiei sphæricæ, BGC, quod nouissime probauit Torricellius, vnde hic amplius apparet Guldinum hallucinatum fuisse dum lib. 1. suæ Centrobaticæ, pag. 137. putauit centrum gr. superficiei sphæricæ hæmisphærij idem esse cum centro gr. semicirculi, per axem illius transeuntis quod & nos reprobauimus in Exerc. 3. in fine Cap. 14. Idem verò, D, est centrum gr. circuli, LM. Insuper quia superficies, BGC, ad superficiẽ, EPF, est vt quadratum, GA, vel, LA, ad quadratum, AH (est enim, BGC, dupla circuli, BC, &, EPF, dupla circuli, EF,) hoc est, vt circulus, LM, ad circulum, HK: cumq; sit, LA, ad, AD, vt, HA, ad, AI, &, LA, dupla, AD, erit &, HA, vel, PA, dupla, AI; quare, I, erit



Arch. 1.
de Sph. &
Cyl.
Prop. 31.

1. huius.

9. huius.

8. huius.

29. huius.

erit centrum gr. superficiei, EPF, vt est & circuli, HK, suntq; superficies, BGC, EPF, & circuli, LM, HK, proportionales, & subinde eorum grauitates pariter proportionales. Ergo hæmispherium, BGC, & conus, LAM, erunt propor. analogi in grauitate, commune ergo habebunt centrum gr. quia in vtroq; reperitur quoq; in axe, GA. Sed coni centrum gr. quod sit ex. gr. punctum, P, distat à basi, LM, per $\frac{1}{2}$ ipsius, DA. Ergo, P, erit quoq; centrum gr. hæmisphærij, BGC. Cum verò, CD, sit æqualis ipsi, DA, & DA, quadrupla, DP, erit, GD, quadrupla, DP, &, GP, quintupla, DP. Sed eiusdem, DP, tripla est, AP. Ergo, GP, ad, PA, est vt 5. ad 3. prout à nobis & ab alijs demonstratur. Inuentum est ergo centrum gr. hæmisphærij, quod quærebatur.

P R O P O S I T I O XXXV.

Semicircui, & hæmisphærij, orbiculariter difformiter grauium in prima specie, ac iuxta limitem centrum, grauitatis centrum inuestigare.

S It semicirculus, BGC, orbiculariter diffor. grauis in prima specie, limite centro, A. Oportet illius centrum grauitatis inuestigare. Supponantur autem omnia constructa vt in Schemate Prop. 33. superioris, sit tamen triangululum, LAM, difformiter graue in prima specie limite, A, eiusq; centrum gr. P, quod dico esse pariter centrum gr. semicirculi, BGC. Quod enim, D, sit centrum gr. commune rectæ, LM, & arcui, BGC; &, I, commune rectæ, HK, & arcui, EPF, probabimus, vt factum est in dicta Prop. 33. Vltius grauitas arcus, BGC, ad grauitatem vniformem arcus, EPF, est vt, LA, ad, AH, vel, DA, ad, AI, hoc est, LM, ad, HK, & subinde vt grauitas,



uitas, LM, ad gr. vniformem, HK. Insuper grauitas vniformis arcus, EPF, hoc est gradus gr. in, EPF, vel, BGC, ad gr. difforem, seu gradum grauitatis eiusdem, EPF, est Def. 15. vt, LA, ad, AH, vel, DA, ad, AI, aut sicuti grauitas vniformis, HK, seu illius gradus gr. vel ipsius, LM, ad gr. difforem, seu gradum gr. eiusdem, HK. Ergo ex æquo gr. arcus, BGC, ad gr. difforem arcus, EPF, erit vt gr. LM, ad gr. difforem, HK. Erunt ergo semicirculus, BGC, & triangulum, LAM, proportionaliter analogæ in grauitate, vnde, P, erit quoq. centrum gr. semicirculi, BGC, 23. huius. distans à basi, LM, per $\frac{1}{2}$, AD. Cum ergo, GA, ad AD, sit proximè vt 11. ad 7. & AD, sexquicertia, AP, hoc est vt 7. ad $5\frac{1}{2}$, erit, GA, ad, AP, vt 11. ad $5\frac{1}{2}$, & diuidendo, GP, ad, PA, vt $5\frac{1}{2}$ ad $5\frac{1}{4}$, seu vt 23. ad 21. proximè. Descriuat nunc, BGC, pro hæmisphærio orb. diffor. graui limite centro, A, & in prima specie. Sint autem cætera constructa vt in Prop. ant. sed tamen conus, LAM, in prima specie difformiter grauis, limite, A, cuius sit centrum gr. P, ideo distans à basi, LM, per $\frac{1}{2}$ ipsius, DA. Quod 29. huius. ergo, D, sit centrum gr. commune circulo, LM, & superfici, BGC, vt & I, commune circulo, HK, & superfici, EPF, probabitur vt factum est in Prop. ant. Rursus grauitas superfici, BGC, ad gr. vniformem superfici, EPF, est vt ipsæ superficies, hoc est vt q. LA, ad q. AH, vel q. LM, ad q. HK, vel circulus, LM, ad circulum, HK, vel gr. circuli, LM, ad gr. vniformem circuli, HK. Insuper gradus gr. vniformis, EPF, vel, BGC, ad gradum difforem, EPF, est ex hypothesi vt, LA, ad, AH, vel, DA, ad, AI, hoc est vt gradus gr. vnif. HK, vel, LM, circuli ad gradum difforem circuli, HK. Ergo ex æquali gr. BGC, ad gr. difforem, EPF, erit vt gr. circuli, LM, ad gr. difforem circuli, HK. Igitur hæmisphærium, BGC, & conus, LAM, erunt proportionaliter analogæ in gr. & erit, 9 huius. P, illis commune centrum grauitatis. Cum ergo, GD, sit æqualis, DA, & DA, sit 5. qualium, PA, 4. erit, GA, 10. qualium, PA, 4. & GP, 6. qualium, PA, 4. vel, GP, 3. qualium, PA, 2. sicut etiam contingit in parabola vnif. graui, cuius vertex, G, basis, BC. Quod, &c.

SCO.

SCHOLIUM.

HAec etsi plurimum confirmantur per concordantiam duarum præcedentium Prop. 33. & 34. cum ab alijs ostensis, attamen, quia non adeò clarè videtur his adaptari Def. 12. de proportionaliter analogis in gravitate, ut non relinquatur studioso aliquis dubitandi locus, cum arcus in semicirculo, vel superficies in hemisphærio videantur esse multò plures, quam parallela in triangulo, vel circuli in cono, LAM, etsi quilibet signatus arcus, & parallela, vel qualibet signata superficies, & circulus, habeant idem centrum gr. omniaq; cadant in recta, DA: propterea non aliter quam tamquam probabilia tibi huiusce Propositionis innèta propono benigne Lector, donec congruentior modus vel mihi subueniat hac centra inveniendi, vel tibi si modò circa hac orbiculariter difformiter grauia, tum in prima, tum etiam in reliquis difformitatis speciebus, volueris laborare; mihi enim in præsentì hac quoq; proposuisse speculanda sat esse videtur.

ADMONITIO.

DOctrinæ de centro gravitatis tam vniformiter, quam difformiter grauium, adeò connectitur mensura gravitatis, ut vna vicissim ex alia inferatur. Id cum in vnif. grauib; notum sit, manifestum quoq; hic euadet in difformiter grauib;. Propterea consentaneum duximus post centra gravitatis, nonnulla quoq; attingere circa comparisonem gravitatis vniformis eiusdem figuræ tam planæ, quam solidæ, cum gravitate difformi, cui sequentes Propositiones, cum præcedentibus numero continuatas, destinamus.

PRO-

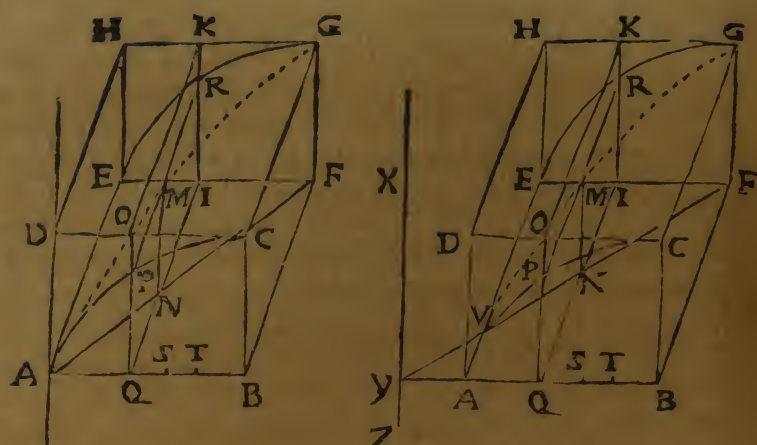
PROPOSITIO XXXVI.

Si sit quaecunq; figura plana circa diametrum primo vnif. deinde diff. grauis ordinatim in 1. 2. 3. 4. 5. specie, & c. iuxta limitem rectam vel tangentem in alterutro oppositorum verticum dictae figurae, vel illi quomodocunq; parallelam extra figuram ductam: grauitas vniformis eiusdem figurae ad primam grauitatem difformem erit, ut diameter (prolata si opus sit vsq; ad limitem) ad interceptam eiusdem partem inter limitem, & centrum grauitatis figurae vnif. grauis. Sic prima grauitas difformis ad secundam difformem eiusdem figurae erit, ut eadem diameter (subintellige semper, prolata vsq; ad limitem, si opus, sit) ad eius partem interceptam inter limitem, & centrum grauitatis eiusdem figurae primò difformis. Secunda ad tertiam, erit ut eadem diameter ad interceptam inter limitem & centrum grauitatis figurae secundò difformis. Et sic deinceps eodem seruatò processu. Porro interceptam inter limitem, & centrum gr. figurae vnif. grauis, dicemus centralem primam; figurae verò primò difformis, centralem secundam, & sic tertiam, quartam, & c.

S It figura plana quaecunq; circa diametrum, AB, cuius tamen dimidiam, tantum exponimus, ABC, in semibasi, BC, vertice, A, primò vnif. deinde diff. grauis ordinatim in 1. 2. 3. 4. 5. specie & c. iuxta limitem, AD, tangentem in, A, in prima figura, vel, XZ, parallelam ipsi, DA, in secunda figura cui incidat, BA, producta in, Y, sit insuper, S, centrum gr. duplæ figurae, ABC, vnif. grauis, T,

Fff

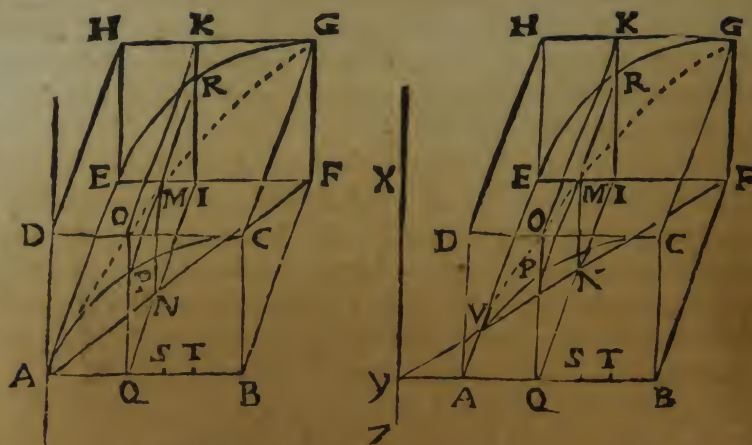
primæ



primæ difformis &c. & subindè, AS, vel, YS, prima centralis, AT, vel YT, secunda centralis &c. Dico grauitatem vniformem figuræ, ABC, ad eiusdem primam grauitatem difformem esse vt, AB, ad, AS, in prima figura, vel vt, BY, ad, YS, in secunda. Item primam grauitatem difformem, ABC, ad secundam, vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT, &c. Fiat in angulo, DAB, ipsi, AB, applicatum parallelogrammum, DABC, & in basibus, DABC, ABC, figuris fiant cylindrici, quorum latera eidem rectæ sint parallela, nempe, HB, paralleleppipedum, &, GEFBAC, cylindricus. Extendatur insuper planum indefinitum per litem, DA, in prima figura, vel, XZ, in secunda, ac per, GF, efficiens in cylindrico, GEFBAC, figuram planam, AGF, vel, VG F. Deniq; sumpto in, AB, quocunq; puncto, Q, per ipsum extendatur planum ipsi, GB, æquidistans, quod in, HB, faciat parallelogrammum, KOQI, in cylindrico, GAB, parallelogrammum, RPQI, & in trunco, GFBAC, vel, CVFBAC, parallelogrammum, MPQN, quæ omnia inter se erunt æquiangula. Supponamus autem tam parallelogrammum, DB, quam paralleleppipedum, HB, vnif. graue, sed figuram, ABC, nunc primò difformē, in grauitate, ac limite, DA, vel, XZ. Grauitas ergo vniformis, CB, ad gr. difformem, PQ, ostendetur, vt toties in simili casu superius

8. Primi
Geo. Ind.

perius factum est, habere rationem compositam ex ratione
 gr. vnif. CB, ad gr. diffor. OQ, scilicet ex ratione, EA, ad,
 AQ, vel, BY, ad, YQ; & ex ratione gr. diffor. OQ, ad gr. Def. 8.
 diffor. PQ, eiusdem gradus, nempe ex ratione, CQ, vel,
 CB, ad, PQ. Sed vt, BA, ad, AQ, vel, BY, ad, YQ, ita 1. huius.
 est, FB, ad, NQ. Ergo gr. vnif. CB, vel vnif. OQ, ad
 gr. diff. PQ, erit in ratione composita ex rationibus, CB,
 ad, PQ, &, FB, ad, NQ. Sed eadem componunt ratio-
 nem parallelogrammi, GB, ad parallelogrammum, MQ,
 quia sunt æquiangula, ergo gr. vnif. OQ, ad gr. difformem,
 QP, erit vt, GB, ad, MQ, seu vt grauitas vnif. GB, vel, KQ,
 ad gr. vnif. MQ, & sic vbique. Ergo grauitates vnif. omnium Cor. 10.
 linearum parallelogrammi, DB, ad gr. diff. omniū linearum
 figuræ, ABC, erunt vt gr. vnif. omnium planorum, HB, ad
 gr. vnif. omnium planorum trunci, GFABC, vel, GFVAEC. Exerc. 4.
 Et subinde grauitas vnif. parallelogrammi, DB, ad gr. diffor- 10. huius.
 mem figuræ, ABC, erit vt gr. vnif. HB, ad gr. vnif. trunci,
 GFABC, vel, GFVABC. Est autem grauitas vnif. figu-
 ræ, ABC, ad gr. vnif. DB, vt, ABC, ad, DB, vel vt cy- 1. huius.
 lindricus, GEB, ad, HB, hoc est vt grauitas vnif. cylin-
 drici, GEB, ad gr. vnif. HB. Ergo ex æquali gr. vnif. ABC, 1. huius.
 ad primam gr. difformem eiusdem, AFC; erit vt gr. vnif.
 cylindrici, GEB, ad gr. vnif. trunci, GFABC, vel, GFVA 1. huius.
 BC, nempe vt dictus cylindricus ad dictum truncum. Cum
 verò ostensum sit duos truncos dicti cylindrici esse in ratio-
 ne reciproca partium diametri, AB, vel, YB, à centro, S,
 diuisarum, patet componendo cylindricum, GFB, ad trun- 17. huius.
 cum inferiorem, GFABC, vel, GFVABC, esse vt, BA, ad,
 AS, vel, BY, ad, YS. Ergo gr. vnif. ABC, ad gr. primam
 diffor. eiusdem, ABC, erit vt, BA, ad, AS, vel, BY, ad, YS.
 Sit nunc, ABC, diff. grauis in secunda specie, sed cylin-
 dricus, GEB, in proximè antecedenti, hoc est in prima specie,
 &, HB, pariter vnif. graue, cæteris vt supra constructis.
 Grauitas ergo vnif. CB, vel, OQ, ad gr. diffor. secundam
 ipsius, PQ, ostendetur vt supra esse in ratione composita ex
 ratione q. BA, ad q. AQ, vel q. FB, ad q. NQ, & ex
 ratione, CB, ad, PQ. Similiter gr. vnif. GB, ad gr. primam
 difformem, MQ, probabitur esse in ratione composita ex
 Fff 2 ratio-



23. Sexti
Elcm.

Cori 10.
Exerc. 4.

10. huius.

Cor. 10.
Exerc. 4.
10. huius,

Cor. 17.
huius.

ratione gr. vnif. GB, ad gr. primam difforem, KQ, hoc est ex ratione, BA, ad, AQ, seu, BY, ad, YQ, scilicet ex ratione, FB, ad, NQ, & ex ratione gr. diff. KQ, ad gr. difforem eiusdem gradus, MQ, hoc est ex ratione, KQ, ad, MQ, quæ est composita ex rationibus, IQ, vel, FB, ad, NQ, & OQ, vel, CB, ad, PQ. Duæ rationes verò, FB, ad, NQ, componunt rationem q. FB, ad q. NQ. Ergo gr. vnif. OQ, ad gr. secundam difforem, PQ, erit vt gr. vnif. GB, vel, KQ, ad gr. primam difforem, MQ, & sic vbiq; Ergo gr. vnif. DB, ad gr. secundam difforem, ABC, erit vt gr. vnif. HB, ad gr. primam diffor. trunci, GFABC, vel, GVFBAC. Quoniam verò gr. vnif. OQ, ad gr. primam difforem, QP, est vt gr. vnif. KQ, ad gr. primam difforem, RQ, & hoc vbiq; idè conuertendo grauitas prima difformis, ABC, ad gr. vnif. DB, erit vt gr. prima difformis cylindrici, GEB, ad gr. vnif. HB; sed grau. vnif. DB, ad gr. secundam difforem, ABC, ostensa est esse vt gr. vnif. HB, ad gr. primam diffor. trunci, GFABC, vel GVFBAC. Ergo ex æquali gr. prima diffor. ABC, ad gr. secundam diffor. eiusdem, ABC, erit vt gr. prima diffor. cylindrici, GEB, ad gr. primam diff. trunci, GFABC, vel, GVFABC. At quia grauitates truncorum cylindrici, GEB, primò diff. grauis sunt in ratione reciproca partium, AB, vel, YB, factarum à centro gr. T, figuræ duplex, ABC, primò diff. grauis, idè componendo gr. prima diffor.

diffor. cylindrici, GAB, ad gr. primam difformem trunci, G FABC, vel GFVABC, erit vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, Y T. Igitur gr. prima difformis, ABC, ad gr. secundam diffor. eiusdem, ABC, erit vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT, secundam centalem.

Simili ratione ostendemus gr. secundam difformem, ABC, ad tertiam esse, vt, BA, vel, BY, ad tertiam centalem, supponendo tunc cylindricum, GEB, suosq; truncos secundò diff. graues, retinendoq; semper, HB, vnif. graue. Et sic deinceps in omnibus speciebus difformitatis simili processu incedemus. Ex quibus patet in integra quoq; figura circa diametrum, AB, propositum verificari. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

EX his colligitur pariter grauitatem uniformem eiusdem figura ad quamuis difformem comparatam se habere, vt paritatem diametri eiusdem numeri cum grauitate difformi, ad factum sub tot centralibus ordinatim à prima quota est grauitas difformis. Vt in superioribus schematibus grauitas uniformis ABC, ad primam difformem est, vt, BA, vel, BY, ad, AS, vel, YS, primam centalem, vt probatum est. Eadem gr. vnif. ABC, ad gr. secundam difformem, ABC, erit vt q. AB, vel, YB, ad factum sub duabus centralibus prima, & secunda, AS, AT, vel, YS, YT. Nam gr. vnif. ABC, ad secundam diff. ABC, habet rationem compositam ex ratione gr. vnif. ABC, ad primam diff. ABC, nempe ex ratione, BA, ad, AS, vel, BY, ad, YS; & ex ratione primæ difformis ad secundam, hoc est ex ratione, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT. Dux rationes verò, BA, ad, AS, &, BA, ad, AT, faciunt rationem q. BA, ad factum sub, AS, AT. Et ita dux, BY, ad, YS & BY, ad, YT, faciunt rationem q. BY, ad factum sub, YS, YT. Ergo gr. vnif. ABC, ad grau. secundam difformem erit vt q. AB, ad factum sub, AS, AT, vel vt q. BY, ad factum sub, YS, YT. Eodem modo ostendemus gr. vnif. ABC, ad gr. difformem tertiam esse, vt cubus, AB, ad factum sub prima, AS, secunda, AT, & tertia centrali; vel, vt cubus, BY, ad factum sub prima, YS, secunda, YT, & tertia centrali, & sic deinceps.

SCO.

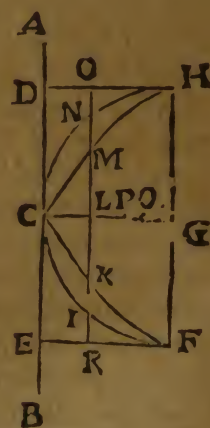
S C H O L I V M.

Aduerte tamen etsi supposuerimus figuram datam esse circa diametrum facilioris intelligentiæ gratia, attamen propositum quoque verificari circa quascunque figuras planas, assumpta vice diametri ex. gr. earum altitudine, & hoc ex vi Prop. 17. superioris, & Corollarij allati pro diff. graui- bus. Aduerte etiam in hac grauitatum comparatione nos semper supponere in recta parallela limiti, & ab eodem remotissi- ma, ut in, CB, eundem gradum grauitatis, à quo versus limitem procedit grauitas tam vniformis, quam quacunque difformis. Sic & in solidis in plano limiti parallelo, & ab eodem remotissi- mo eundem gradum grauitatis semper supponemus, pro eadem figura tanquam vnif. vel diff. vtcunque graui.

P R O P O S I T I O XXXVII.

Eadem analogia ostensa in Prop. ant. de planis figuris, de solidis quoque verificatur.

Sit primò cylindricus, DF, circa axem, CG, in basi figura quacunque, HF, vnif. grauis, & deinde diff. in prima, secunda specie, &c. limite plano, AB, ipsi, HF, parallelo. Intelligatur quoque, DF, esse parallelogrammū, circa diametrum, CG, in basi recta, HF, vnif. graue, ac deinde diff. in prima, secunda specie, &c. limite, AB, vt recta linea. Sumatur deinde in, CG, quoduis punctum, L, per quod agatur planum equidistans ipsi, HF, ac facies in cylindrico, DF, figuram, OR, similem, æqualem, & similiter positam ipsi, HF, & in parallelogrammo, DF, rectam, OR, existentibus, HF, OR, rectis homologis figurarum, HF, OR. Vt si illæ sint circu-



li, &

li, & HF, OR, sint earum diametri. Cum ergo grauitas vnif. HF, figuræ, vel figuræ, OR, ad quamcunque grauitatem difformem suppositam in eadem figura, OR, ita sit gr. vniformis rectæ, HF, vel, OR, ad eandem prædictæ gr. difformem suppositam in recta, OR. Erunt grauitates vnif. omnium planorum cylindrici, DF, ad grauitates difformes eorūdem in data specie, vt grauitates omnium rectarum, DF, vnif. ad gr. difformes earūdem in supposita specie: & consequenter grauitas vnif. cylindrici, DF, ad eiusdem difformem, erit vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eiusdem gr. difformem in data specie. Insuper ex demonstratis patet cylindricum, DF, & parallelogrammum, DF, esse propor. analoga in gr. siue supponatur insimul vnif. grauis, siue insimul diff. grauia in data specie, & consequenter habere communia centra grauitatis. Sit, P, centrum gr. pro ipsis vnif. grauibus, & Q pro iisdem tanquam diff. grauibus in prima specie. Quia ergo gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eiusdem gr. primam difformem est per præced. Prop. vt, GC, ad, CP, etiam gr. vniformis cylindrici, DF, ad eiusdem primam gr. difformem erit vt, GC, ad, CP. Sic ostendemus primam difformem ad secundam in eodem cylindrico esse, vt, GC, ad, CQ, & gr. vnifor. ad secundam sicuti q. GC, ad rectangulum sub, CP, CQ. Et eodem modo in reliquis speciebus procedemus.

Quod si solidum non fuerit cylindricus, sed ex altera parte deficiens, vt, HCF, circa axim, CG, tunc in eadem illius basi, HF, & circa eundem axem, CG, constituemus cylindricum, & parallelogrammum, DF. Et per quodcumque punctum, CG, vt, L, traiecto plano ipsi, HF, æquidistante, ac faciente in cylindrico figuram, OR, & in solido figuram, NI, vt figura, HF, ad figuram, NI, sic faciemus rectam, HF, ad rectam, MK, & ita, GF, ad, LK, & sic vbique describet res planam figuram, HMCKF. Erit ergo gr. vnif. figuræ, HF, ad gr. vnif. figuræ, NI, vt gr. vnif. rectæ, HF, ad gr. vniformem rectæ, MK. Vnde erunt, HEF, solidum, & plana figuræ, HMCKF, propor. analoga in gr. Eodem modo si comparantur grauitates figuræ, HF, & rectæ, HF, vnif. ad grau. difformes figuræ, NI, & rectæ, MK, in quacumq; specie ostendemus esse propor. analoga in gr. & subinde communia habebunt

Cor. 10.

Ex. 14.

10. huius.

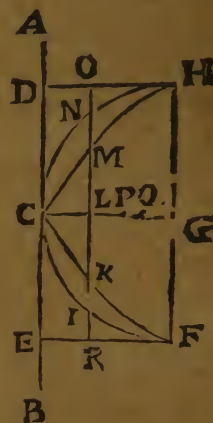
9. huius.

Cor. 10.
Ex. 4.

ro. huius.

bebunt centra gr. vt, P, centrum gr. pro iisdem tanquā vnif. grauibus, & Q, pro ipfismet tāquam in prima specie difformiter grauibus. Et quoniam ostensum est gr. vnif. HF, vel, OR, figuræ ad gr. difformem figuræ, NI, esse vt gr. vnif. rectæ, HF, vel, OR, ad gr. diff. rectæ, MK, in eadem specie, & hoc vbiq. Ideò grau. vnif. cylindrici, DE, ad gr. difformē solidi, HCF, erit vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eandem grauit. difformem figuræ, HMCKF. Cum ergo gr. vnif. solidi, HCF, conuertēdo, sit ad gr. vnif. cylindrici, DE, vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad grau. vnif. figuræ, HMCKF, & gr. vnif. cylindrici, DE, ad gr. difformem solidi, HCF, vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eandem gr. difformem, HMCKF. Erit ex æquali gr. vniformis, solidi, HCF, ad gr. difformem eiusdem, vt gr. vnif. figuræ, HMCKF, ad gr. difformem eiusdem in eadem specie. Cum ergo ex præc. Prop. gr. vnifor. HMCKF, ad eiusdem primam gr. difformem sit, vt, GC, ad, CP; etiam gr. vnif. solidi, HCF, ad eiusdem gr. difformem erit vt, GC, ad, CP. Eodem modo ostendemus gr. primam ad secundam eiusdem solidi esse, vt, GC, ad, CQ, & gr. vnif. eiusdem ad secundam difformem, vt q. GC, ad factum sub, CP, CQ; & sic in reliquis speciebus quemadmodum in figuris planis.

Exemplum attulimus quando limes, AB, tangit figuram, eodem tamen modo fiet demonstratio etiam si non tangat. Similiter si solidum non habeat axim, affuentes illius altitudinem, vel quamcunq; rectam limite, AB, & basis plano, HF, interceptam, eaq; diuisa per parallela limiti plana transeuntia per centra gr. solidi tanquam vnif. grauis, deinde diff. in 1. 2. 3. specie, &c. & vsurpantes illius portiones cadentes inter limitem, & dicta parallela plana per centra gr. producta, tanquam centrales, propositum nihilominus ostendemus. Quod, &c.



COROL.

COROLLARIUM I.

Cum ergo hac analogia tam in planis. quam in solidis verificetur. inuentaq; sint centra gr. nonnullarum tam planarum. quam solidarum figurarū. patet per has duas superiores Propos. earundem grauitatum in diuersis speciebus proportionem obtinere posse. tum ad grau uniformem earundem singillatim. tum etiā inter se comparatarū. Sicuti vicissim si prius inuēte fuissent harū grauitatum in eadem figura proportionēs, eiusdē quoq; respondentia centra grauitatis colligi potuissent.

COROLLARIUM II.

Patet quoq; si comparentur diuersarum planarū figurarum inter se, vel solidarum inter se quacūq; grauitates; cum in vnaquaq; fuerint nota centra gr. tanquam vnif deinde diff. graui. in 1. 2. 3 specie, &c. innotuerit quoq; proportio grauitatū uniformium comparatarum figurarum; quod manifesta euadet ratio cuiuscūq; grauitatis vnus ad quacūq; grauitatē alterius comparatarū figurarum. Quas generales regulas nunc aliquibus ex figuris quarum supra inuenimus centra grauitatis, in exemplum applicabimus.

PROPOSITIO XXXVIII.

In parallelogrammo quocūq; diuersarum eiusdem grauitatam proportionēs assignare.

In quolibet parallelogrammo primò vnif. deinde diffor. graui in omni specie ordinatum, ac limite quouis laterum, centrum gr. ita diuidit diametrum, vt pars ad verticem sit ad reliquam in vnifor. graui, vt 1. ad 1. in primo di- 27. huius.
formi vt 2. ad 1. &c. sicuti ostendunt hi numeri

1	2	3	4	5	&c.
1	1	1	1	1	

G g g

Ergo

Ergo tota diameter ad primam centalem erit vt 2. ad 1. ad secundam vt 3. ad 2. ad tertiam vt 4. ad 3. &c. veluti exhibent hi numeri.

2 3 4 5 6 &c.

1 2 3 4 5 Centrales

Sic ergo grauitas vniformis parallelogrammi ad primam difformem erit vt 2. ad 1. prima difformis ad secundam vt 3. ad 2. & sic deinceps, vt ostendet hæc secunda series numerorum.

Quod si velimus rationem grauitatis vnif. parallelogrammi ad singulas difformes ordinatim, inueniemus hæc seriem.

2 3 4 5 6 &c.
1 1 1 1 1

namque vnif. grauitas ad primam difformem est vt 2. ad 1. Eadem ad secundam difformem, vt q. diametri, nempè 9. ad factum sub prima, & secunda centrali, hoc est sub $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{3}$. quod est $\frac{2}{6}$. nempè $\frac{3}{9}$. Est autem vt 9. ad 3. ita 3. ad 1. Pariter eadem grauitas vnif. ad tertiam difformem erit, vt cubus diametri, qui, vt apparet in superius allata secunda numerorum serie, est 4. nempè 64. ad factum sub $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, nempè ad $\frac{6}{24}$, vel ad $\frac{1}{4}$, scilicet vt 4. ad 1. & sic deinceps fiat tertia series numerorum.

Aliter quoque habebuntur rationes grau. vnif. dicti parallelogrammi ad difformes, nempè ex comparatione eiusdem ad triangulum, & trilinea ordinatim subsequencia circa eandem diametrum parallelogrammi. Grauitas enim prima difformis eiusdem æqualis erit grauitati vniformi trianguli, quod facillè probabitur. Est autem grau. vnif. parallelogrammi dupla grau. vnif. dicti trianguli. Ergo gr. vnif. parallelogrammi ad primam grau. difformem eiusdem erit vt 2. ad 1. Sic cum eadem grau. vnif. parallelogrammi sit tripla grau. vnif. trilinei quadratici, eadem erit ad secundam grau. diff. vt 3. ad 1. Et sic in reliquis, quemadmodum indicat superior tertia numerorum series.

C O R O L.

COROLLARIUM.

E Aedem proportionēs pro parallelogrammo colliguntur quoque pro cylindricis circa eandem diametrum cum parallelogrammo, vel in eadem tanquam in basi existentibus, cum habeant communia centra grauitatis, & subinde communes centrales.

SCHOLIUM

Pratereō autem alias figuras planas, quarum inuenimus cētra graui, cū quilibet iuxta præstensas regulas generales, facile earundem diuersarum grauitatum proportionēs elicere poterit, tantumque gratia exempli insigniora solida, de quibus egimus, in medium afferemus, nempe Conum, Conoides parabolicum, hyperbolicum, ac Sphæram, seu Spheroides.

PROPOSITIO XXXIX.

Idem in Cono præstare unif. & utcumq; diffor. graui, limite plano ipsum in vertice tangente.

Iam constat ex Prop. 29. superiori centrum, gr. ita secare axim, ut pars versus verticem sit ad reliquam in unifor. graui ut 3. ad 1. in primo difformi ut 4. ad 1. &c. quemadmo- 27. huius
dum indicat hæc series numerorum.

3 4 5 6 7 &c.
1 1 1 1 1

Ergo axis ad primā centralē erit ut 4. ad 3. ad secundā. ut 5. ad 4. & sic deinceps, ut patet in hac alia numerorū serie

4 5 6 7 8 &c.
3 4 5 6 7 Centrales

Sic ergo coni graui. unif. ad primā difformem erit ut 4. ad 3. prima ad secundā, ut 5. ad 4. &c.

Eadem quoq; coni graui. unif. ad primā difformem ostendetur esse ut 4. ad 3. ad secundā, ut 5. ad 3. ad ter-

G g g 2 tiam

tiam, vt 6. ad 3. &c. quemadmodum indicat hæc series.

4	5	6	7	8	&c.
3	3	3	3	3	

Qui numeri habentur vel faciendo quadratum, cubū, &c. axis, & ducendo $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. Vel, quod est facilius ducendo secundæ seriei numeros superiores in se ipsos, & pariter, inferiores, vt 4. in 5. facit 20. & 3. in 4. facit 12. ita vt grau. vnif. coni ad primam difformem reperiatur vt 20. ad 12. hoc est vt 5. ad 3. similiter ducendo in se 4. 5. 6. fiunt 120. & 3.4.5. faciunt 60. vnde grau. vnif. coni ad secundam difformem reperiatur vt 120. ad 60. Etenim grau. vnif. coni ad secundam difformem habet quoq; rationē compositam ex rationibus 4. ad 3. 5. ad 4. & 6. ad 5. nempè axis coni ad suas centrales, vt constat ex Cor. Prop. 36. superioris. Per quod patet ratio extrahendi reliquos numeros dictæ tertiæ seriei.

P R O P O S I T I O XL.

Idem absolvere in conoide parabolico vnif. Vel vtcunque diff. graui, limite plano ipsum in vertice tangente.

EX Prop. 30. superiori habetur in axe conoidis parabolici diuisi per centrum grauitatis, partem versus verticem esse ad reliquam in vnif. graui, ac primo, secundo difformi, &c. vt exhibent hi numeri.

2	3	4	5	6	&c.
1	1	1	1	1	

Vnde axis ad centrales, & subinde conoidis dictæ grauitates ordinatim erunt, vt indicant hi numeri.

3	4	5	6	7	&c.
---	---	---	---	---	-----

2	3	4	5	6	Centrales.
---	---	---	---	---	------------

Et conoidis grauitas vnif. ad singulas difformes erit ordinatim pro vt apparet in his numeris, deductis ex numeris secundæ seriei, multiplicando ita superiores inter se, quam inferiores.

3	4	5	6	7	&c.
2	2	2	2	2	

P R O.

PROPOSITIO. XLI.

*Idem perficere in conoide hyperolico vnif. & utcumque
diff. graui, limite plano ipsum in vertice tangente.*

EX Prop. 31. constant centra grauitatis conoidis hyperbolici, & subinde haberi potest ratio axis ad primam centalem, secundam, tertiam, &c. & consequenter grauitatis vnif. conoidis ad primam difformem, primæ ad secundam, &c. nec non eiusdem vnif. ad primam, secundam, tertiam difformem, &c. iuxta datas regulas. Exempli gratia, viso Schemate dictæ Prop. 31. grauitas vnif. conoidis, DCF, ad primam difformem erit vt, EC, ad, CI; hoc est vt, EC, 12. ad, CV, 8. vna cum, VI, ad quam, XI, est vt sexquialtera, SC, ad, CE. Qua ratione in cæteris quoq; speciebus grauitatis procedemus.

PROPOSITIO XLII.

*Idem determinare in sphaera, vel spheroide, vnif. vel
utcumque diffor. graui, limite plano ipsum in vertice
tangente.*

Ex Prop. 32. superiori habetur in axe Sphæræ, vel Sphæroidis, diuisæ per centrum grauitatis, partem versus limitem ad reliquam esse vt exhibent hi numeri.

2 3 4 5 6 &c.
2 2 2 2 2

Vnde axis ad centrales, & subinde earum grauitas vnif. ad primam difformem, prima ad secundam, &c. erit vt ostendunt hi numeri.

4 5 6 7 8 &c. Centrales
2 3 4 5 6

Et

Et earum grauitas vniformis ad singulas diffformes velut in hac serie apparet, quorum numeri ex secunda serie deducti sunt, vt in Prop. ant. factum est.

4	10	20	35	56	&c.
2	3	4	5	6	

S C H O L I V M.

Haec eadem quoq; patet verificari circa figuram ex duabus parabolis compositam, quae habetur in Prop. 32. superiori, quemadmodum hoc consideranti facile innotescet.

P R O P O S I T I O XLIII.

Si cylindrus, conus, conoides parabolicum, & sphaera, fuerint circa eundem axim, triaq; priora solida in communi basi, & equali circulo maximo sphaerae, limes verò sit planum ipsa in communi vertice tangens: inter eorum grauitates infra scriptae aequalitates reperientur.

Supponimus autem in omnibus planum à limite remotissimum, nempe basi cylindri, coni, & conoidis, tangentem ex opposito limitis ipsam sphaeram, habere eundem gradum grauitatis.

Dico ergo cylindrum in prima specie difformiter grauem esse æqualis ponderis cum conoide parabolico vniformi graui.

27. Quart.
Geo. Ind.

Nam grauitas vnif. cylindri ad gr. primam difformem eiusdem cylindri est vt 2. ad 1. per ostensa in Prop. 38. circa parallelogramma, & collecta pro cylindricis in eius Corollario. Sed eadem gr. vnif. cylindri ad gr. vnif. conoidis est vt cylindrus ad conoides, nempe vt 2. ad 1. Ergo prima grau. diffor. cylindri æqualis est grauitati vniformi dicti conoidis.

Cylin-

Cylindrus in secunda specie diffor. grauis est æqualis ponderis cum cono vnif. graui.

Grauitas enim vnif. cylindri ad eius secundam grau. difformem est vt 3. ad 1. Sed eadem grau. vnif. cylindri tripla est grauitatis vnif. coni. Ergo dictæ grauitates sunt æquales.

28. huius
24. Sec.
Geo. Ind.

Sphæra in prima specie diffor. grauis est æqualis ponderis cum Cono vnif. graui.

Nam sphæræ gr. vnif. ad eius gr. primam difformem est vt 4. ad 2. At cum sphæra dupla sit coni, eius grau. vnif. ad grau. vnif. coni est vt 4. ad 2. Ergo, &c.

42. huius.
Cor. primæ Geo.
Ind.

Sphæra in prima specie diffor. grauis est æqualis ponderis cum conoide parabolico in prima specie diffor. graui.

Nam sphæræ prima gr. diffor. ad eius grau. vniformem est vt 2. ad 4. Grauitas vnif. sphæræ ad gr. vnif. conoidis, vt 4. ad 3. Et gr. vnif. conoidis ad primam difformem est vt 3. ad 2. Ergo ex æquali grauitas prima difformis sphæræ ad primam diffor. conoidis est vt 2. ad 2. nempe eidem æqualis.

41. huius.
Elicitur
ex prima
secundi
& 21.
Quarti
Geo. Ind.
40. huius.

Conoides parabolicum in prima specie diffor. graue est æqualis ponderis cum cono vnif. graui.

Etenim prima grau. diffor. conoidis ad eiusdem grau. vnif. est vt 2. ad 3. Grauitas vnif. conoidis ad grau. vnif. coni est vt 3. ad 2. Ergo ex æquali, &c.

40. huius

Conoides parabolicum in secunda specie diffor. graue est æqualis ponderis cum cono in prima specie diffor. graui.

Namq; secunda gr. diff. conoidis ad eius gr. vnif. est vt 2. ad 4. hoc est vt 3. ad 6. Grau. vnif. conoidis ad vnif. coni est vt 6. ad 4. & grau. vnif. coni ad eius primam difformem vt 4. ad 3. Ergo ex æquali, &c.

40. huius

39. huius,

Ex superioribus quoq; constat cylindrum in secunda specie, Sphæram in prima specie, conoides parabolicum in prima specie diff. grauia, æqualiter inter se ponderare, quia æquè ponderant cum cono vnif. graui.

Has paucas illustiores excerpimus æquationes inter dictas grauitates, tanquam huius doctrinæ insignia exempla. Pluras alias poterit sagax Lector ex Propositionibus antecedentibus depromere, cuius industriæ hoc relinquinus, vt tandem ad huius materiæ finem properemus.

PRO-

P R O P O S I T I O. LXIV.

Si proponatur quicunq; cylindricus, FKGBAC, vnif. grauis, in basi figura, ABC, pariter vnif. graui, & sit, CB, recta vel basis eiusdem, vel eandem tangens in vertice, B, ipsi, A, opposito; secetur insuper idem cylindricus superficie cylindracea quacunque, EFG, quam descripserit recta, FG, incedens parallela ipsi, CB, ita vt existens, AB, recta linea, fiat in parallelogrammo, KB, figura, GEAB: ulterius si eadem figura, ABC, supponatur hac noua ratione difformiter grauis, nempe ita vt gradus grauitatis in parallelis ipsi, CB, incedant sicuti parallela ipsi, GB, ducta in figura, ABGE. Dico truncum, EFGBAC, vnif. grauem esse propor. analogum in grauitate figura, ABC, tanquam supradicta ratione difformiter graui; & grauitatem vnif. ABC, ad eiusdem dictam grauitatem difformem esse, vt cylindricus, FAB, ad dictum truncum, EFGBAC.

3. Primi
Geo. Ind.

Fiat in angulo, ABC, sub, AB, BC, parallelogrammum, DB, compleaturq; paralleppipedum, LB, sub tubus planis, ABC, KB, FB, in angulo solido, B. Rursum traiciatur quodcunq; planum ipsi, FB, æquidistans, secansq; dicta solida, quod in, LB, FA, solidis, ac trunco, FEGBAC, faciat parallelogramma, MP, NP, SP, quæ erunt æquiangula. Hic ergo procedemus vt in Prop. 22. factum est, nempe ostendendo grauitatem vnif. CB, ad difformem, QP, habere rationem compositam ex ratione gr. vnif. CB, ad difformem, RP, hoc est iuxta hypothesim, ex ratione, GB, ad, TP, & ex ratione gr. diff. RP, ad gr. diff. PQ, hoc est

est ex ratione, RP, vel, CB, ad, QP, nā, RP, est in se ipsa vnifor. grauis, licet in gradu diuerso à gradu, qui est in, CB. Duæ rationes verò, GB, ad, TP, &, CB, ad, QP, cōponunt rationē parallelogrā- morū, FB, SP, hoc est eorundem grau. vnifor. Ergo erūt gr. vnif. CB, diff. QP, vniformis, FB, & vnif. SP, proportionales, figuraq;, ABC, tãquā diff. grauis propor. analoga in gr. trūco, FEGBAC. Et cū sit gr. vnifor. CB, vel, RP, ad diff. QP, vt gr. vnif.

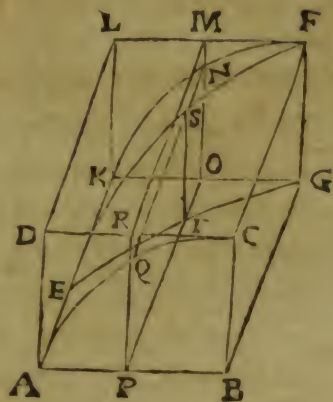
FB, vel, MP, ad gr. vnif. SP, cōcludemus gr. vnif. DB, ad diff. ABC, esse vt gr. vnif. LB, ad gr. vnif. trunci, FEGBAC. Et quia gr. vnif. CB, vel, RP, ad vnif. QP, est vt, RP, ad, QP, vel vt parallelogrāma, MP, NP, eorumq; grau. vniformes. Idēd grauitates omniū linearū, DB, ad grauitates omniū linearū, ABC, erunt vt gr. omniū planorū, LB, ad grauitates omniū planorum, FA: & subindē gr. DB, ad gr. ABC, vnif. erit vt gr. LB, ad gr. FA, vnif. & conuertendo, gr. vnif. ABC, ad vnif. DB, erit vt gr. vnif. FA, ad gr. vnif. LB. At probatum est gr. vnif. DB, ad gr. dif. ABC, esse vt gr. vnif. LB, ad gr. vnif. trunci, FEGBAC, ergo ex æquo gr. vnif. ABC, ad difformem, ABC, erit vt gr. vnifor. FA, cylindrici ad gr. vnif. trunci, FEGBAC. Quod, &c.

SCHOLIUM.

Videt ergo Lēctur hanc Propositionem vniuersalissimam esse, ita vt si reperiatu-
 r centrum gr. trunci, FEGBAC, illico habeatur centrum gr. pro figura, ABC, hac ratione diffor-
 miter grauis, cuius difformitatis regulatricem possumus appel-
 lare ipsam figuram, ABGE, secundum regulam, GB, sicuti, ABC, figuram regulatam. Similiter si sciamus rationem cylindrici, FA, ad truncum, FEGBAC, innotescet quoque ratio gr. v-
 nif.

H h h

nif.



1. huius.

23. Sexu
Elem.
1. huius.

Def. 12.

Cor. 10.
Ex 4.

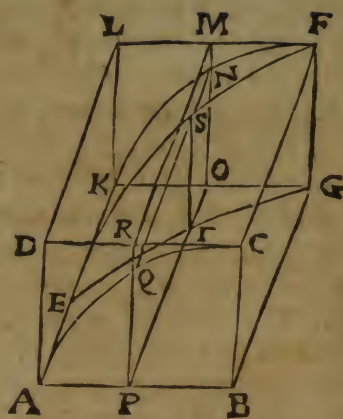
1. huius.

Cor. 10.
Lx. 4.

3. Ex. 1.

9. huius.

nif. ABC , ad eiusdē hanc grau. difformem. Consideret ergo artifex, num ex nota figurarum regulatricis, $ABGE$, & regulata, ABC , mensura, in iisdemque notis centrīs gravitatis, possit per aliquam regulam generalem inueniri centrum gr. dicti trunci, vel aliquid aliud notum presupponendū sit; etenim si inueniret centrum gr. trunci, $FGEABC$, per eandem regulā posset inuenire centrū gr. superioris trunci, $FKGE$, unde sciens centra gr. dictorū truncorum, & basis cylindrici,



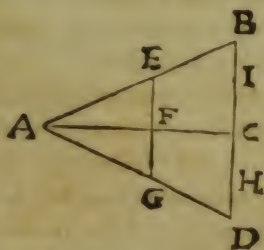
FA , hoc est centrum gr. eiusdem cylindrici, vel saltem aequilibrij, posset detegere rationem truncorum inter se, & ex his cōpositi, hoc est cylindrici, FA , ad truncum inferiorem, & subinde grau. unif. ABC , ad eiusdem grau. difformem. Res ergo ad hoc deducta est, ut si inueniamus regulam generalem habendi centrum gr. trunci, $FGEABC$, ex dictis presuppositis in figura regulatrice, ac regulante, possumus nedū quacumq; in hac Exarc. per particulares regulas ostensa sunt, tam circa centra, quam circa mensuram gravitatis, adhibitis pro regulatricibus triangulo, & trilineis supra cōmemoratis generaliter, & unico actū demonstrare, sed plurima quoque circa innumeras alias species difformitatis ostendere, nempe quacumque sit regulatrix, dummodo ea sit in eadem altitudine cum regulata; parallelaque in ambabus figuris assumantur respectu regularum in eodem plano existentium. Ut sint. CB , regula pro, ABC , & BG , regula pro, $ABGE$. Hoc nequaquam reticendum censui, ut si per superiora neutiquā modum naturā difformiter plenumque in suis actionibus operātis affecutus sum, illa acrioris ingenij vi subacta, dū sub tanta generalitate demonstrationes institueret huiusmodi speculationis limites non effugiat. Demiq; & nos sequentem, ne parcat, addimus Propositionem.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

Si quaecunq; figura plana circa axim secundum eandem regulam fuerit regulatrix, & regulata: idem erit centrum grauitatis eiusdem figurae ut diff. r. grauis iuxta eandem tanquam regulantem, ac solidi rotundi vnif. grauis ex eadem figura genitus, reuoluta circa eundem axim.

SIt triangulum æquicrurum gratia exempli, ABD, circa axim, AC, & regula, BD, secundumq; eam, ABD, sit figura regulatrix, ac regulata hoc est in prima specie diff. grauis. Dico idem esse centrum gr. ABC, tanquam diff. grauis, & rotundi, hoc est conus, ABC, vnif. grauis. Ducatur quodcunq; planum rectè secans, AC, ac faciens in triangulo rectā, EFG, & in cono circulum, EFG. Grauitas ergo vnif. rectæ, BD, ad difformem rectæ, EG, habebit rationem compositam ex ratione gr. vnif. BD, ad grauitatem vnif. IH, quæ sit æqualis, EG, hoc est ex ratione, BD, ad, IH, vel, EG; & ex ratione gr. vnif. IH, ad diff. EG, hoc est per hypotensim, ex ratione, BD, ad, EG, quia nempe supponimus gradus grauitatis regulari à parallelis ipsi, BD, in triangulo, ABD. Duæ rationes verò rectæ, BD, ad rectā, EG, componunt rationem quadrati, BD, ad quadratum, EG, vel circuli, BD, ad circulum, EG, hoc est grauitatis circuli, BD, ad grau. circuli, EG. Ergo grauitas vnif. BD, ad difformem, EG, erit vt gr. vnif. circuli, BD, ad gr. vnif. circuli, EG. Igitur triangulum, ABD, tanquam difformiter graue, & conus, ABD, tanquam vnif. grauis,



1. huius.

23. Sexti Elem.

H h h 2

erunt

6. huius.

erunt propor. analogia in gr. Habebunt ergo commune centrum gr. cum illud pro triangulo, ABD, & cono, ABD, fit quoq; in axe, AC, concordatq; hoc cum Prop. 23. superiori, distabit enim à basi, BD, per $\frac{1}{2}$ ipsius, AC. Hoc autem quod specialiter demonstrauius in cono patet in omni figura plana circa axim verificari.

S C H O L I V M.

5. huius.

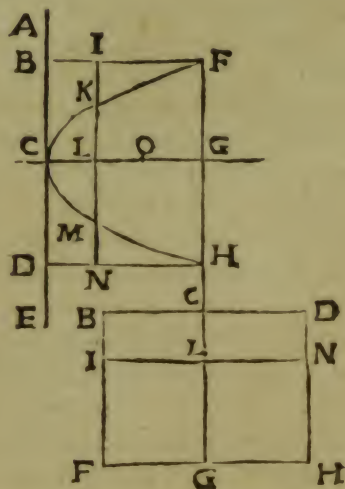
Quamuis perdifficile sit certa ratione cōprehendere utrum natura in distribuenda gravitate in vllis corporibus utatur aliqua ex præconsideratis speciebus difformitatis; & si utitur, ubi, & quando id fiat agnoscere: certamen sumus eam in corporibus quomodocunq; suspensis observare in ipsorum momentis, quod in gradibus gravitatis in prima specie supposuimus. Momenta enim aquę grauium sunt in ratione distantiarum à fulcramento, quemadmodum gradus gravitatis sunt in ratione distantiarum à limite. Cum ergo inter momenta grauium suspensorum, & gradus diuersos gravitatis huiusmodi analogia reperiatur, non in congruum duxi nonnulla quoque circa hanc materiam, momentorum attingere, plura Lectoris industria, quę hic afferri possent relinquendo. Primo ergo sequentem Prop. demonstramus, in qua apparet quidam consensus graduum gravitatis difformis in prima specie, cum grauium suspensorum momentis.

P R O P O S I T I O XLVI.

Si quacunq; figura plana, vel solida circa axim, ita sustineatur in alterutro extremorum, vel in puncto, quod sit dictis extremis in directum, sed ubicunque extra figuram; ut axis æquidistet horizonti: circumscribatur autem parallelogrammum figurę planę, siue cylindricus solidę, quę figurę supponantur quoq; in prima specie difformiter graues, iuxta limitem axi erectum

Etum, ac transeuntem per fulcimentum. Gravitas
unif. parallelogrammi, vel cylindrici ad gravitatem
difformem datae figurae erit, ut momentum parallelo-
grammi, vel cylindrici, ab altero extremo axis, quod
opponitur fulcimento, suspensi, ad momentum dictae
figurae.

Sit figura plana, vel solida, FCH, circa axē, CG, in basi, FH, in prima specie diff. grauis limite, AE, per, C, vel vtcunq; remotē à, C, extra figuram perpēdiculariter ipsi, CG, transeunte, quæ in occurſu, CG, cum limite vt in, C, ita, ſuſtineatur, vt, CG, ſtet horiſonti parallela; ſit quoq; parallelogrammum, vel cylindricus, BD, HF, eidem circumſcriptum, idemq; ſuſpenſum ex, G, vt apparet in figura. Dico gra-



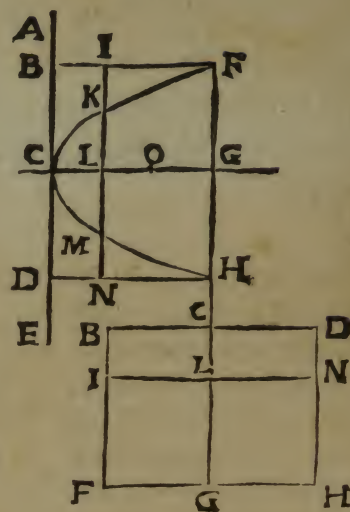
uitatem vnif. BH, ad gr. difformem figuræ, FCH, esse vt momentum, BH, ex, G, suspensi, ad momentum figuræ, FCH. Sumatur in, CG, quodcunq; punctum, L, per quod trajecta recta, vel plano basi, FH, æquidistante, fiant in, BH, & figura plana, FCH, rectæ, ILN, KLM, & in solidis plana, ILN, KLM. Recordare autem nos vt aliàs semper, supponere in, FH, eundem gradum grauitatis communem ipsi, BH, &, FCH. Nunc grauitas vnif. FH, ad difformem, KM, est in ratione composita ex ratione grau. vnif. FH, ad diff. IN, hoc est iuxta hypothesim ex ratione, GC, ad, CL, & ex ratione gr. difformis, IN, ad difformem, KM, nempe ex, ratione, IN, ad, KM. Ex iisdem ratio-

. huius.

Cor. 10.
Ex. 4.

10. huius.

rationibus verò, GC , ad, CL , &, IN , ad, KM , componitur ratio momenti, IN , ex, G , suspensæ ad, KM , ex, L , suspensæ. Ergo grau. vnifor. FH , vel, IN , ad difformem, KM , est vt momentum, IN , ex, G , suspensæ ad momentum, KM , & hoc ubiq; in, CG , verificatur. Ergo grauitates omnium rectarum, vel planorum, BH , vniformes ad grau. difformes omnium rectarum, vel planorum figuræ, FCH , erunt vt momenta omnium rectarum, vel planorum, BH , ex, G , suspensorum, ad momenta omnium rectarum, vel planorum, FCH , ex, CG , suspensorum. Quapropter gr. vnif. BH , ad difformem, FCH , erit vt momentum, BH , ex, G , suspensi ad momentum figuræ, FCH , ex, CG , suspensæ. Hoc verò eodem modo ostendetur, si, C , remoueat a limite, vel si fulcimentum, & limes sint in, G , siue vtcunq; ab eo remotè extra figuram, tunc autem, BH , debet suspendi in, C . Ergo patet propositum.



C O R O L L A R I U M I.

4. huius.

Cor. 10.
Exerc. 4.

Quoniam grauitas vnifor. IN . ad vnif. KM , est vt, IN , ad, KM , nempè vt momentum, IN . ad momentum, KM , si, IN , KN ex, G , suspendantur, & hoc ubique. Idèò concludemus grauit. vnif. BH , ad vnif. figuræ, FCH esse vt momentum, BH ad momentum, FCH , ex, G , suspensorum. Vnde conuertendo grau. vnif. FCH , ad vnif. BH erit vt momentum, FCH , ad momentum, BH , ex, G suspensorum. Et cum grau. vnif. BH , ad difformem, FCH , ostensa sit esse vt momentum, BH , ex, G suspensi, ad momentum figuræ, FCH , ex, CG , suspensæ. Idèò ex aqua.

aquali grau. vniformis FCH, ad difformem FCH, erit vt momentum FCH, ex G, suspense ad momentum eiusdem, FCH, ex CG, suspense.

COROLLARIUM II.

Quoniam ergo ostensum est grau. vnif. FCH, ad eiusdem 36. huius.
 grau difformem in prima specie esse vt, GC, ad primam,
 centalem que sit, CO: patet hinc sequi momentum
 FCH, vt suspense ex G, ad eiusdem, FCH, momentum, vt su-
 spense ex CG, esse vt, GC, ad CO. Hoc autem alia huiusmodi ra-
 tione apparet verum esse, quia est idem momentū figuræ, FCH,
 ex tota longitudine CG suspense, & eiusdem, FCH, ab eadem,
 CG suspense tantum per centrum grauitatis, O. Si autē, FCG,
 sit suspensa semel in O, & iterum in G, quoniam est, idem graue,
 momentum in G, ad momentum in O, erit vt, GC, ad CO. Patet 5. huius.
 ergo è contra ex hoc ostenso concludi pariter grau. vnif. FCH,
 ad eiusdem, FCH grau. primam difformem esse vt, GC, ad CO.
 Quod innuendum censui, vt hic veritatis consensus Lectori
 innotesceret.

Sed & has quatuor sequentes Propositiones ad hanc momen-
 torum doctrinam facientes subnectere libuit.

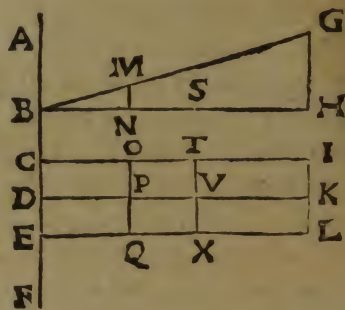
PROPOSITIO XLVII.

Si cylindricus quicunque, vel parallelogrammum circa
 axim, ita in alterutro extremorum axis sustineatur, vt
 idem axis stet horizonti parallelus. Scala momentorū
 partium eorundem, planis ad axem rectis abscissarum,
 erit quodcunque triangulum, reſtangulum, cuius idem
 axis sit altitudo.

Sit ex. gr. parieti, AF, infixus cylindricus, CELI, (idem
 est si parallelogrammum, CL, sit infixum rectæ, AF,)
 secundum, CE, circa axem, DK, qui stet horizonti paral-
 lelus.

s. huius.

lelus. Fiat autem triangulum, BHG , rectangulum ad, H , cuius altitudo, BH , sit æqualis & parallela ipsi, DK . Dico hoc esse scalam momentorum in, CL . Sumatur in, DK , quoduis punctum, P , & BN , æqualis, DP ; ducaturque per P , planum basi, IL , parallelum, efficiens in cylindrico planum, OQ , (recta in parallelogrammo) & per, N , recta, NM , parallela ipsi, HG . Erit ergo momentum, IL , ad momentum, OQ , vt, KD , ad, DP , nempè, HB , ad, BN , hoc est vt, GH , ad, MN Si ergo, GH , signet momentum, IL , & MN , signabit momentum, OQ , & ita quælibet in triangulo, BGH , parallela, ipsi, GH , signabit momentum rectæ, vel plani sibi respondentis in, CL . Ergo parallelæ ipsi, GH , in triangulo, GBH , procedunt vt momenta planorum, CL , (sive rectarum in parallelogrammo,) & propterea appellamus triangulum, BHG , scalam momentorum, CL . Quod, &c.



COROLLARIUM I.

Hinc sequitur eadem ratione secari, ex. gr. à recta, MN , omnes lineas, BGH , seu triangulum, BGH , & ab, OQ , omnia momenta, CL , seu momentum grauis, CL , sequitur quoque, GBH , triangulum ad, MBN , esse vt momentum, CL , ad momentum, CQ . Quapropter innotescit momenta, CL , CQ , esse vt quadrata, HB , BN , seu vt quadrata, KD , DP , quod de prismatibus, & cylindris ostendit quoque Galileus in postremis Dialogis ad Prop. 3. Dialogi secundi.

COROL.

COROLLARIUM II.

Si sit diuidendum momentum, CL , in datam rationem, qua sit ex.gr. ut, HN , ad, NB , sumentes, BS , mediam proportionalem inter, HB , BN , & DV , aequalem, BS , extendentesq; planum, TVX , ipsi, IL , æquidistans, sciamus momentum, CL , ad momentum, CX , esse ut q. KD , ad q. DV , hoc est, ut, HB , ad, BN ; & diuidendo, momentum, TL , ad momentum, CX , erit ut, HN , ad, NB , nempe in data ratione.

Aliter si proponatur diuidendum momentum, CL , deinceps in quotcunq; equalia momenta, sumamus radices quadratas numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. & has signabimus in, DK , à, D , versus K , in punctisq; notatis diuidetur, DK , in partes equalium momentorum.

Similiter hinc patet si, DK , secetur in quotcunque partes equalis longitudinis à, D , versus, K , procedendo, proxime ipsi, D , hoc est prima momentum fore 1. secunde 3. tertie 5. quartæ 7. & sic deinceps iuxta numeros impares ab unitate continuatos, sic enim se habent quadratum unitatis, & differentie quadratorum numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c.

PROPOSITIO LXVIII.

Esto parietis, AC , infixum conoides parabolicum, vel triangulum, EBG , vertice, B , circa axim, BF , qui stet horizonti parallelus; sit verò semitriangulum, AED , quadraticum rectangulum ad, E , cuius diameter, AE , æqualis sit, & parallela ipsi, BF . Dico hoc esse scalam momentorum dicti conoidis, & trianguli.

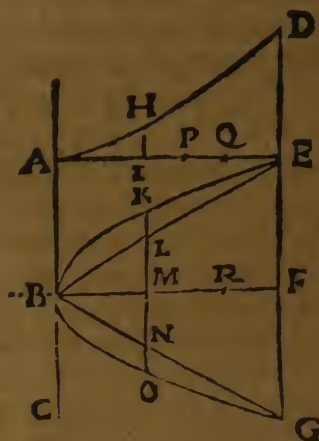
Svmantur utcunq; BM , & AI , sed inter se æquales, extendensq; plano per, M , basi, EG , æquidistante, & per, I , recta, IH , parallela, IH , fiat in conoide circulus, KMO ,
Iii & in

6. huius.

20. Primi
Con.

23. Ex. 4.

& in triangulo, EBG , recta, LMN . Momentum ergo circuli, EG , ad momentum circuli, KO ; habet rationem compositam ex ratione circuli, EG , ad circulum, KO , vel $q. EG$, ad $q. KO$, hoc est FB , ad BM ; & ex ratione; FB , ad BM ; quæ due rationes, FB , ad BM , faciunt rationem $q. FB$, ad $q. BM$, vel $q. EA$, ad $q. AI$, vel rectæ, ED , ad IH . Eodẽ modo ostendemus rectæ, EG , momentum ad momentum rectæ, LN , esse vt $q. FB$, ad $q. BM$, vel $q. EA$, ad $q. AI$, hoc est vt recta, ED , ad rectam, IH , & hoc ubicunque. Ergo trilineum, DAE , erit scala momentorum tam pro conoide, quam pro triangulo, EBG . Quod, &c.



COROLLARIUM I.

15. huius.

23. Sexti
Elem.

T Rilineum, DAE , ad trilineum, HAI , est vt illis circumscripta parallelogramma, nempe in ratione composita ex ratione, DE , ad HI , siue $q. EA$, ad $q. EI$, & recta, EA , ad AI , scilicet est vt cubus, EA , ad cubum, AI . Et quia momentum conoidis, EBG , ad momentum conoidis, KEO , est vt trilineum, DAE , ad HAI , idẽ erit vt cubus, EA , ad cubum, AI , vel vt cubus, FB , ad cubum, BM . Momenta ergo in conoidibus (vt etiam in triangulis) ab ipso, B , sunt in ratione cuborum eorundem axium.

CQ.

COROLLARIUM II.

Si erga detur ex gr. ratio, EI , ad, IA , & ita secundum sit momentum conoidis, EBG , oportebit inter, EA , AI , duas medias continuè proportionales sumere, ut, AQ , AP , &, BR , aquali existente ipsi, AQ , per, R , plano ipsi, EG , parallelo secabitur, EBG , in partes, quorum momenta erunt in data ratione.

Si velimus conoides, ABG , secare per plana ipsi, EG , parallela in partes aequalium momentorum initio, à, B , facto poterimus id efficere sumendo radices cubicas numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. (id facile per logarithmos, vel circino proportionis, obtineri potest) notansque puncta in, BF , per qua trajecta plana, EG , parallela, ipsum dividunt in partes aequalium momentorum.

Si, BF , secetur in quocunque partes aequales, initio,

à, B , facto per hac trajecta plana, EG , parallela

ita secabunt conoides, EBG , ut proxima ipsi,

B , partis, hoc est prima momentum sit

1. secunda 7. tertia 19. quarta 37.

quinta 61. &c. quia sic se ha-

bent cubus unitatis,

& differentia cu-

borum horu

numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Eadē quoque verifican-

tur circa trian-

gulum, E

BG .

Al, hoc est sunt & qq. EA ad qq. Al. Ex hoc colligemus momenta conorum planis axi erectis versus, AB, abscissorum (ut & trilineorum) esse ut qq. longitudinum, BM, BF, &c.

COROLLARIUM II.

SI ergo detur ratio ut, EI, ad, IA, & ita secundum sit momentum EBG oportebit inter EA, Al, sumere tres medias continuè proportionales, quarum ipsi, AE, propior sit, AP, eidemq; equalis, BQ. Etenim per Q trajecto plano ipsi, EG, parallelo secabitur, EBG, in partes momentorum in data ratione, EI, ad, IA. Momentum enim coni EBG, ad momentum coni circa BQ, erit ut qq. EA, ad qq. AP scilicet ut, EA, ad, Al. Vnde diuidendo patet &c. sicuti & in trilineo, EBG.

Si velimus hæc secare in partes aequalium momentorum initio facto à, B, id obinebimus sumendo radices qq. numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. & notando puncta in, BF, ut supra, &c.

Si, BF, secetur in quocunque partes aequales initio facto à, B, trajecta per notata puncta plana rectè axim,

BF, secantia, diuident, EBG, ita ut pars

prima sit 1. secunda 15. tertia 65. quar-

ta 175. quinta 369. &c. quia sic

se habent qq. unitatis, et dif-

ferentia qq. numerorum

1. 2. 3. 4. 5.

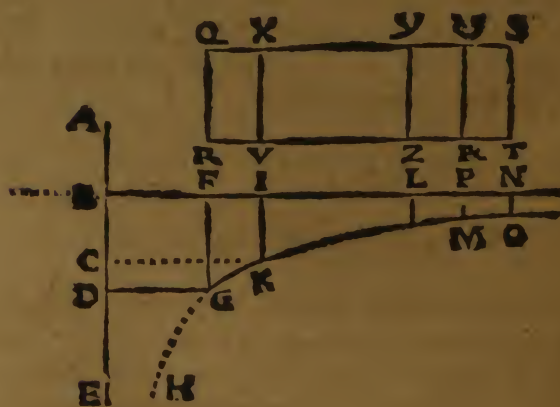
&c.

PRO.

PROPOSITIO L.

Si sint asymptoti, EB , BN , hyperbola, HGO , angulum re-
ctum, EBN , continentes, sumptis autem in ea vicunque
punctis, G , O , ducantur, GD , parallela ipsi, NB , & GF ,
 ON , ipsi EB ; fiatque parallelogrammum rectangulum,
 $QRTS$, cuius sit, RT , aequalis, & parallela ipsi, FN ,
& RQ , ipsi, FG , in directum; supponaturq; planum,
 $BNOGD$, sustineri ab, AE , in, BD . Dico, QT , re-
ctangulum esse scalam momentorum plani, $FNOG$.

Sumatur enim in, HO , aliud quodcunq; punctum, K ;
à quo ducatur, KI , parallela ipsi, FG , & KC , ipsi,
 NB . Momentum ergo, FG , ad momentum, IK , habebit ra-



6. huius.
12. secun.
Conic.

tionem compositam ex ratione, FG , ad, IK , hoc est ex ra-
tione, IB , ad, BF , (quia rectangula, DF , CI , sunt æqualia,
vnde

unde habent latera reciproca circa, angulos, $F, I,)$ & ex ratione, BF, ad, BI . Sed duæ rationes, IB, ad, BF , & BF, ad, IB , faciunt rationem æqualitatis. Ergo momenta rectarum, FG, IK , erunt æqualia. Si ergo sumatur, RV , æqualis, FI , & per, V , ducatur, VX , parallela ipsi, QR , erit momentum, FG , ad momentum, IK , ut, QR, ad, XV , & hoc ubique. Ergo, QT , erit scala momentorum plani, $FNOG$. Quod ostendendum erat.

C O R O L L A R I U M.

Quemadmodum ergo secabitur, QT , per parallelas ipsis, QR, ST , ita secabitur momentum plani, $FNOG$, per parallelas ipsi AE , in directum cum præfatis constiterit. Unde hinc sequitur si sumantur in, FN , quotcunque, & ubicunque eiusdem partes æquales, ut, FI, LP , quibus respondeant æquales, RF, ZB , extensis ipsis, FG, QR , parallelis per dicta puncta, momentum plani, $FGKI$, equari momento plani, LM , quemadmodum rectangula, illis respondentia, QV, TX , inter se sunt æqualia.

Sed circa hanc materiam momentorum pluribus quoque speculatione dignis intermissis, ne tua nimis abutar patientia, humane Lector, huic doctrina finem impono, adiectis tantum sequentibus scholijs, cum mihi præsertim proximè subsequens neutiquam prætereundum videatur.

S C H O L I U M I.

Circa corporeas qualitates.

Cum in Propositionibus 36. 37. superioribus ostensum fuerit in figuris tam planis, quam solidis circa diametrum gravitatem uniformem cuiusque figura ad eiusdem primam difformem esse ut diametrum (productam si opus sit usque ad limitem) ad primam centralem; primam difformem ad secundam, ut eandem diametrum ad centralem secundam, &c. nunc studioso innuendum duxi, hoc nedum circa gravitatem verificari, sed etiam de omni re, quæ induat, ut aiunt philosophi, momentum

dum quantitatis, & subinde hoc de ijs omnibus, præcipuè verò de qualitatibus corporeis, tãquam demonstratum recipi posse. Nemo enim puto negabit eosdem gradus, quos circa gravitatem consideravimus, pariter ex. gr. circa lucem, calorem, colorem, aliasuè corporeas qualitates concipi posse. Si itaque supposuerimus has diffundi in planis, & corporibus, ijsdem suppositis legibus gravitatis, nempe vel iuxta rationem distantiarum à limite, vel iuxta quadrata, cubos, &c. eorundem distantiarum, certò sciemus quam rationem habeat ex. gr. lux uniformis ad difformem in prima specie secunda tertia &c. quæ illustrat datum planum, vel solidum: mutato enim in dictis Prop. nomine gravitatis in nomen lucis, eadem in ijs de luce, quæ de gravitate ostensa sunt, concludentur seu de alijs quibusvis corporeis qualitatibus; sicuti & Propositiones ab ijs dependentes, quæ sunt a 38. vsque ad 43. ad dictas omnes qualitates pariter extendentur.

Sic ergo per Prop. 38. luce uniformiter ex. gr. super parallelogrammum radiante, deinde difformiter in prima specie, secunda, &c. limite quocunque latere, ita ut in opposito latere supponatur vnus, & idem lucis gradus; sciemus lucem uniformem ad primam difformem esse, ut diameter parallelogrammi est ad primam centalem, nempe duplam: deinde primam ad secundam difformem, ut 3. ad 2. &c. ut ostendunt hi numeri ex dicta Prop. 38. desumpti.

2 3 4 5 6 &c.

1 2 3 4 5 Centrales.

Sciemus quoque hanc uniformem ad singulas difformes esse ut patet in his numeris ex eadem descriptis.

2 3 4 5 6 &c.

1 1 1 1 1

Et eodem modo in cæteris figuris tam planis, quam solidis, quæ ibidem à Prop. 38. vsque ad 43. considerantur, proportionem lucis uniformis ad singulas difformes colligemus. Itaque ex hoc intelligitur quod, si natura hac lege operaretur ipsius, vel lucis distributio in rebus illustratis penderet ab earundem centro gravitatis, si eas tanquam graves supponeremus: idemque in alijs qualitatibus contingeret. Quis ergo non admirabitur huiusce vim centri, quod limites gravitatis egrediens nedum

cate-

ceteras qualitates corporeas, easque gregarias, moderaretur, sed vel in ipsa luce omnium nobilissima sui imperij leges exerceret. Iure merito igitur Guldinus centrum gravitatis tot, quot in eius Cētrobarica apparet, laudibus cumulavit, cui si & hac nota fuissent, fortē non idē ab Indivisibilibus abhorruisset, ex eō quod nullā cētro gravitatis per hac fructus & gloria accessionē fieri posse speraret ut dixit Tom. 2. pag. 349. Hac sunt benigne Lector, quae mihi in hac nova doctrina protenuitate mea licuit inuenire: cumque ruditer, & satis imperfectē à me digesta sint, rogo ut meos hosce qualiscunque conatus aq̃ui bonique facias, quibus saltem acriora ingenia fortē permota huiusmodi de uniformiter difformiter grauibus completam, & omnibus numeris absolutam doctrinam, aliquando spero, in lucem proferent.

SCHOLIUM II.

DEnique amice studiose, dum huius doctrinae riuus hic clauduntur; tibi innuendum duxi, in illis Propositionibus, in quibus probatur. Figurarum difformiter grauium, linearum, seu planorum grauitates habere inter se rationem compositam ex ratione molium, & distantiarum à limite, seu quadratorum, Cuborum, &c. earundem; Quod id breuius sic obtineri potuisset. Constat ex Proposit. 3. grauitates molium diuersorum graduum esse inter se in ratione composita ex ratione molium, & ipsorum graduum grauitatis: sed gradus sunt ut distantia, vel ut earum quadrata, cubi, &c. per definitiones. 8. 9. 13. & 14. exograuitates dictarum molium erunt in ratione composita ex ratione molium, & distantiarum à limite, vel quadratorum, cuborum, &c. earundem. Sic tamen dicta Propositiones relictæ sunt, cum, si quid superflui, nihil tamen habeant falsitatis.

Insimul, dum hic terminantur quoque demonstrationes per Indivisibilia (in sequenti enim Exercitatione sexta, & vltima, vel nulla huiusmodi, vel admodum pauca afferen-

Kkk

tur)

Lib. 2.
Geo. Ind.
1. 1.

tur) dissimulare nequeo, quod aliquis fortè me reprehender, dum hic, & in tota mea Geometria Indivisibilem, nomen omnium linearum in figuris planis usurpavi, cum melius conformiter, nomini omnium planorum in solidis, videretur esse nomen omnium rectorum. Scitò tamen hoc è calamo excidisse, dum definitiones stabilirem, distingueremque lineas recti transitus à lineis obliqui transitus ut evitarem alliterationem rectorum, & recti transitus, quod nomen postea retinui, tacite semper subintelligendo lineas rectas. Sed de his satis dictum sit.



EXER.



EXERCITATIO

S E X T A.

De quibusdam Propositionibus
Miscellaneis.

IN singulis Exercitationibus, quas ante
tea studijs tuis, Amice Lector, pro-
posui una quadam methodo, certum
obseruans ordinem, unam tantum-
modo materiam ad ampliorem nostrae
Indivisibilium Geometriae doctrinam
pertractavi: In praesenti vero Exercitatione ex demon-
strationibus aliquorum Theorematum inter sese nequid-
quam communicantium nulla methodo regulari, nullo
ordine determinato, super diuersorum Mathematicum di-
uersis proprietatibus Miscellanearum Propositionum spe-
culationes ium lineares, ium mixtas, & solidas pro-
pono.

Vbi quidem quid reprehensione dignum reputas?
Dum & Pappus Alexandrinus in Collectionibus Ma-
thematicis, aliique in Propositionum Decadibus omnium
consensu laudati existerunt, quamuis in huiusmodi

Kkk 2

Ope-

Operum voluminibus aliquis ordo rerum non appareat. Ingenio equidem tuo in præmissarum Exercitationum studijs valdè exercitato iucunda rerum, quæ in præsentī Exercitatione sunt Varietas allatura solatium est, præter utilitatem, qua prodest ijs, qui novas instituere speculationes desiderant plurimarum scientia conclusionum, quamvis inordinatim proponantur. Illud etiam fortasse utilius, vel sine dubio iucundius in hoc opere senties, ubi tuo genio, & libero arbitrio poteris uni ex infracriptorum Theorematum resolutionibus, cui primum volueris incumbere, quamvis reliquorum demonstrationes non videris, cum unumquodque independentè à præcedentibus demonstretur. Exercitatio ergò, quam præ manibus habeo diuersorum studiorum est, quæ mihi de tempore in tempus in huiusmodi Theorematum resolutionibus amici Geometra proposuerunt, de quibus quidem, cum in meorum studiorum ocijs perpetrata sint, ocia pariter ingenij tui, quod adèd benignè Indivisibilibus meis hucusque defatigasti, fraudare non valeo.

De

De modo facili describendi Sectiones Conicas, & in omnibus vniformi.

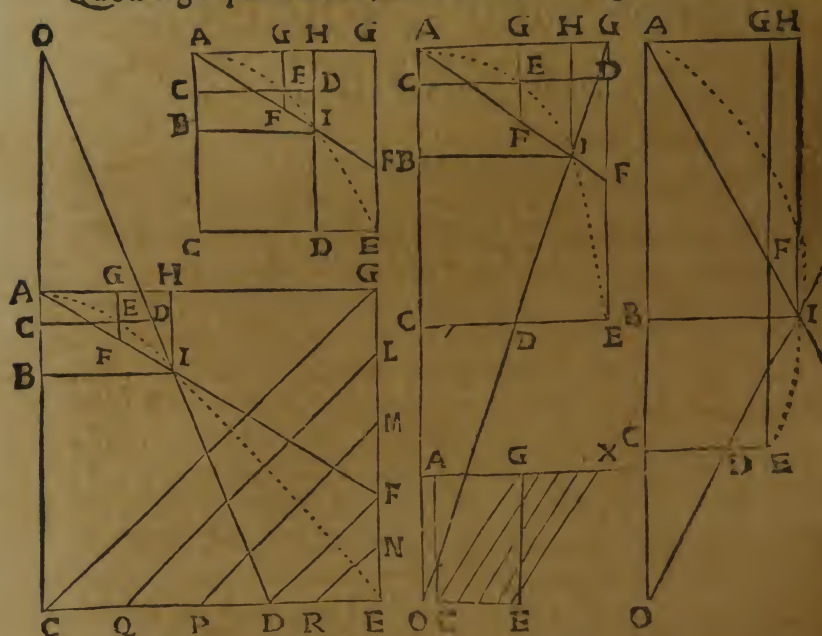
D*Vm mea Geometria Ind. Librum Sextum con-*
xerem incidi in modum describenda parabola sa-
tis facilem, quem in eo Libro Scholio 2. Prop. 9. studio-
sis post modum communicavi. Diu dolui non posse pari-
ter hyperbolam, & ellipsim tam facili ratione describi.
At deniq; animaduerti idem in ijs quoq; perfici posse, quod
mibi non parum attulit voluptatis. Hunc ergo modum
hic palam faciendum ad publicam vtilitatem duxi, quod
premissa sequenti Lemmatica Propositione nunc prestabo.

P R O P O S I T I O. I.

Sit conic sectio, cuius vertex, A, & in ea sumatur pun-
ctum quodlibet, I, per quod duæ rectæ ducantur, in
parabola quidem, IA, & IH, parallela diametro, A
C, at in reliquis, IA, IO, ad extremitates diametri
transuersæ, AO: sumpto rursus in iisdem quolibet
puncto, E, per ipsum extendantur, CED, quidem
parallela tangenti, AG, in vertice, A, & GEF,
parallela diametro, AC, occurrentibus sibi his rectis lineis
indefinitè productis in punctis, G, C, D, F, Dico
igitur, GE, ad, GF, esse, ut, CE, ad, CD.

Pro-

Producantur per, I, in omnibus, IB, parallela, AG;
 & in hyperbola, ac ellipfi, IH, parallela ipfi, AC;
 Quod ergo quadratum, CE, fit ad rectangulum sub, CD,



20. Primi
Con.

21. Primi
Conic.

4. Sexti
Elem.

BI, vt, CA, ad, AB, in parabola manifestum est, cum, CD, BI, opposita latera parallelogrammi, CI, sint æqualia, sitq; quadratum, CE, ad quadratum, BI, nempe ad rectangulum sub, CD, BI, vt CA, ad, AB; in reliquis verò sic probabitur. De foris sumpto quadrato, BI, intermedio inter quadratum, CE, & rectangulum, sub, CD, BI, habebit quadratum, CE, ad rectangulum sub, CD, BI, rationem compositam ex ratione quadrati, CE, ad quadratum, BI, & ex ratione quadrati, BI, ad rectangulum sub, BI, CD. Sed quadratum, CE, ad quadratum, BI, est vt rectangulum, OCA, ad rectangulum, OBA; & quadratum, BI, ad rectangulum sub, BI, CD (quia habent communem altitudinem, BI) est vt, BI, ad, CD, nempe vt, BO, ad, OC, hoc est, sumpta communi altitudine, AC, vt rectangulum sub, BO, AC, ad rectangulum sub, OC, CA. Igitur quadratum, CE, ad rectangulum sub, BI, CD, rationem habet com-

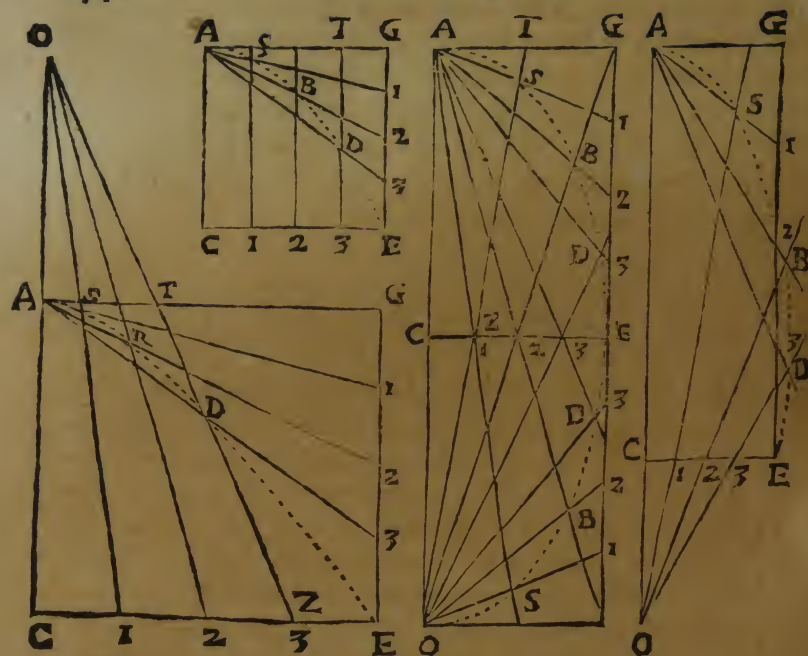
compositam ex ratione rectanguli sub, OB, AC, ad rectangulum, OCA, & rectanguli, OCA, ad rectangulum, OBA. Duæ rationes verò rectanguli sub, OB, AC, ad rectangulum, OCA, & rectanguli, OCA, ad, OBA, componunt rationem rectanguli sub, OB, AC, ad rectangulum, OBA. Ergo quadratum, CE, ad rectangulum, sub, BI, CD, erit vt rectangulum sub, OB, AC, ad rectangulum, OBA, idest (propter communem altitudinem, OB) vt, CA, ad, AB. In omnibus ergo sectionibus conicis (quod etiam in circuli circumferentia verificabitur) erit quadratum, CE, ad rectangulum sub, BI, CD, vt, CA, ad, AB. Sed in iisdem est, CA, ad, AB, vt, EG, ad, FI, propter æqualitatem oppositorum laterum parallelogrammorum, AE, AI, & EG, ad, HI, de foris sumpta media, GF, habet rationem compositam ex ratione, EG, ad, GF, & GF, ad, HI, Igitur quadratum, CE, ad rectangulum, sub, BI, CD, habet rationem compositam ex ratione, EG, ad GF, & GF, ad, HI. Sed idem quadratum, CE, ad rectangulum sub, BI, CD, habet rationem compositam ex ratione, CE, ad, BI, & CE, ad, CD; ergo duæ rationes, CE, ad, BI, & CE, ad, CD, simul sumptæ æquantur duabus rationibus, EG, ad, GF, & GF, ad, HI, simul sumptis. At ratio, CE, ad, BI, hoc est, AG, ad, AH, æquatur rationi, GF, ad, HI. ergo ratio reliqua reliquæ æquabitur. Erit ergo, GE, ad, GF, vt, CE, ad, CD. Quod ostendendum erat.

23. Sexu
Elem.4. Sexu
Elem.

C O R O L L A R I U M

Hinc manifestum est si velimus ex gr sectionem describere circa diametrum, AC, vertice, A, & in hyperbola, ac ellipsi latere transverso, AO, tangat autem, AG, sectionem in, A, efficiatque cum, AC, quemcumque angulum, in super sumpto quocunque puncto, E, per quod sectio transire debeat; quod, completo parallelogrammo, AE, sectisque, CE, EG, ex. gr. in punctis, D, F, ita ut sit, EC, ad, CD, sicuti EG, ad, GF, ac ductis in parabola, HD parallela, AC, & AF, in reliquis verò, OD, AF, iisque, si opus sit, indefinitè productis; I, punctum occursum earundem erit in proposita sectione.

PRO-



PROPOSITIO II.

Isdem suppositis Sectiones Conicas describere.

S It vertex, A, diameter, AC, latus transversum, AO, punctum in sectione, E, tangensq; ipsam in, A, nempe, AG, quæ cum, AC, efficiat quemcumque angulum, sitque ipsa sectio, AE, describenda. Complebimus ergo parallelogrammum, ACEG, cuius latera ab, A, remotiora, nempe, CE, EG, in quocunque partes æquales (utrobique tamen eiusdem numeri) ut ex. gr. in quatuor diuidemus, puncta diuisionum notantes numeris 1. 2. 3. &c. à, C, G, versus, E. Deinde in omnibus sectionibus ducemus ab, A, ad puncta notata in, GE, occultas rectas lineas. Rursus in parabola extendemus per puncta notata in, CE, indefinitas occultas parallelas ipsi, AC, sed in reliquis ab, O, ad eadem puncta

puncta in, CE, notata extendemus, ac producemus, si opus sit, occultas rectas lineas, ita ut occurrant prioribus ductis ab, A, ad puncta in, GE. Puncta ergo occursum primarum, secundarum, &c. ut, S, B, D, erunt in proposita sectione per Prop. ant. per quæ &, E, curuam leniter extendentes, habebimus optatam sectionem per puncta continuata descriptam, ut apparet in apposita figura.

S C H O L I U M I.

AD parabolam ergo describendam sufficit dari, AC, CE, ad quemcumque angulū, statuto vertice, ut in, A, in reliquis verò præter hæc determinandū est latus seu diameter transversa, AO. Similiter quoad ellipsim obseruandum est iisdem datis nos posse describere quartam partem eiusdem, seu eadem quarta minorem, aut maiorem, modo iam dicto: cum verò semiellipsim describere volumus, opus erit operationem efficere tam in parallelogrammo, OE, quam in, AE, quæ omnia apparent in proximè superiori Schemate. Porro integras sectiones hæc arse delineari posse superfluum est commemorari.

S C H O L I U M II.

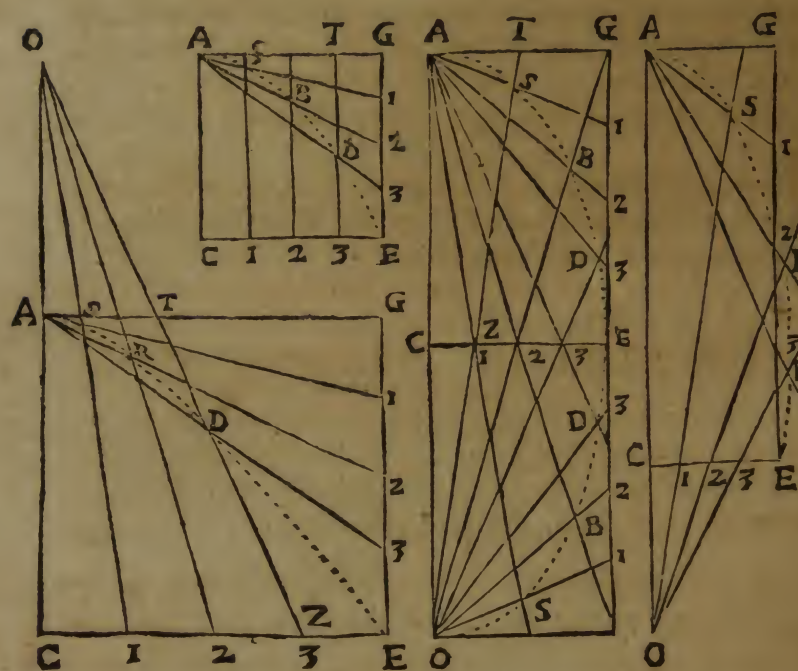
ET si dictum est, CE, EG, in aquas partes, eiusdemque numeri esse diuidendas, id tamen non est absolute necessarium, sed sufficit eas proportionaliter secari, ut patet ex Cor. Prop. ant. Hoc autem facile obtinebimus, si ducentes rectam, CG, exempli gr. ut patet in figura hyperbole Propositionis primæ, eidem, CG, parallelas quocunque extendemus, ut, QL, PM, DF, RN, ipsasque spissiores ubicunque opus esse agnouerimus, ut accuratius sectio describi possit: dictæ enim parallelæ proportionaliter secabunt latera, CE, EG. Has quidem parallelas facile ducere artificibus notissimum est, verum facillime fieri poterunt, si, quemadmodum apparet in figura Prop. primæ, & in parallelogrammo, AE, seorsim posito, cuius productum est latus, AG, indefinitè in, X, assumpserimus circino quascunque

L II

aquas

2. Sec.
Et.

aequas partes tam in, CE , quam in, GX , iungentes notata puncta, prima nempe, secunda, tertia, &c. rectis lineis, quaerunt ipsi, GC , parallela, & hoc in omni sectione fieri poterit.



SCHOLIUM III.

Si in superiori schemate Propositionis secunda daretur ex, gr. AT , latus rectum describenda parabola, seu, AT , latus rectum, & OA , transversum describenda hyperbola, vel ellipsis, in angulo, GAC , tangentis, GA , in vertice, A , cum diametro, AC , non alio, ut antea, dato puncto in sectione, prius aliquod punctum in ipsa sectione quaereremus, quod sic fieret. In diametro AC , sumpto quocunque puncto, C , & ab eo ducta tangenti, AG , indefinita parallela, CE , rectangulo sub, CA , AT , in parabola aequale sumeremus quadratum, CE . At in reliquis, iuncta, AT , eaque producta indefinitè versus, T , ut haberetur pun-

14. Sec.
lem.

punctum, Z, rectangulo sub, AC, CZ, sumeretur aequale quadratum, CE. & completo parallelogrammo, AE, ipsa sectio, AE, ut supra describeretur. Manifestum est enim quod punctum, E, esset in sectione, cum quadratum, CE, sit aequale rectangulo sub, CA, & AT, latere recto in parabola; in hyperbola verò, & ellipsi aequatur quadratum, CE, rectangulo sub, AC, CZ, excedens in hyperbola latus rectum, AT, & in ellipsi ab eo deficiens rectangulo simili ei, quod sub latere recto, AT, & transverso, AO, continetur, ijs conformiter, quae in Elementis conicis traduntur.

11. 12. 13.
1. Conic.

Cum superiorem praxim ex me quoque intellexissent Torricellius, & Roccha, eiusdem ipsi quoque diuersam à superiori, elegantemque rationem attulerunt.

De mirabili quadam vi parabolica.

Cum plures, easque admirandas parabola proprietates habeat, quarum nonnullas in nostro Speculo vltorio explicauimus, nunc quandam insignem trademus, quae consistit in cogendis, ac conflipandis lineis quas intra sui cauitatem excipit ipsa parabola, seu conoides parabolicum axi equidistantes, ut mox duabus praemissis sequentibus lemmaticis Propositionibus ostendetur.

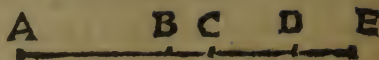
PROPOSITIO III.

Si quaecunque recta linea, AE, in duobus punctis, CD, ita secta fuerit, ut sit, AE, ~~AD~~ ED, quemadmodum quadratum, AC, ad quadratum, CD: tres rectae, AE, CE, DE, proportionales erunt.

LII 2

Si

SI enim, CE, non est media proportionalis inter, AE, ED, talis erit vel maior, vel minor ipsa, CE,



19.5. Ele.

fit primò maior, vt, BE. Cum ergo sit tota, AE, ad totam, BE, sicuti ablata, BE, ad ablatam, ED, erit reliqua, AB, ad reliquam, BD, vt tota, AE, ad totam, BE. Quoniam verò,

Cor. 2. 20
6. Elem.

AE, BE, DE, supponuntur proportionales, erit, AE, ad, ED, vt quadratum, AE, ad quadratum, EB. Et quia vt, AE, ad, EB, ita ostensum est esse, AB, ad, BD, ideò quadratum, AE, ad quadratum, EB, erit vt quadratum, AB, ad quadratum,

22.6. Ele.

BD. Sed vt quadratum, AE, ad quadratum, EB, ita dictum est esse, AE, ad, ED. Ergo vt, AE, ad, ED, ita erit quadratū, AB, ad quadratum, BD. Sed vt, AE, ad, ED, ita supponitur esse quadratum, AC, ad quadratum, CD. Igitur quadratum, AC, ad quadratum, CD, erit vt quadratum, AB, ad

14.6. Ele.

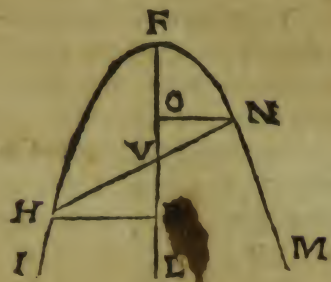
quadratum, BD. Sed prima est maior tertia, nempe quadratum, AC, quadrato, AB, ergo & secunda quarta maior erit, hoc est quadratum, CD, maius quadrato, BD, sed & eodem minus est, quod est absurdum. Non ergo maior, CE, erit media proportionalis inter, AE, ED. Eodem modo ostendemus nec minorem, CE, talem esse posse. Ergo, CE, erit talis media, ipsaque, AE, CE, DE, proportionales erunt. Quod, &c.

PROPOSITIO IV.

Sit quaecunque parabola, IFM, cuius vertex, F, diameter, FL, in qua sumpto quocunque puncto, V, per ipsum hinc inde usque ad sectionem producat recta, NVH, non parallela tangenti in, F, & à punctis, H, N, ordinatae ad, FL, applicentur, HP, NO. Dico tres, FP, FV, FO, proportionales esse.

Est

Est enim quadratum, HP, ad quadratum, NO, ut, PF, ad, FO. Sed ut quadratum, HP, ad quadratum, NO, ita est quadratum, PV, ad quadratum, VO; sunt enim triangula, HPV, OVN, similia propter parallelas, HP, NO, & ideo, HP, NO, PV, VO, proportionales, ac subinde eorum quadrata proportionalia. Ergo, PF, ad, FO, erit ut quadratum, PV, ad quadratum, VO, & consequenter tres, FP, FV, FO, proportionales erunt. Quod, &c.

20. Primi
Conic.4. Sex.
Elem.

Ex. ant.

PROPOSITIO V.

Si in parabolam, DAL, cuius Vertex, A, axis, AL, basis, DL, focus, N, inter, IA, cadens, & per, N, applicatam, CNM, incident parallelæ eidem axi, AI, ut, ED, HL, OC, PM, FB, GT, binæ æquedistantes ab, AI, secantesq; DL, in punctis, Q, S, T, R, hæ autem, ac reliquæ huiusmodi reflectantur à linea, DAL, vel à caua superficie, DAL, conoidis, DAL, incident omnes in focum, N, ut probavi in meo Speculo Ustorio Cap. 9. Dico nunc quod, si eadem protensa ultra focum, N, secundò ab eadem linea, vel superficie, DAL, reflectantur, eadem parallelæ incidentes in portiones, DC, ML, & æquidistanter axi, AI, & conspiciuntur egredientur ex, DAL, quam ingressæ fuerint.

Paral-

Parallelæ enim
ex. gr. ED; H
L, reflexæ à punctis,
D, L, concurrēt, in,
N, & ultra protensæ
iterum incident in
puncta, Y, B, à qui-
bus reflectētur per,
YT G, BSE, æquidi-
stantes ipsi, AI, per
ostensa in meo spe-
culo vstorio Cap. 9.
in Coroll. hoc est
strictiores erunt in
egressu, quam in in-
gressu, quantum, S
T, minor est, DL.
Hoc idem ostende-
mus de parallelis, O
C, PM, quæ alterna-
tim reflectūtur, nem-
pè, OC, per, CMP,
&, PM, per, MCO,
& idem probabitur
de alijs axi paralle-

lis inter, ED, OC, vel inter, HL, PM, cadentibus, quod nem-
pè, & parallelæ axi, & constipatiores reflectātur in egressu à
linea, vel superficie, DAL, quā fuerint in ingressu. Quod, & c.

S C H O L I V M.

Parallelæ intra, OC, PM, ingredientes in egressu distan-
tiores erūt inter se, ut facile constabit si inspiciamus, FSB,
GTY, quæ ingressæ in distantia, ST, egrediuntur per, LH, DE, in
distantia, DL. Vis ergo parabolica tam in parabola, quam in co-
noide parabolico, DAL, cernitur in parallelis incidentibus in, D
C, LM, quæ omnes secundo reflectuntur per portiones, CB, YM.
Itaq; cum basis conoidis, DAL, sit circulus, DL, mensura quāti-
tatis parallelarum axi, AI, ingredientium cauam superficiem
eiusdem,

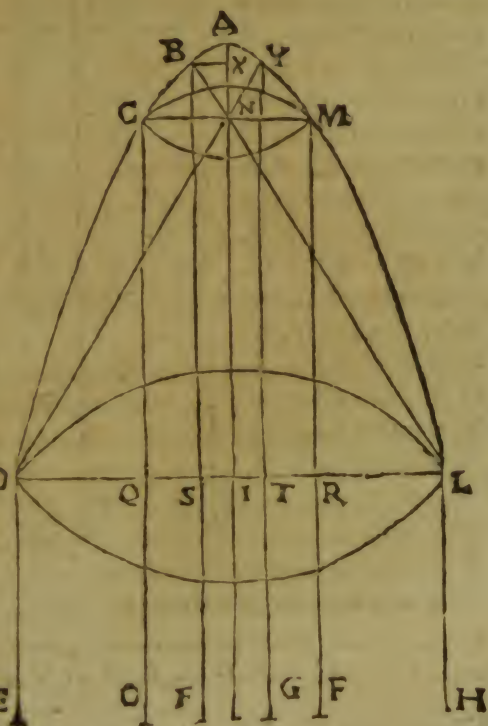


eiusdem, incidentiumq; in, DC, ML, erit armilla, cuius latitudo est, DQ, RL, & mensura earundem parallelarum reflexarū post concursum in, M, iterū à cana superficie, CB, TM, egredientiūq; ex dicta cana superficie, erit armilla, cuius latitudo, QS, TR. Si ergo detegamus quam rationem habeat armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, sciemus, qua ratione in proposita superficie conoidali, DAL, magis constipentur parallela axi, AI, in egressu, quam fuerint in ingressu, quod ex sequenti Propos. constabit.

PROPOSITIO VI.

In eadem superiori figura iisdem suppositis, armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, est ut, IA, ad, AN.

Quoniam enim circulus, D L, ad circulum, QR, est ut quadratum, DL, ad quadratum, QR, diuidendo, armilla, DQ, RL, ad circulum, QR, erit ut excessus quadrati, DL, super quadratum, QR, ad quadratum, QR. Insuper circulus, QR, ad circulum, ST, est ut quadratum, QR, ad quadratum, ST, unde per conuersionem rationis, circulus, QR, ad armillam, QS, TR, erit ut quadratum, QR, ad excessum q. QR, super q. ST.



Ergo

4. huius.
20. Primi
Conic.

Ergo ex æquo armilla, DQ, RL , ad armillam, QS, TR , erit ut excessus $q. DL$, super $q. QR$, ad excessum $q. QR$, super $q. ST$, vel ut excessus $q. DI$, super $q. QI$, ad excessum $q. QI$, super $q. SI$. Applicetur nunc, BX , unde, AI, AN, AX , proportionales erunt, sed ut, AI, AN, AX , ita sunt quadrata applicatarum, DI, CN, BX , vel quadrata rectorum, DI, QI, SI , ergo hæc erunt proportionalia. Cum ergo totum $q. DI$, ad totum $q. QI$, sit ut $q. QI$, ablatum ad ablatum $q. SI$, erit reliquum ad reliquum, idest excessus $q. DI$, super $q. QI$, ad reliquum, idest ad excessum $q. QI$, super $q. SI$, ut totum ad totum, nempe ut $q. DI$, ad $q. QI$, seu ad $q. CN$. Sed excessus $q. DI$, super $q. QI$, ad excessum $q. QI$, super $q. SI$, est ut armilla, DQ, RL , ad armillam, QS, TR , ut probatum est. Et ut $q. DI$, ad $q. CN$, ita, IA , ad, AN . Ergo armilla, DQ, RL , ad armillam, QS, TR , erit ut, IA , ad, AN . Quod ostendendum proponebatur.

20. Primi
Conic.



COROLLARIUM I.

Flunt ergo parallelæ axi, AI , in egressu constipatiores, quam erant in ingressu secundum rationem axis, IA , ad, AN que

est quarta pars lateris recti parabola, DAL , ut ego ostendi in speculo vstorio, Cap. 9.

COROLLARIUM II.

Patet etiam si detur ratio diametri basis conoidis parabolici ad illius axim, quod poterit proportio dictae constipationis manifestari. Vt si in eadem figura detur ratio, DL , ad, IA , constabit ratio, DI , ad, IA , & quadrati, DI , ad $q. IA$, sed quadratum, DI , aequatur rectangulo sub, IA , & latere recto parabola, DAL , ergo nota erit ratio rectanguli sub, IA , & dicto latere recto, ad quadratum, AI , hoc est (propter communem altitudinem, AI ,) ratio lateris recti ad, AI . Cum verò, AN , sit $\frac{2}{3}$ dicti lateris recti, conuertendo, constabit quā rationem habeat, IA , ad, AN , & subinde innotescet proportio dictae constipationis.

SCHOLIUM.

Iuxta superius Cor. 2. effecta est sequens tabella, in cuius prima columna ponuntur numeri partium axis cuiuscunque conoidis parabolici, cuius basis diameter semper supponitur earundem partes 12. in 2. verò columna habentur numeri explicantes proportionem dictae constipationis in proposito conoide.

Vt ex gr. si in superiori figura, DL , fuerit 12. & axis, AI , earundem partium 18. in columna axis quaesito num. 18. sumo e regione ipsius adiacēte columna sub titulo proportionis, numeros 36. & 1. qui indicāt mihi in tali conoide parallelas axi fieri constipatiores in egressu, quam in ingressu secundum rationem 36. ad 1. Constat autem ex superiori tabella si axis fuerit 3. & diameter basis conoidis 12. quod in ingressu & egressu erit eadem parallelarum constipatio; & si axis fuerit minus quam partes 3. in egressu potius parabole disgregabuntur. & propterea tabella incipit à partibus 3. ipsius axis.

Axis	Proportio
3	1. 1
4	16. 9
5	25. 9
6	4. 1
7	49. 9
8	64. 9
9	9. 1
10	100. 9
11	121. 9
12	16. 1
13	169. 9
14	196. 9
15	25. 1
16	256. 9
17	289. 9
18	36. 1
19	361. 9
20	400. 9
21	49. 1
22	484. 9
23	529. 9
24	64. 1

Mmm

De

De Perspicillorum focus.

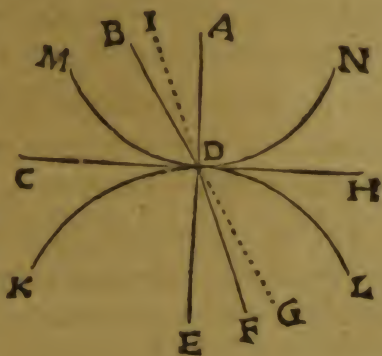
Si quis careat prænominato Speculo Historio, in quo nomen foci explicari, sciat focum à me appellari punctum illud, ad quod radij incidentes in quandam lineam, seu superficiem, siue paralleli, siue conuergentes, vel diuergentes reflexi concurrunt, aut à quo diuergunt: Ut in superficiebus, quæ à sectionibus conicis per ipsarum resolutionem circa axim oriuntur, dum in ipsas incidunt radij, quarum Tabellam tradidi in dicto Speculo Cap. 23. Huius ope cum dicti foci præcisè sciri possint, haud tamen hucusq; detegere licuit quod sciam ubinam radij paralleli axi ingredientes parabolam, hyperbolam, vel ellipsim crystallinam post ipsam refracti præcisè concurrant. Id verò satis propinq; obtinuit Keplerus in aliquibus lentibus crystallinis, seu perspicillis superficiebus sphericis contentis, docens in sua Dioptrice ubinam esset punctum concursus dictorum radiorum axi, hoc est radio per Umbilicum lentis perpendiculariter illius superficiebus transeunte parallelorum, quem & focum appellant. Cum verò non in omnibus perspicillorum generibus, quæ planis, & cauis, vel concavis sphericis superficiebus promiscuè comprehenduntur focos adinueniret, propterea quædam hic circa huiusmodi doctrinam tum ad eam elucidandam, tum ad prædictos focos proximè inueniendos, eiusdem Kepleri suppositionibus insistens, quæ meæ menti occurrerunt, tradere decreui. Assumo igitur ex eodem hoc præcipuè, quod nempè radij
lumi-

luminose crystallum ingredientiēs vsq; ad gradum 30. inclinationis habent angulum refractionis, qui est circiter tertia pars inclinationis, quo pramisso sequentes Propositiones demonstrantur.

PROPOSITIO VII.

Radij è crystallo in aerem egressi cum inclinatione infra gradus 20. refracti superaddunt suae inclinationi dimidium eiusdem inclinationis.

Sit crystallum, CEH, & eius plana superficies, CH, discriminans crystallū ab aere, CAH, insuper sit radius, AE, incidens perpendiculariter ipsi, CH, qui ab aere, CAH, ingrediens in crystallum, CEH, penetrabit irrefractus ex cōmuni Opticæ doctrina. Sit nunc radius,



BD, ipsi, CH, & AD, obliquus, faciēs cum, AD, angulum, BDA, nempe inclinationem radij, BD, (Keplerus enim vocat inclinationē radij angulum, qui cōtinetur radio incidēte in superficiē diaphani, & perpendiculari super eandē superficiem a puncto incidentiæ ducta) qui nō superet gradus 30. Radius ergo, BD, ab aere, CAH, in crystallū, CEH, ingressus non rectē incedet, vt per, DG, sed quia crystallū est medium densius, quam aer, idēd, BD, incedet vt per, DF, accedens ad perpendicularē, DE, angulusque, GDF, dicitur refractionis radij, BD, cuius inclinatio est quoque angulus, EDG, cum enim sint rectæ, BDG, ADE, idēd anguli,

M m m 2

BDA,

Diopr.
Kepleri
num. 1.

Axioma
opticū
Diopr.
num. 2.

BDA, EDG, sunt æqua-
les. Quia verò ex allata
Kepleri suppositione re-
fractio est tertia pars incli-
nationis (intellige semper
circiter) vsque ad gr. 30.
inclinationis, ideò angu-
lus, GDF, erit $\frac{1}{3}$ ipsius,
GDE, &, GDF, $\frac{1}{2}$ ipsius,
FDE. Si ergo acceperim-
us è conuersò radium,
FD, tanquam egredien-



Axioma
opticum
Diop. nu.
2.

tem ex cryſtallo, CEH, in aerem, CAH, non ibit per
DI, quæ ſit in directum ipſi, DF, ſed quia à denſiori, ægredi-
tur in medium rarius, diſcedet à perpendiculari, AE, vt com-
muniter Optici docent. Sed dico quod incedet per, DB.
Nam quando ingreditur, BD, & per, DF, ergo egrediens, FD,
ibit viciffim per, DB, eadem enim eſt refractio radiorum, ſi-
uè illi natura ſua ingrediantur ſiue egrediantur, vel vt tales
conſiderentur, inquit Keplerus num. 2. in ſua Dioptrice.
Cum ergo anguli, EFD, ADI, ſint æquales, vt &, FDG,
BDI, ſit autem, FDG, $\frac{1}{2}$ ipsius, FDE, erit quoque, BDI, $\frac{1}{2}$ ip-
ſius, IDA. Sed, IDA, non excedens gr. 20. cum æquetur
ipſi, FDE, inclinationi radij, FD, tanquam egredientis in
aere, eſt eiufdem pariter inclinatio; BDI, verò refractio.
Ergo radius egrediens à cryſtallo in aerem infra gr. 20. in-
clinationis ſuperaddit ſuæ inclinationi angulum refractio-
nis, qui eſt eiufdem inclinationis ferè dimidium. Quod o-
ſtendere opus erat.

C O R O L L A R I U M I.

PAtet ergo infra gr. 30. inclinationis, radios ab aere in cry-
ſtallum ingreſſos facere angulum refractio-
nis, qui eſt $\frac{1}{2}$ in-
clinationis ſeu diminuerè per $\frac{1}{2}$ ſuam inclinationem, ſicuti di-
ctum eſt angulum, GDF, eſſe $\frac{1}{3}$ ipsius, GDE; & eoſdem radios à
cryſtallo in aerem egredientes infra gr. 20. facere angulum re-
fractio-
nis, qui eſt $\frac{1}{2}$ inclinationis, ſeu augere ſuam inclinatio-
nem per $\frac{1}{2}$ eiufdem, ſicuti probatum eſt, IDB, refractio-
nem radij,
FD,

FD, tanquam egredientis, esse $\frac{1}{2}$ ipsius, IDA, inclinationis, qua idem radius, FD, egreditur è crystallo in aerem per, DB.

COROLLARIUM II.

IN eadem superiori figura si crystallum non terminetur ad superficiem planam CH, sed ad conuexam, KDL, cuius centrum, E, vel ad cauam, MDN, cuius centrum, A, eadem quoque superius dicta verificabuntur. Cum enim radij transeuntes per centrum sphaericae superficiei sint eidem perpendiculares, idè erit, AE, perpendicularis tam superficiei sphaericae, KDL, quam, MDN, existenteque crystallo, KDE, vel, MDNE, ipsum penetrabit irrefractus. Erit quoque inclinatio radij, BD, ingredientis in cauam, MDN, crystallo superficiem angulus, BDA, vel, EDG. idem quoque erunt inclinatio eiusdem, BD, ingredientis in conuexam, KDL. Similiter inclinatio radij, FD, egredientis è crystallo, KDL, vel, MDN, in aerem erit angulus, FDE, vel, IDA, sicuti circa planam superficiem, CH, dicebatur.

SCHOLIUM.

ANtequam ad lentium focos inquirendos accedamus congruit prius intelligere varietates, quae in ipsis contingere possunt merito superficierum planarum, cauarum, & conuexarum sphaerarum, quibus comprehenduntur. Lentes ergo crystallinae (idem de vitreis intellige, in quibus refractiones sunt proximè eadem cum praedictis ut in Dioptr. numero 6. inquit Keplerus) sunt in forma disci orbicularis latiores, quam profundiores, verum cum sit parua profunditas eam negligit Keplerus, assumitque tamquam nulla esset. Illa ergo aut ex vna parte sunt plana, & ex altera conuexa, vel caue; vel sunt vrimque conuexa siue vrimque; caua, conuexitate, vel cauitate tam aequali, quam inaequali & has Keplerus puras quoque vocat. Similiter aut sunt ex vna parte conuexa, & altera caue, equali, vel inaequali, conuexitate, & cauitate, quas mixtas appellat: cum vero cauitas est ex maiori circulo, quam conuexitas, talis lens ab eo dicitur, Meniscus. Propositum igitur mihi est tantum in presenti demonstrare in omnibus unicam regulam generalem pro inueniendo earum foco proximè verificari, quae est huiusmodi.

Regu-

Dioptr.
num. 25.Diop. num.
26.Diop. num.
27.Diop. nu.
30.

Regula generalis ad inueniendos lentium, seu perſpicilo- rum focos .

IN omnibus huiusmodi lentibus, conuexis, vel cauis in contrarias partes vergentibus, vt aggregatum ex ſemidiametris conuexitatum, vel cavitatum (ſed conuexis, vel cauis in eandem partem vergentibus, vt eorundem ſemidiametrorum differentia) ad ſemidiametrum conuexitatis, vel cavitatis radios parallelos aſpicientis: ita duplum reliquæ ſemidiametri eſt ad diſtantiā foci ab ipſa lente.

Diop. nu.
334

Postulamus autem & nos cum Keplero, vt lentis conuexæ, concavæ, vel mixtæ ſuperficies vtrique centrum ſui circuli habeat in eadem linea, quæ per medium eiſdem vmbilicum tranſeat.

P R O P O S I T I O V I I I .

Sit lens, ACB, planam habens ſuperficiem, AB, ad radios parallelos conuerſam, & conuexam, ACB, non excedentem gradus 30. cuius centrum, D; tranſeat vero radius indefinitus, EDMK, per centra, D, M, ſeu lentis vmbilicum, qui erit perpendicularis tam ſuperfici, AB, quam, ACB, & idè penetrabit lentem irrefractus, is verò facit conuexum, ACB, in, C; intelligantur nunc quocunque alij radij eidem, EK, paralleli venientes ex parte, E, & in planum, AB, incidentes, cui neceſſariò perpendiculares erunt, & idè irrefracti peruenient ad conuexum, ACB. Dico hos omnes in aerem egredientes,

tes, & indefinite protensos, concurrere in punctum ip-
sius, EK, quod abest à lente, ACB, per duas ferè semi-
diametros, DC, convexitatis, ACB.

Prop. 2nd

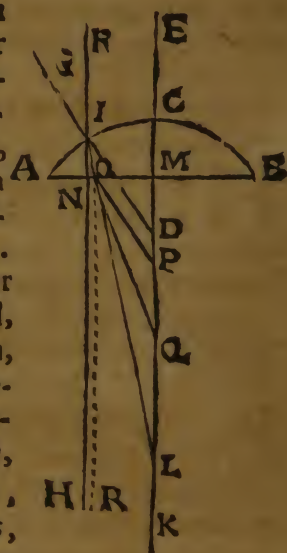
Ex Trigo.
nometria.

dum erat. Hæc paululum differt à demonstratione, quam in Dioptr. affert Keplerus num. 35. quæ ad ipsius ampliorem declarationem hic posita est.

PROPOSITIO. IX.

Si eadem lens, ACB, obuertat conuexum, ACB, ad radios parallelus; Erit nihilominus eiusdem focus distans a lente ferè per diametrum conuexitatis.

SIt, EK, radius vt supra per medium lentis, M, C, incedens, cui sumatur quicunque alius parallelus, vt, FI, incidens in conuexum in, I, qui ingreditur lentem ibit non rectè, vt per, INH, sed accedet ad perpendicularem transeuntem per, I, quæ sit; DIG, diminuens per $\frac{1}{2}$ suam inclinationem. Cum ergo inclinatio radij, FIH, super cōuexum, ACB, sit angulus, GIF, vel, HID, ibit per, IL, faciens angulum, HIL, refractionis, qui erit $\frac{1}{2}$ inclinationis, HID, & $\frac{1}{2}$ anguli, LID. Cum verò, LIH, æquetur sibi coalterno, ILD, erit, ILD, $\frac{1}{2}$ ipsius, LID, quare cum, ID, ad, DL, sit proximè vt angulus, L, ad angulum, I, sicuti in demonstratione Prop. ant. dicebatur, erit, ID, $\frac{1}{2}$ DL, & conuertendo, erit, LD, dupla, DC, &, LC, tripla, CD. Ex quo apparet, si radijs parallelis ipsi, EK, post incidentiam in conuexum, ACB, nil aliud contingeret, quod omnes concurrerent in, L, nēpè in distantia sexquidiametri conuexitatis ab ipsa lente. Sed quia, IL, occurrit plano, AB, vt in, O, ibique iterum refringitur, quærendum est ad quod punctum ipsius, FK, concurrant. Ducatur ab, O, recta, OR, parallela ipsi, FH, & OP, ipsi, ID. Erit ergo angulus, ROL, inclinatio radij, IO, super,



super, AB, qui idcirco egrediens à crystallo in aerem ipsam per dimidiū augebit; incedat per, OQ, angulus ergo, LOQ, erit $\frac{1}{2}$ anguli, LOR, & LOR, est $\frac{1}{2}$ ipsius, LOP, sicuti, LIH, est $\frac{1}{2}$, LID, vt superius probatum est. Ergo, LOQ, erit $\frac{1}{2}$ ipsius, LOP. Sed $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{1}{2}$, quare, LOQ, LOR, scilicet angulus, QOR, erit $\frac{1}{2}$ anguli, ROP, quare, ROQ, QOP, vel, OQP, POQ, erūt æquales, nam coalterni, ROQ, OQP, sunt æquales. Erit igitur, PQ æqualis ipsi, PO, sicuti &, QD, erit ferè æqualis ipsi, DI, in lentibus enim paræ crassitiei sunt, IO, CP, quasi parallelæ. Quare erit, QC, ferè dupla, CD, hoc est erit ferè tantum à vero aberratio, quantum importabit lentis crassities, ob quam, QD, verè maior est quā, DI. Erit igitur foci, Q, à lente, ACB, distantia ferè integræ diametri conuexitatis. Quod &c.

COROLLARIUM I.

Hinc patet radios parallelos ipsi, EK, in conuexum ingredientes si nihil amplius eis accidere supponatur, omnes concurrere in punctum, vt, L, distans à conuexo per tres semidiametros conuexitatis.

COROLLARIUM II.

Patet insuper nihil referre vram faciem lentis ad parallelos conuertamus, nempe vel planam vel conuexam, prouenit enim vtrouque ferè eadem foci distantia à lente. Hoc inculcat Keplerus in Dioptr. num. 138. rationibus, quas Lector ibidem videre poterit quanti valeant; fatetur autem non afferri ab eo accuratam demonstrationem, quapropter studiosus ab eo ad numeros ablegatur, quibus detegat quantum à veritate aberret hæc propositio.

Nos autem
que
potuimus ad eam confirmandam
in medium attulimus.

Nnn

PRO.

plum erit lateris, IG; sed, AI, insensibiliter differt, ab, AR, in lentibus parvæ crassitiei. Ergo, AR, erit fere dupla, RG. Abest ergo, A, focus à lente fere per diametrum cauitatis. Quod, &c.

PROPOSITIO XI.

Si eadem lens, DHFE, obuertat cauam, ERF, ad radios parallelos: erit nihilominus eiusdem focus distans à lente ferrè per diametrum cauitatis.

Sit eadem lens, DHF

E, obuertens cauū,

ERF, ad radios paralle-

los, axis, PO, transiens

per cētra, G, R, L, cui vnus

radiorum, vt, BI, æqui-

distet incidens in cauū,

ERF, vt in I, qui inde-

finiè protendatur vt in,

N, secans planum, DH,

in, S. Similiter à centro,

G, per, I, educatur, GIC,

Inclinatio ergo radij, B

N, super cauū, ERF,

erit angulus BIG, vel, N

IC. Radius ergo, BI,

incidens in crystallum,

non ibit per, IS, sed ac-

cedens ad perpendicula-

rem, GC, diminuet per

$\frac{1}{3}$ suam inclinationem, in-

cedens per, IZ, quæ inde-

finiè sit producta in, X, K,

constituitque angulum, XIN,

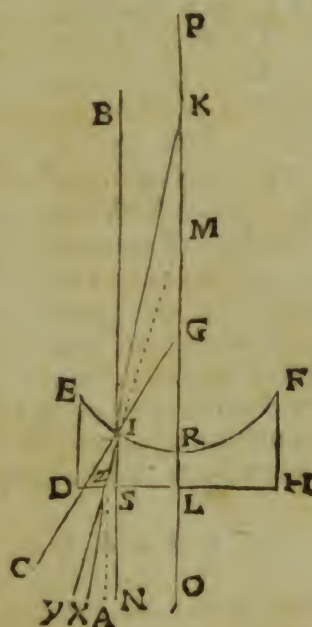
$\frac{1}{3}$ ipsius, NIC, & $\frac{1}{3}$ ipsius, XIC.

Sed, NIX, æquatur angu-

lo interiori, GKI, & XIC, ipsi, KIG;

duplus ergo erit angulus,

KIG,



Cor. 2. 7.
huius.

Cor. 1. 7.
huius.

Nnn 2

KIG,

COROLLARIUM, II.

Colligitur ulterius quamcumq; lentis huiusmodi faciem ad radios parallelos convertamus, eandem foci distantiam à lente, integra nempe diametri cavitatis, provenire.

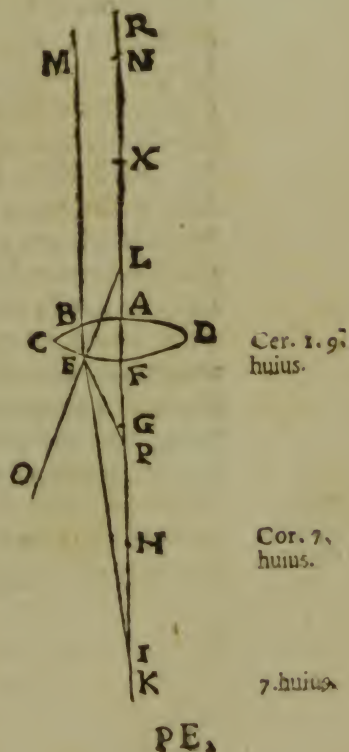
Hac de lentibus ex una parte planis ostendimus, in quibus tamen & præallatam regulam generalem quodammodo verificari inferius declarabimus.

Vide
Schol. 27.
huius.

PROPOSITIO XII.

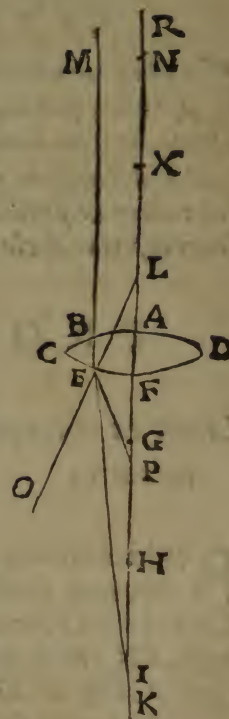
Lentis ex utraque parte quomodocumque convexæ focum inuenire.

Sit lens utrinque convexa quomodocumque; CADE, cuius arcus, CAD, CFD, non superent gr. 30. axis, RK, & in eo, L, centrum convexi, CFD, & G, centrum convexi, CAD, æqualesq; FL, LX, XN, inter se, nec non, AG, GH, HI, pariter inter se. Quæritur focus huius lentis. Sit, MB, vnus radiorum ipsi, RK, parallelorum lenti incidens in, B, qui ulterius protensus incideret in, I, si non occurreret alteri convexo, CFD, sit tamen ducta, BEI, recta occurrens convexo, CFD, in, E, perque, E, ab, L, educatur, LEO. Quoniam ergo radij, BI, inclinatio super convexum, CFD, est angulus, BEL, vel, OEI, ideò radius, BE, è lente in aerem egrediens ibit per, E, P, faciens angulum, PEI, dimidium ipsius, IEO. Quoniam verò ut angulus, PEI, ad, PIE, ita est, IP, ad,



PE, vel ad, PF, (in parvis enim lentibus insensibiliter differunt, PE, PF,) ideò vt duplex anguli, PEI, nempe vt, OEI, vel duo simul, ELI, EIL, ad eundem, EIL, ita duplum, IP, ad, PF, vel ita, IP, ad $\frac{1}{2}$, PF, & diuidendo, vt angulus, ELI, ad, EI L, ita excessus, IP, super $\frac{1}{2}$, PF, ad $\frac{1}{2}$, PF. Sed vt angulus, ELI, ad, EIL, ita, EI, ad, EL, vel ita, IA, ad, LF, (insensibiliter enim differunt, IE, IA, ob lentium paruitatem) ergo, IA, ad, LF, erit vt excessus, IP, super $\frac{1}{2}$, PF, vel, PA, neglecta lentis crassitie, ad $\frac{1}{2}$, PA. Et componendo, erit, IA, cum, LF, ad, LF, vt, IP, ad $\frac{1}{2}$, PA. Vnde erit, IA, cum, LF, ad duplam, LF, seu ad, XF, vt, IP, ad, PA, & iterum componendo, erit, IA, cum, LF, &, XF, idest erit, IA, cum, FN, ad, XF, vt IA, ad, AP. Et permutando, erit, IA, cum, FN, ad, IA, vt, XF, ad, AP, vel erit, GA, cum, FL, (prædictorum subtripla) ad, GA, vt, XF, seu dupla, LF, ad, AP, distantiam foci, P, à lente, CD, eodem enim modo reliquos radios ipsi, RK, parallelos ad, P, concurrere ostendemus. Concluditur ergo quod vt aggregatum ex semidiamentris conuexitatum, nempe, GA, FL, est ad semidiamentrum, GA, conuexitatis parallelos aspicientis, ita duplum semidiometri reliquæ, LF, est ad, AP, distantiam foci à lente. Et hæc est regula generalis superius tradita. Datis igitur dictis semidiamentris, poterit quæsitus focus obtineri. Quod &c.

Post
Schol. 7.
huius.



COROL-

COROLLARIUM I.

EX hoc constat focum lentis utrinque equaliter conuexe distare à lente ferè semidiametra conuexitatis. Aggregatum enim semidiametrorum conuexitatum, quia sunt æquales, est ad alteram semidiametrum, ut 2 ad 1. sed ita est duplum reliquæ semidiametri ad distantiam foci. Ergo hoc duplum ad distantiam foci est ut 2. ad 1. focus ergo per unam semidiametrum conuexitatis distabit à lente. Hoc autem probat quoque particulari demonstratione Keplerus in Dioptr. num. 39. quod nos per hanc omnibus lentibus utrinque conuexis communem collegimus.

COROLLARIUM II.

Patet insuper eandem ferè distantiam foci à lente inæqualiter conuexa prouenire, quancumque faciem ad parallelos obuerteris. Est enim semper ut aggregatum semidiametrorum ad semidiametrum conuexi parallelos aspicientis, ita duplum reliquæ semidiametri ad distantiam foci, ut probatum est. Altera autem istarum semidiametrorum vocetur, A, & reliqua, B. Si ergo conuexum ipsius, A, respiciat parallelos, erit ut, A, B, ad, A, ita duplum, B, ad distantiam foci. At si conuexum ipsius, B, respiciat parallelos, erit ut, A, B, ad, B, ita duplum, A, ad distantiam foci. Hinc autem proueniunt foci æquales à lente distantia, quia cum sit, A, B, ad, A, ita duplum, B, ad distantiam foci, rectangulum sub, AB, & distantia foci æquatur rectangulo sub, A, & duplo, B. Similiter cum sit, A, B, ad, B, ita, duplum, A, ad distantiam foci, rectangulum sub, A, B, & distantia foci æquatur rectangulo, sub, B, & duplo, A. Verum rectangulum sub, B, & duplo, A, æquatur rectangulo sub, A, & duplo, B, nam hæc habent latera reciproca. Ergo rectangulum sub, A, B, & prima foci distantia æquatur rectangulo sub, A, B, & secunda foci distantia, sed communis est altitudo, A, B, ergo ambe foci distantie, quancumque faciem lentis ad parallelos conueriamus erunt æquales.

PRO-

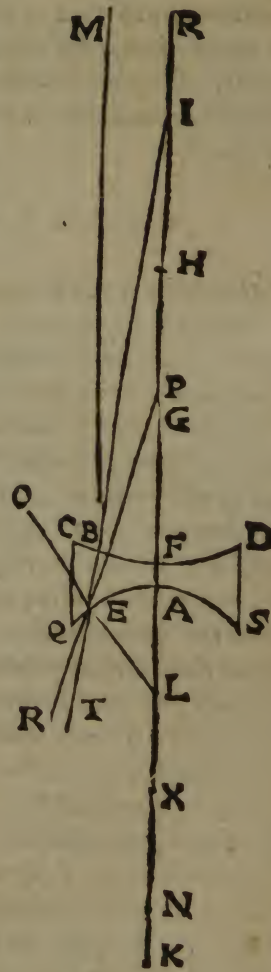
PROPOSITIO XIII

Lentis ex utraque parte quomodocunque caua focum inuenire.

Cor. 1. 11.
huius.
Cor. 2. 7.
huius.

7. huius.

Ratio eandem inueniendi, & demonstratio similis est præcedenti. Sit enim lens utrinque caua, CFDSAQ, cuius tamen arcus, CFD, QAS, non excedant gradus 30. centra cavitatū, G, L, & axis, RK, in quo ipsi, GF, sumptæ sint æquales, GH, HI, & ipsi, AL, pariter, LX, XN. Sit insuper vnus parallelorū axi, RK, ipse, MB, qui occurrens lenti in, B, refringetur per, BE, in directum ipsi, I, incidens ipsi, QAS, in E, per quod ab, L, educatur, LEO. Erit ergo radij, BE, inclinatio super, QAS, angulus, BEO, vel continuato, IBE, vt in, T, angulus, TEL. Si ergo fiat angulus, TER, $\frac{1}{2}$ ipsius, TEL, radius, BE, in aerem egrediens ibit per, ER, quæ producta versus, E, incidat axi, RK, vt in, P, eritque focus, P, à quo post duas in lente effectas refractiones diuergent paralleli venientes ex parte, R. Quoniam ergo angulus, PEI, ad, PIE, est vt, IP, ad, PE, vel ferè ad, PF, erit vt duplus anguli, PEI, vel, RET, nempè, TEL, vel vt duo simul, ELI, EIL, ad cun-



eundem, EIL, ita duplam, IP, ad, PF, vel ita, IP, ad $\frac{1}{2}$ PF.
 Et diuidendo vt angulus, ELI, ad, EIL, ita erit excessus, IP,
 super $\frac{1}{2}$ PF, ad $\frac{1}{2}$ PF. Sed vt angulus, ELI, ad, EIL, ita,
 EI, ad, EL, vel ita, IF, (neglecta lentis crassitie) ad, AL.
 Ergo, IF, ad, AL, erit vt excessus, IP, super $\frac{1}{2}$ PF, ad $\frac{1}{2}$ PF.
 Et componendo, erit, IF, cum, AL, ad, AL, vt, IP, ad $\frac{1}{2}$ PF.
 Vnde erit, IF, cum, LA, ad duplam, LA, hoc est ad, XA,
 vt, IP, ad, PF. Et iterum componendo, erit, IF, cum, AL,
 & AX, seu cum, AN, ad, AX, vt, IF, ad, PF: permutandoq;
 erit, IF, cum, AN, ad, IF, seu eorum subtripla, hoc est, GF,
 cum, AL, ad, GF, vt, AX, seu dupla, AL, ad, PF. Erit
 ergo & hic, vt aggregatum semidiametrorum cavitatum,
 nempe, GF, AL, ad semidiametrum cavitatis parallelis
 obuersæ, scilicet ad, GF, vt duplum reliquæ semidiametre-
 tri, hoc est dupla, AL, ad, PF, distantiam foci à lente
 conformiter superius traditæ regulæ generali. Datis igitur
 semidiametris poterit focus inueniri. Quod, &c.

Post
 Schol.
 7. huius.

SCHOLIUM.

Hic quoque vt in Cor. primo Prop. ant. factum est. cum
 cavitates erunt aequales, colligemus focum à lente
 distare ferè per semidiametrum cavitatis. Cum verò cavi-
 tates erunt inaequales concludemus, vt in Cor. 2. proxi-
 mè superiori, eandem foci distantiam à lente pro-
 venire, quamcunque illius faciem ad
 parallelos radios con-
 uertamus.
 Hactenus de lentibus egimus, quas Ke-
 plerus puras appellauit. nunc verò
 transibimus ad
 mixtas.



Ooo

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Si lens sit conuexa ex vna parte, & ex altera caua, conuexumque aspiciat parallelos axi. Dico si centrum cavitatis fuerit distans à conuexo per sexquidiametrum eiusdem conuexi, quod focus erit in ipso met centro cavitatis. At si centrum cavitatis distabit à conuexo plus eiusdem sexquidiametro, focus distabit à conuexo minus eodem sexquidiametro. Vt si centrum cavitatis distauerit minus sexquidiametro conuexi, sed plus semidiametro eiusdem conuexi, focus erit distans plus sexquidiametro conuexi. Et centro cavitatis foci distante per semidiametrum conuexi, nullus erit focus, sed radij axi paralleli refringentur quoque eidem paralleli. Ac denique centro cavitatis propius semidiametro conuexi ipsi conuexo existente, refringentur diuergentes à foco, qui erit ultra lentem versus parallelos axi.

Vide Keplerum in
Dioptr.
nu. 130.

Cor. 1. 9.
huius.

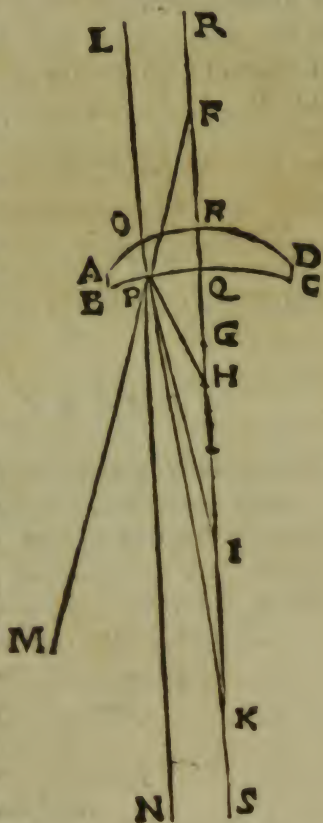
Sit lens, cuius conuexum, AED, aspiciens parallelos axi, RS, venientes ex R, eiusque centrum, G. Cautas vero sit, BQC, eiusque centrum, I, sexquidiametro conuexi, AED, distans, ab, E. Supponimus autem hic quoque, ut semper in hisce lentibus, arcus, AED, BQC, non excedere gr. 30. seu hinc idem ab axi de eisdem non assumi plus gradibus 15. Sit nunc vnus radorum ipsi, RS, parallelorum, LO, qui refringetur per, OI, in, I, focū. Secabitque, BQC, perpendiculariter, vnde in huiusmodi lentibus radij axi paralleli non patiuntur nisi vnā refractionem, quæ fit in, AED. Et per hoc satisfactum est Propositionis primæ parti.

Sup-

Supponamus nunc, cæteris ijsdem manentibus, centrū cavitatis, BQC, esse citra, I, vt in, K; radius igitur, LO, primò refractus in, AED, dirigitur in, I, sed incidens in, BQC, vt in, P, secundò refractus, recedet à perpendiculari, PK, & à, PI, ibitque vt per, PH, concurrrens cum axi, RS, inter, EI, eritque focus, H, distans ab, E, minus, EI, sexquidiametro conuexi, AED.

Sit nunc centrum cavitatis vt in, H, versans inter sexquidiametrum, EI, & semidiametrum, EG. Dico radium, LOP, secundò refringi, ad punctum citra, I, vt in, K.

Vt hoc probetur supponemus, prius, IH, esse duplam, HQ, vnde, IH, erit dupla, HP, & angulus, HPI, erit ferè duplus anguli, HIP. Cum verò, HPI, sit inclinatio radij, OP, super, BQC, ponitur enim, H, esse illius centrum, ideò, OP, egrediens è lente, vt per, PN, faciet angulum, IPN, cuius erit duplus ipse, IPH, sed, IPH, est etiam duplus ipsius, HIP. Ergo, HIP, IPN, coalterni erunt æquales, & subinde parallela, PN, RS. Consideret ergo Lector quod cum centrum est citra, I, focus est inter, IE, cum centrum est in, I, focus est in eodem, I, cum centrum est in, H, ita vt, IH, sit dupla, HQ, nullus est focus, sed radij secundò refracti incedunt paralleli axi, RS. Ergo cum centrum erit inter, IH, radij non refringentur paralleli axi, RS, sed in illius punctum concurrent vt in, K, posito centrum, H, vt dicebatur esse inter sexquidiametrum, EI, & ferè semidiametrum, EG.



Cor. 1.9.
huius.

Cor. 2.7.
huius.

Ooo 2

EG.

EG. Si enim intelligamus, I H, esse duplam, HQ, vt, IG, dupla est, GE, ob paruam lentis crassitiem parum distabit punctum, H, ab ipso, G, eruntque, HQ, GE, ferè æquales, & BQC, AED, ferè ex æqualibus circulis.

Denique hinc apparet si centrum cavitatis propius ipsi, Q, sumatur, quam est, H, seu, G, radios secundò fore refractos non per lineas concurrentes in aliquod punctum ipsius, E S, vel eidem parallelas, sed per lineas diuergentes, vt est ex. gr. P M, quæ diuergit à puncto, F, qui erit focus huius lentis ultra ipsam constitutus. Quod, &c.

C O R O L L A R I U M.

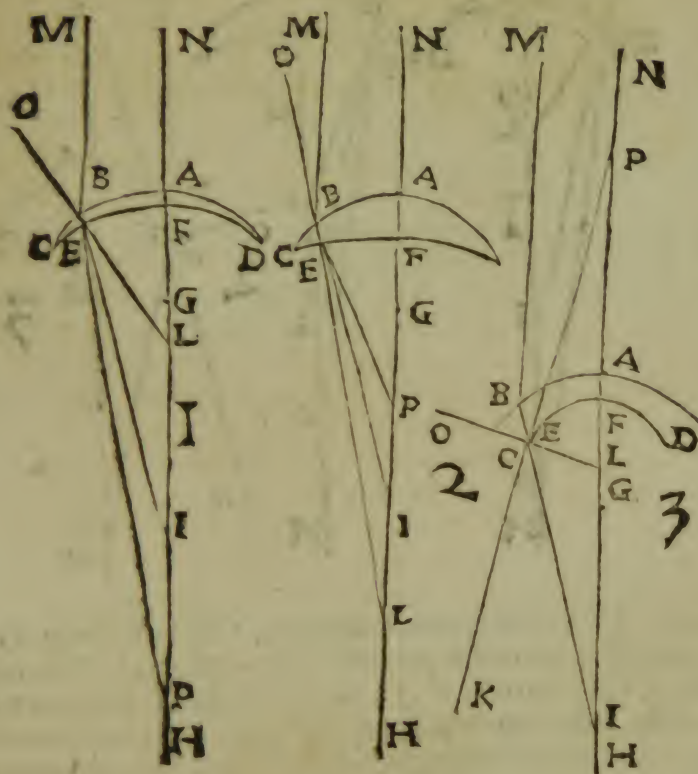
Hinc apparet quando cavitates est ex maiori circulo, quam conuexitas, haberi aliquem concursum radiorum secundò refractorum; cum, QS, focumque esse in, QS. Cum verò sunt ex æqualibus circulis patet nullum esse focum, sed radios axi parallelos secundò refrangi.

Et cum cavitates est ex minori circulo, quam conuexitas, ydem sunt diuergentes, à puncto, seu foco, in, E R, constituto.

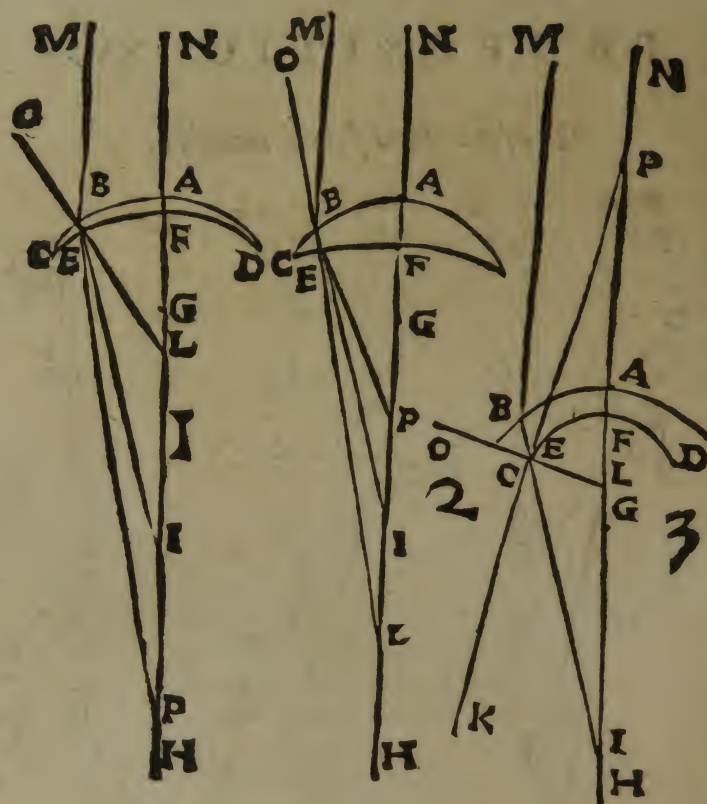


PRO.

PROPOSITIO. XV.

Prafata lentis focum inuenire.

Sit lens, CADF, cuius axis, NH, transiens per media illius superficierum puncta, A, F, conuexum, CAD, superq; centrum, G, quod respiciat parallelas radios venientes ex parte, N; sit insuper cauum, CFD, cuius centrum si esset in, I, distans à lente per triplum semidiametri, AG, seu sexquidiametro conuexi, CAD, iam constat omnes radios parallelas axi, NH, concursuros fore in eodem puncto, Per ant.



¶ 1. Similiter si centrum cavitatis, CFD, Foret in, G; circiter ij reflecterentur paralleli eidem axi, NH. Sit ergo caui, CFD, centrum in, L, extra dicta duo puncta, iuxta diuersos casus, qui in 3. figuris apparent: & quoniam necessario sequitur aliquis concursus cum axi, NH, radiorum, secundo in lente refractorum ex Cor. superiori, ideo nunc ille concursus, siue focus est inueniendus.

Cor. 1. 9.
huius.

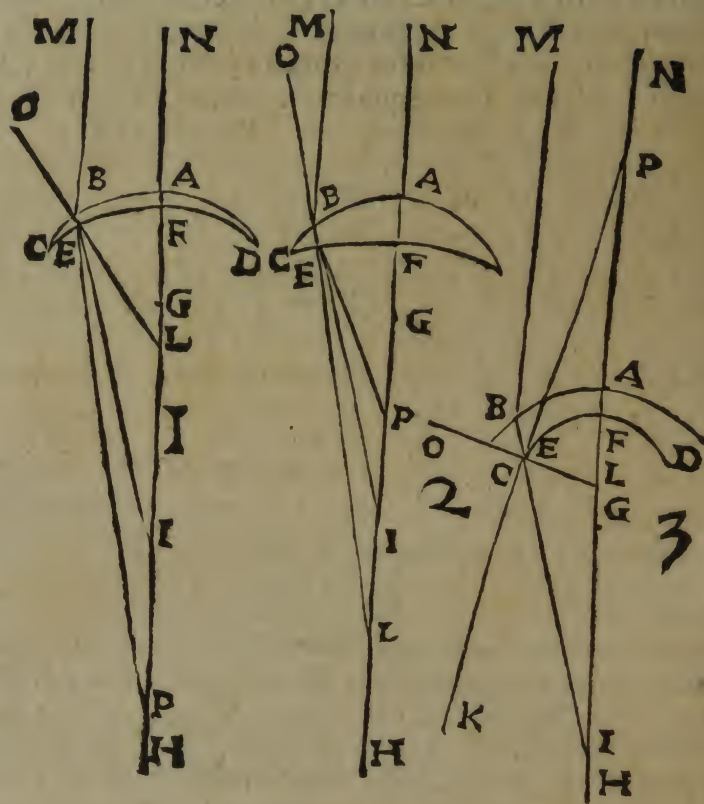
Esto vnus dictorum radiorum, MB, quod à puncto incidentiæ, B, per rectam, BI, dirigetur in, I, sed incidens in cauum, CFD, vt in, E, refractus incidet in aliud punctum axis, NH, vt in, P, recedens à perpendiculari super, CF D, transeunte per, E, quæ sit, LEO, & faciens angulum, PEL, vel in 3. figura, KEI, & ipsius, IEL. Quoniam ergo angu-

angulus, ELF, ad, IEL, est vt, EI, vel, FI, ad, IL; latera enim sunt vt sinus dictorum angulorum, & sinus ferè vt dicti anguli, quia sunt infra gradus 15. erunt in 1. & 3. fig. anguli, LEI, LIE, (qui æquantur exteriori, ELF,) ad, LEI, vt, FI, ad, IL, & diuidendo erit, LIE, ad, LEI, vt, FL, ad, LI: sed in 2. fig. erunt componendo, ELF, IEL, hoc est EIF, ad, IEL, vt, EL, vel, FL, ad, LI. Est autem, IEP, vel, IEK, in 3. fig. $\frac{1}{2}$ ipsius, IEL. Ergo, FIE, ad, IEP, vel, IEK, erit vt, FL, ad $\frac{1}{2}$, LI, vel vt dupla, FL, ad, LI. Est verò, FIE, ad, IEP, vel, IEK, vt, EP, vel, FP, (neglecta nempè semper lentis crassitie) ad, PI. Ergo vt dupla, FL, ad, LI, ita est, FP, ad, PI. Et permutando, vt dupla, FL, ad, FP, ita est, LI, ad, IP, in omnibus his lentibus.

Nūc in 1. fig. erit componendo, dupla, FL, cum, FP, ad FP, vt, LP, ad, PI. Cum verò sit vt dupla, FL, cum, FP, tota nempè vt tripla, FL, cum, LP, tota, ad totam, FP, ita ablata, LP, ad ablatam, PI, erit reliqua, hoc est tripla, FL, ad reliquam, FI, vel, AI, vt tota ad totam, nempè vt dupla, FL, cum, FP, ad, FP. Et diuidendo erit excessus triplæ, FL, super, AI, (quia enim, FL, superat, AG, etiam triplum superat triplum) ad, AI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt excessus triplæ, FL, super, AI, ad, AI, ita sunt eorum subtripla, videlicet ita excessus, FL, super AG (quæ est $\frac{1}{2}$ ipsius, AI,) est ad, AG. Ergo vt differentia inter, FL, AG, semidiametros caui, & conuexi, ad, AG, semidiametrum conuexi parallelos aspicientis, ita est dupla, FL, semidiametri reliquæ ad, FP, distantiam foci. Quod est iuxta datam regulam generalem.

In 2. fig. cum sit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, & vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia; erit dupla, FL, cum, LI, ad, FI, seu dupla, AL, cum, LI, ad, AI, (parua enim in his proportionibus interest differentia) vel dupla, AI, cum tripla, LI, ad, AI, siuè tripla, GI, cum tripla, IL, ad, AI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt tripla, GI, cum tripla, IL, ad, AI, ita sunt eorum subtripla, nempè ita, GI, cum, IL, seu ita, GL, est ad, GA. Ergo, GL, differentia inter, FL, semidiametrum caui, CFD, vel ferè inter, AL, &, AG, est ad, AG, vt duplum, FL, reliquæ semidiametri, ad,

19. 5.
Elem.12. 5.
Elemi



ad, FP, distantiam foci iuxta dictam regulam generalem.

In 3. figura deniq; cum sit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, erit permutando, & conuertendo, IL, ad duplam, LF, vt, IP, ad, PF, vel, PA : & diuidendo, erit excessus ipsius, IL, super duplam, LF, ad duplam, LF, (cum enim, LF, sit minor, AG, erit dupla, FL, minor dupla, AG, hoc est minor, GI, & multò minor quam, IL,) vt, IA, ad, AP. Quod si ipsi, IL, adiunxerimus, FL, & eandem, FL, iunxerimus duplæ, FL, erit excessus ipsius, IL, super duplam, FL, idem cum excessu, IF, seu proximè, IA, super triplam, FL. Erit ergo excessus, IA, super triplam, FL, ad duplam, FL, vt, IA, ad, AP. Et permutando erit excessus, IA, super triplam, FL, ad, IA, vt dupla, FL, ad, AP. Sed vt
exces-

excessus, IA, super triplam, FL, ad, IA, ita sunt eorum sub-
 tripla, scilicet ita excessus, GA, super, FL, ad, GA. Ergo ut
 differentia inter semidiametros, AG, FL, conuexi, & caui,
 ad, AG, semidiametrum conuexi parallelis aspicientis, ita
 est duplum, FL, reliquæ semidiametri ad, AP, distantia. n.
 foci, conformiter præfatæ regulæ generali. Datis igitur se-
 midiametris, poterit focus inueniri. Quod, &c.

PROPOSITIO XVI.

*Si lens sit ex una parte conuexa, & ex altera caua, ipsumq;
 cauum aspiciat parallelis axi. Dico, si centrum conue-
 xitatis fuerit distans à cauitate per sexquidiametrum
 eiusdem cauitatis, quod focus erit in ipso met centro ca-
 uitatis, à quo radij paralleli refracti diuergent. At si cen-
 trum conuexitatis distabit à cauitate plus eiusdem sex-
 quidiametro, focus distabit à cauitate versus radios pa-
 rallelis minus dicta sexquidiametro. Uterius si cen-
 trum conuexitatis versabitur inter dicta cauitatis sex-
 quidiametrum, & semidiametrum, focus distabit plus
 eadem sexquidiametro, semper, intellige versus radios
 parallelis, à quo diuergent. Et centro eodem distante
 per semidiametrum ferè cauitatis, & refrangentur se-
 cundò per parallelas axi. Ac denique eodem centro mi-
 nus dicta semidiametro à cauitate distante, focus erit
 ex parte conuexi, ad quam radij axi paralleli secundò re-
 fracti concurrent.*

Similis est Propositioni 14. superiori, ad cuius modum pa-
 riter demonstratur. Sit ergo lens, BADC, cuius cauum,
 BQC, & conuexum, AED, axis, SR, & G, centrum cauita-
 tis, BQC, necnon, IQ, tripla ipsius, GQ, cauumque, BQC,
 P p p respi-

respiciat parallelos axi radios venientes ex parte, S, statuaturque centrum conuexi, AED, ubicunque in axi, SQ. Dico focum se habere vt dictum est.

Cor. 1. 11.
huius.

Sit primò centrum conuexi, AED, in, I, & vnus radius axi, SR, parallelorum, LO, qui à puncto incidentiæ, O, refringitur per, OP, directam in, I, incidens conuexo, AED, perpendiculariter in, P, eo quod, I, sit centrum conuexi, AED, properabit ergo irrefractus vt in, T, eritque, I, focus à quo & ipse, & quicunque alij axi, SR, radij paralleli diuergent.

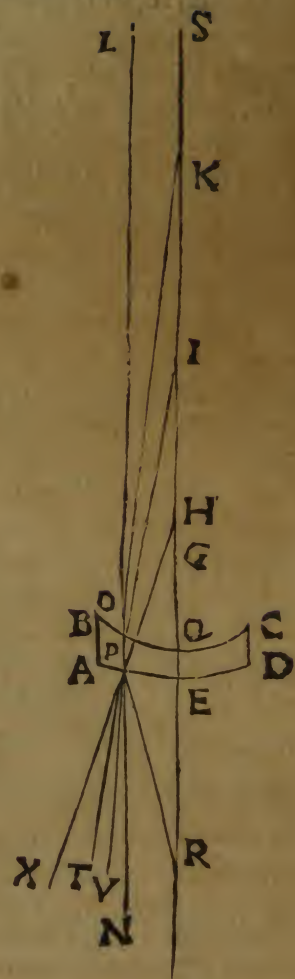
Cor. 1. 11.
huius.

Supponamus nunc conuexi, AED, esse centrum ultra, I, vt in, K, & iungatur, KP, quæ indefinitè producat ut in, V. Radius ergo, LO, incedet nihilominus per, OP, directam in, I, eritque eius inclinatio super conuexum, AED, angulus, KPI, seu, VPT, recedet ergo egrediens in aerem vt per, PX, à perpendiculari, PV, faciens angulum, XPT, $\frac{1}{2}$ ipsius, TPV, dirigeturque idcirco, XP, ad punctum, vt, H, intra, IQ. Erit ergo focus intra, IQ, à quo paralleli axi diuergent, distans à, BQC, cauo minus eiusdem sexquidiametro.

Cor. 2. 7.
huius.

7. huius.

Quod si centrum versetur inter, IG, sic eius focum assignabimus. Sit prius ipsum centrum in, H, ita vt, HG, sit non maior, QE, vnde, HE, erit non maior, GQ, immò illi ferè æqualis, & IH, ferè dupla, HE, vel, HP, ac subindè angulus, IPH,



IPH, ferè duplus, PIH. Sit rursus, HP, indefinitè producta ut in, X. Erit ergo angulus, XPT, ferè duplus, HIP; at si duxerimus, PN, axi, SR, parallelam erit exterior angulus, TPN, æqualis interiori, PIH, unde, XPT, erit ferè duplus ipsius, TPN. Igitur, OP, secundo refractus in, P, egrediens in aerem, ibit per, PN. Radij ergo axi paralleli exhibunt è lente eidem ferè paralleli, cum centrum conuexi erit propè, G, ut dictum est. Consideret ergo Lector cum centrum est in, H, refractionem fieri per, PN, cum est in, I, fieri per, PT; quapropter cum erit inter, IH, seu, IG, refractione fiet per intermedium ipsis, PN, PI, quæ idò dirigetur in aliquod punctum ipsius, IS, veluti, VP, dirigitur in, K. Tunc ergo focus distabit à, BQC, plus sexquidiametro cavitatis, à quo radij axi paralleli diuergent.

Denique hic apparet, si dictum centrum fuerit inter, HQ, quod tunc refractione fiet non per ullam diuergentem, ut per, PX, vel, PT, vel, PV, nec per parallelam, PN, sed per concurrentem cum axi, ut per, PR, in, R, focumque fore, R, citra lentem, ad quem concurrent dicti radij axi paralleli. Quod, &c.

COROLLARIUM.

Hinc apparet quando conuexitas est ex maiori circulo, quam cavitatis, haberi aliquem concursum, seu focum radiorum secundo refractorum cum, QS, à quo diuergant.

Cum verò sunt ex æqualibus circulis, patet nullum esse focum, sed refractionem fieri per rectas axi parallelas. Et cum conuexitas est ex minori circulo, quam

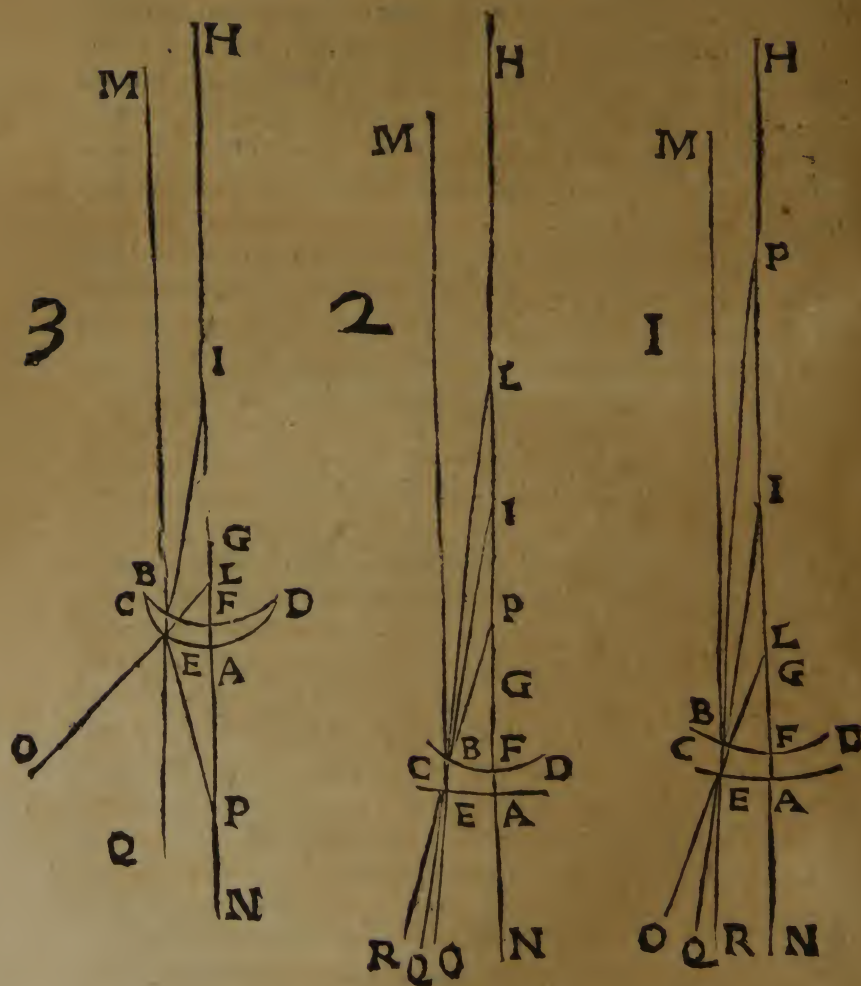
cavitatis,

idem fiunt conuergentes ad focum citra lentem in axi constitutum.



PROPOSITIO XVII.

In huiusmodi lentibus focum inuenire.



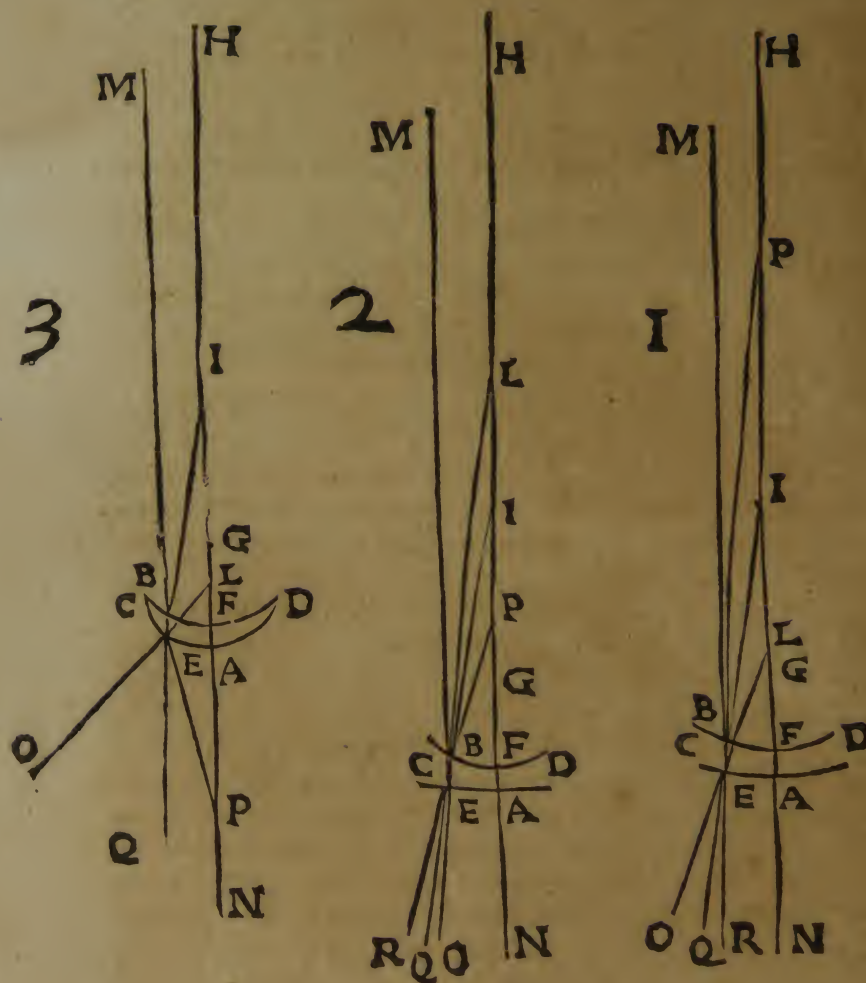
Vtemur & hic eodem progressu Propositionis 15. paucis mutatis. Sit ergo lens, CFDA, axis, HN, centrum

trum cavitatis, CFD, ipsum, G, quæ respiciat radios parallelos axi, HN, ex parte, H, venientes, & IF, tripla, FG. Conuexitas, CAD, habeat centrum, L, inter, IG, in prima figura, vltra, I, in 2. & inter GF, in 3. vnde in 1. & 2. cavitatis erit ex minori circulo quam conuexitas, in 3. verò ex maiori. Constat autem ex Cor. ant. quod si cavitatis & conuexitas essent ex æqualibus circulis, nullus esset focus, sed radij axi paralleli refrangerentur secundò per parallelas eidem axi. At si conuexitatis centrū esset in, I, focus quoque esset in, I, à quo iidem diuergerent. In alijs ergo casibus est focus inquirendus, sequitur enim aliquis cum axi parallelorum concursus ex Prop. ant.

Est vñ vnus dictorum radiorum, MB, quod à puncto incidentiæ, B, per, BE, directam in, I, refrangeretur, sed incidens in conuexum, CAD, iterum refractus incederet per directam in aliquod punctum axis, HN, vt per, ER, directam in, P, recedens à perpendiculari, LEO, super conuexum, CAD, per, E, transeunte, faciensq; angulum, KEQ, vel, PEQ, in 3. figura $\frac{1}{2}$ ipsius, QEO, vnde & PEI, erit $\frac{1}{2}$ IEL, & in 3. figura, PEQ, $\frac{1}{2}$ IEL. Quoniam ergo angulus, E LF, ad, IEL, est vt, EI, vel, FI, ad, IL, erunt in 1. & 3. figura vtrique simul, LIE, IEL, (qui æquantur exteriori, ELF,) ad, IEL, vt, FI, ad, IL, & diuidendo, LIE, ad, IEL, erit vt, FL, ad, LI. Sed in 2. figura erunt componendo, ELF, IEL, hoc est exterior, EIF, ad, IEL, vt, E L, vel, FL, ad, LI. Est autem, IEP, vel, QEP, in 3. fig. $\frac{1}{2}$ LEI. Ergo, FIE, ad, IEP, in 1. & 2. fig. & in 3. FIE, ad, QEP, erit vt, FL, ad $\frac{1}{2}$ LI, vel vt dupla, FL, ad, LI. Est verò, FIE, ad, IEP, in 1. & 2. fig. & in 3. FIE, ad, PEQ, vt, EP, vel, FP, ad, PI. Ergo in omnibus est vt dupla, FL, ad, LI, ita, FP, ad, PI. Et permutando, est vt dupla, FL, ad, FP, ita, LI, ad, PI. Nunc in commodum Lectoris repetemus ferè eadem, quæ habentur in Prop. 15. ad perficiendam singillatim demonstrationem in 1. 2. & 3. figura.

In prima ergo istarum figurarum cum sit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, componendo erit dupla, FL, cum, FP, ad, FP, vt, LP, ad, PI. Cum verò sit vt dupla, IL, cum, FP,

Cor. I. I. I.
huius.



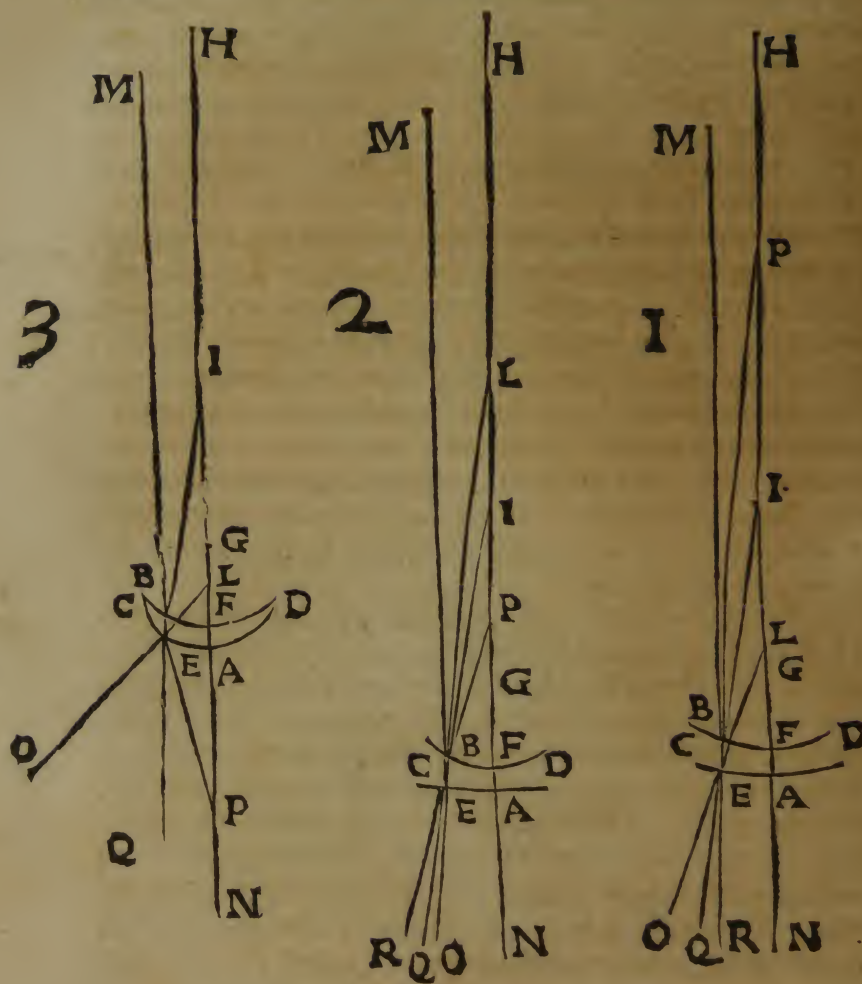
19. 5. Elê. FP, tota nempè vt tripla, FL, cum, LP, tota ad totam, FP, ita ablata, LP, ad ablatam, PI, erit reliqua, hoc est tripla, FL, ad reliquam, FI, vt tota ad totam, nempè vt dupla, FL, cum, FP, ad, FP. Et diuidendo, erit excessus triplæ, FL, super, FI, (quia enim, FL, superat, FG, etiam triplum superat triplum) ad, FI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt excessus, triplæ, FL, super, FI, ad, FI, ita sunt eorum subtri-

subtripla, nempe ita excessus, FL, super, FG, (quæ est $\frac{1}{2}$ ipsius, FI,) est ad, FG. Ergo ut differentia inter, FL, FG, seu quamproximè inter, AL, FG, semidiametros conuexi, & caui, ad, FG, semidiametrum caui parallelum aspicientis, ita est dupla, FL, seu ferè dupla, AL, semidiametri reliquæ ad, FP, distantiam foci à lente, iuxta dictam regulam generalem.

In 2. figura cum sit dupla, FL, ad, FP, ut, LI, ad, IP, 12. 5. Elè. & ut vnum ad vnum ita omnia ad omnia, erit dupla, FL, cum, LI, ad, FI, vel dupla, FI, seu tripla, IG, cum tripla, LI, ad, FI, ut dupla, FL, ad, FP. Sed ut tripla, IG, cum tripla, LI, ad, FI, ita sunt eorum subtripla, nempe ita, GI, cum, IL, seu ita, GL, est ad, GF. Ergo, GL, ferè differentia inter, AL, GF, semidiametros conuexi, & caui, est ad, GF, semidiametrum caui parallelum aspicientis, ut dupla, FL, seu proximè dupla, AL, semidiametri reliquæ est ad, FP, distantiam foci à lente, conformiter dictæ regulæ generali.

Deniq; in 3. figura cum sit dupla, LF, ad, FP, ut, LI, ad, IP, erit permutando, & conuertendo, IL, ad duplam, LF, ut, IP, ad, PF: & diuidendo erit excessus ipsius, IL, super duplam, LF, (cum enim, LF, sit minor, FG, erit dupla, LF, minor dupla, FG, hoc est minor ipsa, GI, & multò minor quam, LI,) ad duplam, LF, ut, IF, ad, FP. Addita ergo communi, LF, erit excessus, IF, super triplam, LF, ad duplam, LF, ut, IF, ad, FP. Et permutando, erit excessus, IF, super triplam, LF, ad, IF, ut dupla, LF, ad, FP. Sed ut excessus, IF, super triplam, LF, ad, IF, ita sunt eorum subtripla, scilicet ita excessus, GF, super, FL, ad, GF. Ergo ut differentia inter, GF, FL, seu quamproximè inter, GF, LA, semidiatros caui, & conuexi, ad, GF, semidiametrum caui parallelum aspicientis, ita erit dupla, FL, vel ferè dupla, AL, semidiametri reliquæ ad, FP, vel, AP, distantiam foci à lente, iuxta dictam regulam generalem. Datis igitur his semidiametris, poterit focus inueniri. Quod, &c.

COROL.



COROLLARIUM.

Hinc habetur eadem fere distantiam foci à lente provenire quamcunque lentium huiusmodi faciem ad radios parallelos axi convertamus. Est enim semper in eadem lente differentia semidiametrorum cavi, & convexi, ad semidiametrum

trum faciei parallelas aspicientis, veluti duplum reliquæ semidiametri, ad distantiam foci. Quod completè ostendemus quemadmodum in Cor. 2. Prop. 12. hoc idem probatum est de lentibus utrinque conuexis.

S C H O L I U M.

Constat ex hucusque demonstratis allatam regulam generalem in lentibus utrinque conuexis, vel utrinque cavis, & in conuexis tantum ex una parte, ac ex altera cavis, de quibus propriè allata est, verificari. Etsi enim quando cavitatis, vel conuexitatis centrum abest à lente triplo semidiametri conuexitatis, id non expressè probatum fuerit, si tantum demonstratum focum esse in eodemmet centro; id tamen facillè est ostendere. Nam si in prima fig. Prop. 15. supponamus, I , centrum cavi, CFD , quod abest ab A , triplo semidiametri, GA , conuexi, CAD ; erit ut, IG , differentia semidiametrorum, GA , IA , vel ferè GA , IF ad, GA , cuius, IG , est dupla, ita duplum reliquæ semidiametri, IF , ad, IF , distantiam foci, nam focus ferè est in, I . Eodem modo ostendimus dictam regulam verificari, si in 3. fig. Prop. 17. sit, G , centrum cavi, BFD , ipsiusq. conuexi, BAD , centrum, I , ita ut, IF , sit tripla, FG . Remanet solum casus quando cavitatis, & conuexitatis sunt ex equalibus circulis, tunc enim nullus datur focus, vel si mauis dicere, infinite distat à lente. Verum & huic casui per quandam analogiam adaptatur eadem regula generalis, est enim ut differentia semidiametrorum (quæ quia circuli cavitatis, & conuexitatis sunt æquales nulla est) hoc est nihil, ad alteram semidiametrum, ita duplum reliquæ semidiametri, ad distantiam foci à lente, idcirco infinitam. In omnibus ergo casibus circa has lentes contingentibus ipsa regula generalis verificatur.

At si quis vellet eam quoque extendere ad lentes ex una parte planas, & ex altera conuexas, vel cavas, id ei licbit similiter per quandam analogiam: supponens enim planum esse conuexum, vel cauum, cuius centrum ab eo infinite distet, sciet aggregatum vel differentiam semidiametrorum esse quid infinitum; si ergo conuexum, vel cauum conuertatur ad radios axi parallelas, erit dictum aggregatum, vel differentia infinita, ad

Qq9

semi-

14. & 16.
huius.

14. huius.

14. & 16.
huius.

*semidiametrum conuexi, vel caui, ut duplum reliquę semidia-
metri, hoc est duo infinita, ad distantiam foci, duarum idcirco
ex semidiametris conuexitatis. Vel permutando, erit vnum
infinitum ad bis infinitum, ut semidiameter conuexitatis, ad
diametrum eiusdem hoc est ad foci distantiam. Verè enim fo-
cus huiusmodi lentis distat à lente ferè per diametrum conue-
xitatis. Quod si planum vergat ad parallelos, erit dictum
aggregatum, vel differentia infinita, ad semidiametrum faciei
parallelos aspicientis, infinitam, ut duplum reliqua semidia-
metri, nempe conuexi, vel caui ad distantiam foci, qua erit pa-
riter dupla dicta semidiametri conuexitatis. Generalissima
igitur est hac regula, omnibusque huiusmodi lentibus, qua penes
planitiem, conuexitatem, & cavitatem sphericas, præfatas for-
tiuntur varietates, congruere potest. Quoniam verò ut semi-
diameter ad semidiametrum, ita est diameter ad diametrum,
ideò eadem regula melius sic constitui potest.*

Eadem regula generalis ad inue- niendos focos in omnibus præfatis lentibus aliter concinната.

COnuexis, vel cauis in contrarias partes vergentibus,
ut aggregatum; sed ijs ad eandem partem constitutis,
ut differentia diametrorum vtriusque faciei, ad alterutram
ex ijsdem diametris, ita reliqua diameter, ad distantiam foci
à lente.

*Porro manifestum est, sicuti radij axi paralleli in dictis len-
tibus concurrunt, seu conuergunt, ad suos focos, vel ab ijs diuer-
gunt; ita è cōtra si ab ijsdem punctis, qui sunt foci, intelligamus
radios diuergere, vel ad eos conuergere. quod transata lente re-
frangentur per rectas axi earundem lentium parallelas.*

*Similiter constat ad efficiendos ex parallelis conuergentes,
utem.*

utendum esse lente vel ex vna parte plana, & ex altera cōnexa, vel utrinque conuexa, aut ex vna parte conuexa, & ex altera caua, cauitate tamen, quæ sit ex maiori circulo, quam conuexitas. hoc est, iuxta Keplerum, Menisco, quæ cum ita construi possit ut eius focus longissimè distet à lente, quamuis cauitas, & conuexitas non sint ex circulis valdè magnis, idèò aequipollet sola conuexitati circuli valdè magni, plano associata in eadem lente. Huiusmodi quoque lentibus poterimus efficere radios ex diuergentibus parallellos axi. Quod si velimus parallellos axi efficere diuergentes à puncto ultra lentem versus parallellos in axi constituto, utemur vel lente plana ex vna parte, & ex altera caua, vel utrinque caua, siuè ex vna parte conuexa, & ex altera caua, ita tamen ut conuexitas sit ex maiori circulo quam cauitas, quæ cum ita construi possit ut eius focus longissimè distet à lente, quamuis conuexitas & cauitas non sint ex circulis valdè magnis, idèò aquipollet sola cauitati circuli valdè magni, plano associata in eadem lente. Huiusmodi quoque lentibus poterimus efficere radios ex conuergentibus parallellos axi.

Dioptr.
nu. 130.

Dioptr.
nu. 133.

Quoniam verò Keplerus in Dioptr. num 131. volens pro Menisco focum inuenire, proposuit hanc regulam generalem, nempe quod quantum attenuatur lens, tantum elongatur concursus seu focus à lente, hancque solum per indu-

ctionem, & à paucis casibus, probauit,

idèò nunc videndum restat

num per nostram

regulam

hoc idem aliqua meliori ratione. & vniuersalius

demonstrari possit. Quod exequi cona-

bimur ostensa prius sequenti

Propositione.



PROPOSITIO XVIII.

Si duo circuli, ABC, DBC, describantur, quorum peripheræ se mutuò secant in punctis, BC, sintque diametri, AF, DE, & iungatur, BC, secans easdem in, G, quibus erit perpendicularis, ut facillè ostendi potest. Dico, EG, ad, GF, esse ut, AG, ad, GD.

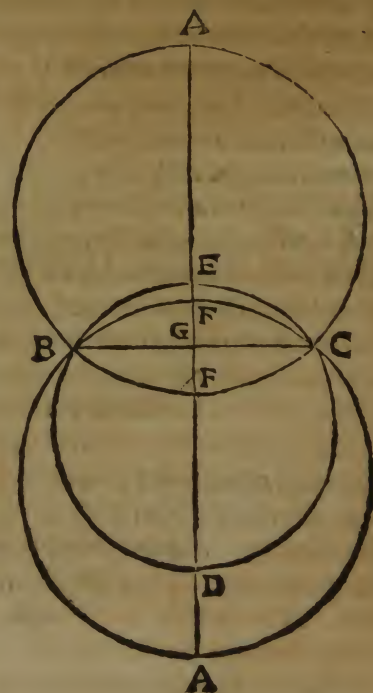
Cor. 8. 6.
Elem.

Erit enim quadratum, GC, æquale tam rectangulo, AGF, quam rectangulo, DGE; quapropter rectangula, AGF, DGE, erunt æqualia, habebuntque latera reciproca. Ergo erit, EG, ad, GF, ut, AG, ad, GD. Quod, &c.

14. Sexri
Elem.

SCHOLIUM.

IN præfatis lentibus cū supponātur paræ crassitie, et hinc inde ab axi, AF, non excedere grad. 15. erit proportio, AG, ad, GD, quæ proximè eadem proportioni, AF, ad, FD, vel etiā ipsius, AF, diametri ad, ED diametrum. Vnde sequitur si arcus connexitatū, vel cavitatū lentium ab eadem chorda, ut à, BC, in lentibus, BEC, BFC subtendantur, earum sinus versos, EG, GF, hoc est ipsarum crassities, esse quam proximè in reciproca ratione diametrorum earundem connexitatum, vel cavitatum.



PRO-

PROPOSITIO. XIX.

Si arcus conuexitatis, vel cavitatis lentium prædictarum ab eadem chorda subtendantur: erunt ipsarum crassities in reciproca ratione distantiarum earundem focorum ab iisdem lentibus.

Sit primò lens, ABED, utrinque conuexa, siuè æquali, siuè inæquali conuexitate, chorda, BC D, arcubus, BAD, BED, communis, & axis, ACE, supponaturque alia lēs, BADCB. Dico ut crassities, EA, est ad crassitiem,



AC, ita esse distantiam foci lentis, AC, (liceat lentes, per earum crassities nominare) ad distantiam foci lentis, AE, ab ipsis lentibus. Erit enim ut, EC, ad, CA, (qui sunt sinus versus arcuum, BED, BAD,) ita quamproximè diameter conuexitatis, BAD, ad diametrum conuexitatis, BED, per allata in proximo Scholio. Sed dictæ diametri sunt distantiae focorum ipsarum lentium. Ergo ut crassities, EC, ad crassitiem, CA, ita distantia foci lentis, AC, ad distantiam foci lentis, CE. Quod eodem modo de quibuscunque alijs lentibus, quibus sit communis chorda, seu planum, BD, ostendemus. Igitur componendo, ut, EA, ad, AC, ita erit aggregatum distantiarum, hoc est diametrorum conuexitatum, BAC, BAD, ad diametrum conuexitatis, BED. Sed ut dictum aggregatum est ad diametrum conuexitatis, BED, ita diameter conuexitatis, BAD, est ad distantiam foci lentis, AE, per regulam generalē postremò allatam. Ergo ut crassities, EA, ad crassitiem, AC, ita diameter conuexitatis, BAD, hoc est distantia foci lentis, AC, est ad distantiam foci lentis, AE.

Esto

8. & 9.
huius,

8. & 9.
huius.

Esto nunc lens, cuius crassities, AG , ad quam compareretur lens, AE . Ostendemus ergo ut supra lentem, GA , ad, AC , esse ut distantiam foci lentis, AC , ad distantiam foci lentis, AG . Quoniam ergo lens, EA , ad lentem, AC , est ut distantia foci ipsius, AC , ad distantiam foci lentis, AE ; & lens, AC , ad lentem, AE , conuertendo, est ut distantia foci lentis, AG , ad distantiam foci lentis, AC . Ex æquali in perturbata analogia, lens, EA , ad lentem, AG , erit ut distantia foci lentis, AG , ad distantiam foci lentis, AE .

Ex Schol.
ant.

Sit nunc lens, AF , ad quam compareretur eadem lens, AE . Et quoniam, AC , ad, CF , est ut diameter cavitatis, BFD , quamproximè, ad diametrum conuexitatis, BAD ; erit per conuersionem rationis, CA , ad, AF , ut diameter caui, BFD , ad excessum ipsius super diametrum conuexi, BAD , hoc est ut diameter caui ad differentiam diametrorum dicti caui, & conuexi. Et conuertendo, erit ut, FA , ad, AC , ita differentia diametrorum caui, & conuexi, ad diametrum caui. Sed hæc differentia, per allatam postremo regulam generalem, est ad diametrum caui, ut diameter conuexi, BAD , ad distantiam foci lentis, AF . Ergo ut, FA , ad, AC , ita erit diameter conuexi, BAD , hoc est distantia foci lentis, AC , ad distantiam foci lentis, AF . Et conuertendo, CA , ad, AF , erit ut distantia foci lentis, AF , ad distantiam foci lentis, AC . Sed, EA , ad, AC , ostensa fuit esse ut distantia foci lentis, AC , ad distantiam foci lentis, AE . Ergo ex æquali in perturbata analogia, ut, EA , ad, AF , ita est distantia foci lentis, AF , ad distantiam foci lentis, AE .

Quod si compareretur, AE , ad, EF , eodem modo, quo circa lentes, EA , AG , processimus per viam lentis, AC , per viam lentis, CE , propositum de ipsis, AE , EF , ostenderemus. Similiter si esset lens, FH , ad quam compareremus, AE , per comparisonem, AE , ad, EF , & postmodum, EF , ad, FH , (quæ similis est comparationi, EA , ad AF ,) propositum demonstraretur. Nec dissimiliter fieret si compareretur, AE , ad, FG . In huiusmodi lentibus igitur, quomodocumque ipsas comparemus, semper crassities reciproce respondent distantijs focorum. Quod, &c.

COROL-

C O R O L L A R I V M.

PAtet igitur verum esse quod dixit Keplerus in Dioptr. nu.
131. nempe quantum attenuatur lens, tantum elongari
concursum, seu focum ab ipsa lente. Insuper si dua quacunq;
crassities huiusmodi lentium ponantur esse aequales, ut, AF ,
 FH , etiam distantia focorum earundem erunt aequales. Erit
enim ex. gr. ut, AF , ad, EA , ita distantia foci lentis, EA , ad
distantiam foci lentis, AF ; & ut, HF , ad, EA , ita distantia
foci lentis, AE , ad distantiam foci lentis, FH . Cum ergo,
 AF , FH , ponantur aequales habebunt ad eandem, AE , ean-
dem rationem. Igitur eadem distantia foci lentis, AE , ad di-
stantias focorum lentium, AF , FH , habebit eandem rationem,
& subinde illa erunt aequales.

S C H O L I V M.

Objiciet autem forte aliquis, cum in hac doctrina ferè sem-
per crassities lentis negligatur, non posse à lentium cras-
sities ad distantias focorum rectè discurre. Ad quod respondeo
negligi lentium crassitiem tantum relatiuè ad semidiametros
convexitatum, & cavitatum, & ad distantias focorum,
qua, addita, vel detracta ipsarum crassities, pa-
rum variari possunt. At non negligimus len-
tium crassitiem dum ille inter se compa-
rantur, hinc enim sequitur, pro-
pter eiusdem varietatem no-
tabiliter ipsorum focorū
distantias variari.

Qua pro
huiusmodi doctrina dilu-
cidatione nunc dicta
sufficiant.

De descriptione Parabolæ per
quatuor data Puncta in angu-
lis quadrilateri, cuius duo
saltem opposita latera
sint extra concur-
rentia .

Hoc Problema mihi proposuit Ioannes Beaugrand,
de quo mentionem feci in Exerc. 4. ad cuius solu-
tionem per subsequentes propositiones ita processi .

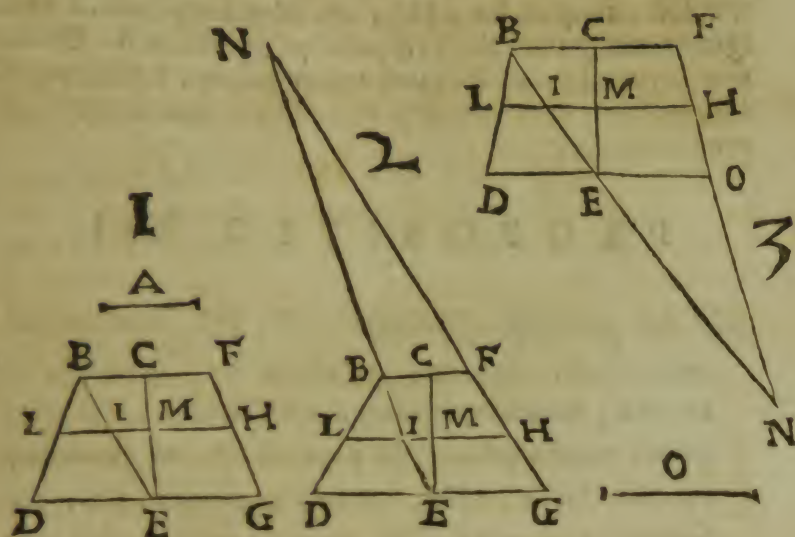
P R O P O S I T I O X X .

Dato trapezio quocunque, $BCED$, cuius duo opposita latera,
 BC, DE , sint parallela, & iuncta, BE ; ipsi DE , in, EO ,
æquidistantem ducere ex. gr. LM , secantem, BE , in, l ,
ita ut quadratum, LM , superet quadratum, ML , qua-
drato datæ rectæ lineæ, ut ipsius, A , quæ sit minor
quam, DE , maior oppositarum basium trapezj .

Vel ergo, DE , dupla est ipsius, BC , ut in 1. figura, vel
plus quam dupla, ut in 2. aut minus quam dupla ut in
3. fig. in omnibus autem extendantur, DE, BC , in, G, F , ita
ut, EG , sit æqualis, ED , & FC , ipsi, CB , & iungatur, FG .
Cum ergo in 1. fig. DE , sit dupla, BC , ideò, EG , erit æqualis,
 BF , unde cum sit quoque eidem parallela, erit et iam, BE ,
parallela ipsi, FG . In 2. fig. erit, EG , maior, BF , & est illi
parallela, igitur, EB, GF , productæ versus, BF , concurrent,
ut in



ut in, N
paralle
rent, v
A, ita i
NEB
fiat ut
cui pot
in 2. fig
enim tu
ad recta
parallel
Quonia
ideft vt
dratum
LH, æq
niam vt
triangul
positam
ratione
autem.



ut in, N. In 3. fig. denique erit, EG , minor, BF , & illi
 parallela, quare productæ, BE, FG , versus, EG , concur-
 rent, ut in, N. Fiat ut quadratum, DE , ad quadratum,
 A , ita in 1. fig. EB , ad, BI , sed in 2. & 3. ita rectangulum,
 NEB , ad rectangulum, NIB , quod obtinebimus, si prius
 fiat ut q. DE , ad q. A , ita rectangulum, NEB , ad q. O ,
 cui postmodum æquale rectangulum applicetur ipsi, NB ,
 in 2. fig. excedens, & in 3. deficiens quadrato, BI : erit
 enim tunc ut q. DE , ad q. A , ita rectangulum, NEB ,
 ad rectangulum, NIB . Rursus per, I , ducatur ipsi, DG ,
 parallela, LH , secus, CE , in, M , & BD, FG , in, L, H .
 Quoniam ergo q. DE , ad q. A , in 1. fig. est ut, EB , ad, BI ,
 idest ut, DE , ad, LI , idest ut rectangulum, DEG , vel qua-
 dratum, DE , ad rectangulum, LIH ; idcò rectangulum,
 LIH , æquabitur quadrato, A . In reliquis verò figuris quo-
 niam ut q. DE , ad q. A , ita est rectangulum, NEB , ad re-
 ctangulum, NIB , illud verò ad hoc habet rationem com-
 positam ex ratione, EN , ad, NI , siuè, EG , ad, IH , & ex
 ratione, EB , ad, BI , hoc est, DE , ad, LI . Dux rationes
 autem, DE , ad, LI , & EG , ad, IH , componunt rationem
 R r r rectan.

28. 29.
 6. Elem.

1. 6. Elé.

23. 6. Elé.

23. 6

rectanguli, DEG, vel q. DE, ad rectangulum, LIH; ideo
 ut q. DE, ad q. A, ita q. DE, erit ad rectangulum, LIH.
 Igitur rectangulum, LIH, æquabitur quadrato, A. Est au-
 tem in omnibus hisce figuris rectangulum, LIH, exceſ-
 ſus quadrati, LM, super q. MI. Igitur factum est quod
 proponebatur.

s. Sec. Elé.

PROPOSITIO XXI.

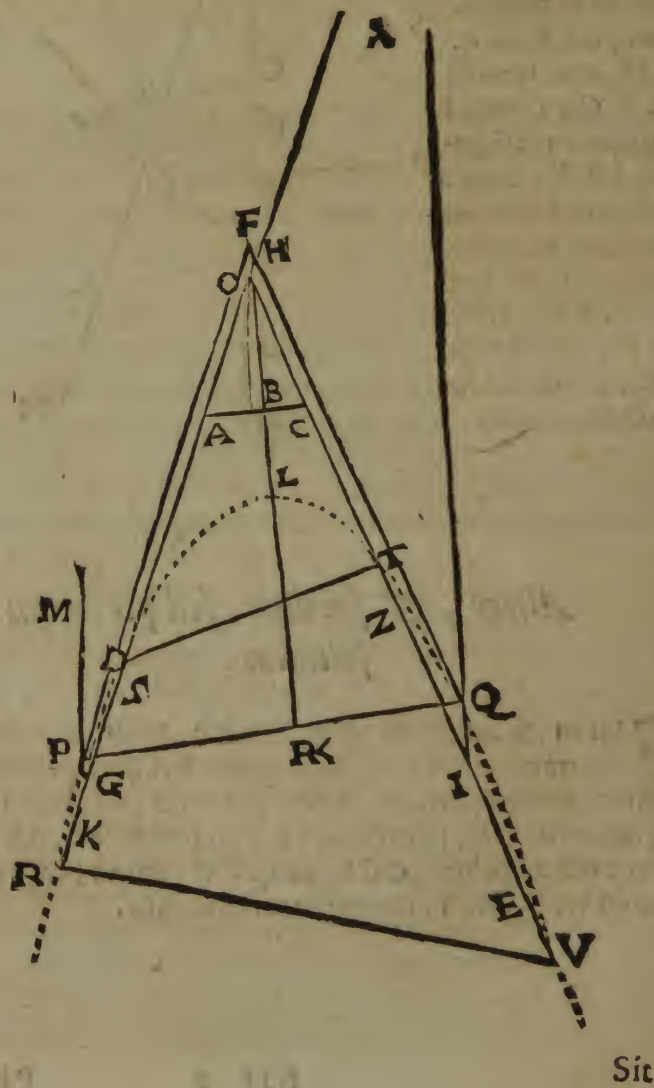
*Sint duæ quæcunq; rectæ lineæ, AK, AN, angulum quæ-
 cunq; KAN, facientes; in altera verò ipsarum, ut
 in, AK, sumptis ubicunq; duobus punctis, EG, sit à
 quouis puncto ipsius, AK, ut ab, F, ad quodcunq;
 punctum rectæ, AN, ut ad, L, ducta, FL. His
 suppositis oportet ipsi, GE, applicare rectangulum exce-
 dens figura quadrata, quod ad quadratum rectæ li-
 neæ æquidistantis ipsi, FL, interceptæ inter, AK, A
 N, ductæq; à puncto in, AE, per excessum applica-
 tionis factò, habeat datam rationem, ut quæ est ipsius,
 S, ad, T.*

Per ant.

Secatur, EG, bifariam, ut in ipso, F, & ducatur, ab, E,
 ipsi, FL, parallela, EH, ita ut q. FE, ad q. EH, sit ut,
 S, ad, T; iunctaque, FH, producat indefinite, ipsique,
 AN, occurrat, ut, in, I, & ipsi, AB, ductæ ab, A, æquidi-
 stanter ipsi, FL, in, B. Similiter per, I, sit ducta eidem, FL,
 parallela, ID, incidens ipsi, AK, in, D. Denique in trape-
 zio, ADIB, in quo ducta est, AI, agatur, MC, parallela,
 AB, secans, AI, in, O, & AD, BI, in, C, M, ita ut quadra-
 tum, MC, superet q. CO, quadrato, EH, hoc enim fieri
 potest, cum, EH, sit minor, AB. Quoniam ergo ex simili-
 tudine triangulorum, FEH, FCM, q. FC, ad q. CM, est ut
 ablatum q. FE, ad ablatum q. EH, seu ad ablatum exceſ-
 sum

PROPOSITIO XXII.

Datis quatuor punctis in angulis cuiuscunq; quadrilateri, cuius saltem duo opposita latera sint extra ipsum concurrentia: per eadem Parabolam describere.



Sit data quatuor puncta in angulis quadrilateri cuiuscunq; DRVT, cuius duo saltem opposita latera, RD, VT, indefinitè producta extra concurrant, ut in, O. Oportet per, D, R, V, T, parabolam describere. Accipiat in altera ipsarum, OV, OR, ut in, OV, quodcunq; punctum, C, fiatq; ut rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD, ita q. CO, ad q. OA, & iuncta, AC, eadem secetur bifariam in, B, ducaturq; OB. Similiter bifariam diuisis, RD, ut in, G, I, ab his punctis versus, O, ducantur ipsi, OB, parallelæ, GM, IX, & producta indefinitè. RO, versus, IX, occurrat illi in, X. Vterius cum in, XR, faciente cum, XI, angulum, RXI, quicunq; sit, dentur duo puncta, R, D, & sit ducta utcunq; OI, ipsis, XR, XI, interiecta; inueniatur per Propositio ant. punctum, H, à quo ducta, versus, XI, ipsa, HQ, parallela eidem, OI, secanteq; XI, in Q, rectangulum, RHD, ad q. HQ, sit ut q. AO, ad q. OC: erit autem punctum, H, inter, O, X, puncta, nam cum rectangulum, VOT, cum q. TI, sit æquale q. OI, idè rectangulum, VOT, est minus q. OI, vnde rectangulum, ROD, ad q. OI, minorem habet rationem, quam ad rectangulum, VOT, idèst quam q. AO, ad q. OC, idèst quam rectangulum, RHD, ad q. HQ. At si, H, esset inter, OD, rectangulum, RHD, esset minus rectangulo, ROD, & q. HQ, maior q. OI, vnde rectangulum, RHD, minorem haberet rationem ad q. HQ, quam rectangulum, ROD, ad q. OI, quod esset absurdum; cadit ergo, H, inter, O, X. Insuper ducatur à, Q, parallela ipsi, CA, quæ indefinitè producta occurrat ipsi, GM, in, P, ac per, P, ipsa, PF, parallela, RX, incidensque in productam, QH, ut in, F. Rursus ducatur, Fx, æquidistans, OB, occurrensque, PQ, in, R, in quo, PQ, bifariam secabitur, cum etiam, OB, secet bifariam, AC, sintq; trianguia, FPQ, OAC, similia ob latera parallela, & cum, FR, ipsi, OB, æquidistet. Deniq; bifariam secata, FR, in, L, circa diametrum, LR, & basim, PQ, describatur parabola, PLQ, quam indefinitè productam dico transiuram per dicta puncta, D, R, V, T.

Quoniam enim, RL, æquatur, LF, estq; PB, ordinatum, ad, LR, applicata, idè, FP, tanger parabolam descri-

6. Sec.
Elem.

8.5. Elem.

Dico autem quod hæc abscissio fit in dictis quatuor punctis, R, D, T, V, (quod enim, OR, vt &, OV, secet in duobus punctis indefinitè producta descriptam parabolam indefinitè productam patet per 18. Primi Conicorum) si enim ex. gr. OR, non secet parabolam in, D, R, secabit tamen eam in duobus punctis æquè remotis à puncto, G, nam ostensum est, PG, esse diametrum resectæ per eandem, OR, parabolæ. Erunt ergo dicta puncta vel intra, R, D, vel extra. Sint primum intra, vt, KS, per quæ supponatur transire descripta parabola. Quia ergo sunt æquè remota à, G, & subinde à, D, R, ipsæ, RK, SD, erunt æquales, & cum, K, S, supponantur in descripta parabola, erit rectangulum, KHS, ad q. HQ, vt q. PF, ad q. FQ. Quia verò rectangulum, RHD, ad q. HQ, est vt q. AO, ad q. OC, idest vt q. PF, ad q. FQ, propter similia triangula, P FQ, AOC: idèò rectangulum, RHD, ad, q. HQ, erit vt rectangulum, KHS, ad q. HQ. Vnde rectangula, RHD, KHS, erunt æqualia, & idèò, RH, ad, HK, erit vt, SH, ad, FD, & diuidendo, RK, ad, KH, erit vt, SD, ad, D H, & permutando, RK, ad, SD, erit vt, KH, ad, HD; maior est autem, KH, ipsa, HD, ergo &, RK, maior erit ipsa, SD, cui ostensa est æqualis. Hoc autem est absurdum: non ergo descripta parabola transibit per puncta intra, R, D; sed & eodem modo probabimus non transire per puncta extra, R, D, ergo per ipsa, R, D, incedet.

16.3. Con.

14.6. Elē.

Deniq; eandem dico transire per, T, V, si enim non vel transibit per puncta intra, T, V, vel extra, transeat primum per, Z, E, intra posita: ostendemus autem vt supra, TZ, EV, esse æquales, & postmodum inæquales hac ratione. Cum enim, EZ, supponantur in descripta parabola, erit rectangulum, EOZ, ad, ROD, vt q. QF, ad q. FP, sed vt q. QF, ad q. FP, siuè vt q. CO, ad q. OA, ita quoque est rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD. Ergo rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD, erit vt rectangulum, EOZ, ad idem rectangulum, ROD. Igitur rectangula, VOT, EOZ, erunt æqualia, & idèò vt supra concludemus, VE, ad, ZT, esse vt, EO, ad, OT, & subinde ipsas, VE, ZT, esse inæquales, sed & æquales, quod est absurdum.

17.3. Con.

ab absurdum. Non ergo descripta parabola transibit per puncta intra, T, V , posita. Eadem ratione probabitur non posse transire per puncta extra, T, V , in ipsa constituta. Ergo incedet per, T, V , & per, D, R , quatuor data puncta. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I U M.

Hinc apparet, si reliqua latera, TD, VR , dati quadrilateri fuerint quoque extra concurrentia, quod pari ratione alia parabola transiens per eadem quatuor puncta, D, R, V, T , describi poterit. Hoc enim eadem præcisè ratione superius adhibita ostendetur.

De inueniendo puncto, quod à
tribus datis quibuscumque distet
secundum minimam
quantitatem.

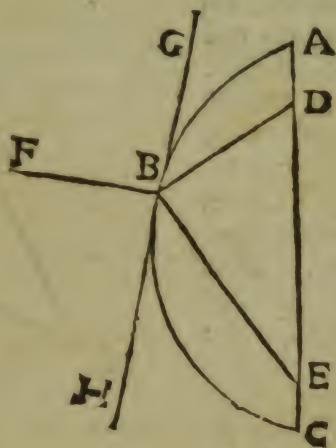
Propositum fuit hoc Problema, prout mihi relatum est, ab insigni Galliae Mathematico D. de Fermat, ad cuius solutionem ita progressus sum. Suppono ergo, datis tribus quibuscumque punctis, dari quoque tres minimas rectas lineas, vel saltem duas tribus æquipollentes, quæ à communi puncto ad ipsa duci possint. Deinde sequentes Propositiones demonstrabo.

PRO.

PROPOSITIO XXIII.

Si sit semiellipsis, ABC, diameter, AC, foci, D, E, punctum quodcunque, F, extra, & ad eandem ellipsis partem, FB, perpendicularis tangenti, GH, in, B, iunganturque, BD, BE. Dico, FR. esse omnium, quæ ad ellipsim ducti possunt, brevissimam, eamque efficere angulos, FBD, FBE, æquales.

Est enim, FB, omnium minima, quæ ad rectā, GH, duci possunt, & subinde minima quoque erit omnium ad semiellipsim, ABC, ab, F, ducibilium. Insuper anguli, FBG, FBH, sunt æquales, quia recti; & anguli, CBD, HBE, pariter inter se æquales. Ergo &, FBD, FBE, erunt æquales.



48.3. Cō.

COROLLARIUM.

Constat è contra omnium minimam esse perpendicularem tangenti in puncto occursum, & efficere angulos æquales cum ductis ab occursum ad focos.

Sfs

PRO:

ipſius, AC, vel in plano, ABC, ſed extra ipſum triangulū, ABC. Producta ergo, CA, in, F, & iunctis, FB, FA, FC, quarum, FA, ſecet, BC, in, H, & intra, HF, ſumpto quocunque puncto, G, ac iunctis, GB, GC, manifeſtum eſt in 1. fig. quod appropinquantes puncto, A, breuiores quam ſint, FA, FB, FC, aſſumi poſſunt ad aliud punctum intra, F, A, poſitum, non ergo illæ ſunt minimæ. Et quia etiam continuo accedentes ad, B, poſſunt ſemper breuiores, & breuiores haberi, ideò nullibi erit punctum quaſitum, niſi pro eo abuti velimus puncto, B, in quo tres diſtantiæ in duas tantum, BA, BC, degenerabunt. In 2. fig. verò erunt, BF, FC, maiores ipſis, BG, GC, & addita comuni, AG, erunt, BF, FC, AG, maiores ipſis, BG, GA, GC, & multo maiores ipſæ, BF, FA, FC, non ergo iſtæ erunt minimæ. 21.1. Ele-

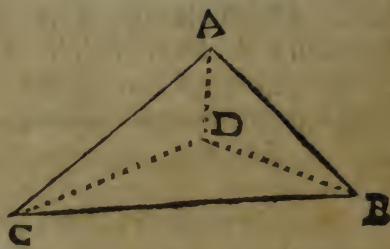
Sit nunc aſſumptum punctum vt, H, in ambitu trianguli, intelligaturque focus, A B, chordaque, AHB, deſcripta ex parte, H, ſemiellipſis; vnde, CH, ducta à puncto, C, extra ſemiellipſim ad punctum, H, ſi tres, CH, HA, HB, ſunt omnium minimæ, erit pariter omnium ad ellipſim deſcriptam à puncto, C, ducibilium minima, efficietque cum, HB, HA, hinc inde angulos æquales, quod eſt abſurdum, eſt enim, CH, in directum ipſi, HB. Non ergo punctum quaſitum erit extra rectam, A C, vel extra triangulum, A B C, aut in eius ambitu. Hoc tamen intellige niſi pro quaſito vno datorum abuti velimus, tribus diſtantijs tunc in duas tantum degenerantibus, hoc enim contingere poterit, vt nunc patebit. Quod, &c. Cor. ant.

P R O P O S I T I O XXV.

Si tria data puncta fuerint in angulis trianguli angulum habentis graduum 120. vel maiorem: punctum quaſitum, non erit aliud quam vnum ex datis punctis, illud nempe, quod breuiora trianguli latera terminabit.

S Int data puncta, A, B, C, in angulis trianguli, ABC, cuius angulus, B A C, ſit graduum 120. vel maior, & S ſs 2 breuio-

breuiora latera sint, BA, AC. Dico non aliud haberi punctum quæsitum, quam, A, quo abuti possumus, tribus distantijs in duas, AB, AC, degenerantibus. Sit enim, si esse potest, punctum, D, cuius (iunctis, DA, DB, DC,) tres distantiae sint minimæ. Si ergo focus, A, B, & chorda, BDA,



Cor. 23.
huius.

31.1. Ele.

intelligatur ex parte, D, descripta semiellipsis, quoniam, DA, DB, DC, ponuntur esse minimæ, erit, CD, omnium ad semiellipsim ducibilium minima, & ideò faciet æquales angulos, CDB, CDA. Eodem modo per semiellipsim descriptam focus, A, C, chorda, ADC, ostendemus angulos, BDA, BDC, pariter esse æquales. Tres ergo, BDA, ADC, CDB, erunt inter se æquales, & singuli graduum 120. Sed, BAC, non est minor quam gr. 120. ex hypothesi. Ergo, BDC, erit vel æqualis, vel minor ipso, BAC, quod est absurdum. Non ergo dabitur minima triga distantiarum ad punctum intra triangulum, sed nec in ambitu, vel extra. Ergo cum datur minima quantitas, saltem in duabus distantijs, tales erunt, BA, AC, ipsumque, A, deseruiet pro quæsito. Quod, &c.

C O R O L L A R I U M.

Hinc patet si punctum quæsitum sit intra triangulum datorum punctorum, non aliud esse quam illud, apud quod sunt ad data puncta tres circumstantes anguli singuli graduum 120.

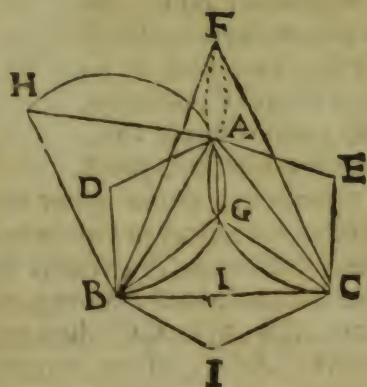
P R O.

PROPOSITIO XXVI.

Supposito dari minimam quantitatem in tribus distantijs, oportebit tria data puncta esse in angulis trianguli, cuius unusquisq; sit minor gradibus 120.

Non enim dabitur minima tria distantiarum ad punctum extra triangulum, vel in illius ambitu, ergo illud erit intra, eritq; necessarium, apud quod fient circumstantes anguli singuli gr. 120. At tale punctum non potest reperiri intra, si aliquis trianguli dati angulus fuerit gr. 120. vel maior. Superest ergo videndum num possit haberi cum anguli erunt singuli minores gradibus

120. Quod sic patebit. Sit triangulum, ABC, datorum punctorum, A, B, C, & in eo quilibet angulus minor gradibus 120. Fiant itaq; super, AB, AC, triangula isoscelia, ABD, AEC, quorum anguli, D, E, æqualibus lateribus contenti singuli sint gr. 120. & centris, D, E, intervallis, DA, AE, periphæriæ describantur, AGB, AGC, quæ indefinite productas, dico se secare intra triangulum, ABC. Quod enim illæ non sibi occurrant vel in, BC, vel subter, BC, manifestum est, quia versus, BC, continuo disjunguntur, quod etiam amplius patebit inferius. Similiter non se tangent in, A, essent enim, DA, AE, sibi in directum, quod est falsum: etenim anguli, DAB, EAC, singuli sunt graduum 30. &, BAC, minor est gradibus 120. unde tres, DAB,



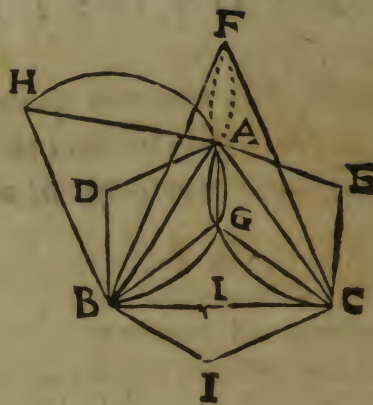
24. huius.

Cor. ant.

Prop. ant.

12. 3. Elē.

- DAB, BAC, EAC, faciunt minus quam gr. 180. Sed nec extra, ut in, F, concurrent, iunctis enim, BF, FC, cum, BD A, sit angulus ad centrū, & BFA, ad circumferentiam, erit ille huius duplus, & subindē, BFA, erit gr. 60. Eadem ratione constabit, AFC, esse gr. 60. unde totus, BFC, erit gr. 120. sed & eo maior est, BAC, erit ergo, BAC, maior grad. 120. cōtra hypothesim, quod est absurdum. Restat igitur ut concursus non possit fieri nisi intra, fiet autem in vno tantum puncto, quia periphæriæ conueniunt in, A, & circulus circulum non nisi in duobus punctis secare potest. Sit ergo talis concursus in, G, & iungantur, GA, GB, GC; dico autem singulos angulos, AGB, BGC, AGC, esse gr. 120. Sumpto enim in altera periphæriarum, ut in, BGA, continuata versus, A, quolibet puncto, ut, H, iunctisq; HA, HB, erunt anguli, AHB, AGB, oppositi æquales duobus rectis, sed angulus, H, erit gr. 60. cum sit $\frac{1}{2}$ anguli, D, ad centrum: ergo, AGB, erit gr. 120. Eodem modo probabitur, AGC, esse gr. 120. quare, BGC, reliquus ad 4. rectos erit pariter gr. 120. Ex hoc constat si concursus fieret ut in, I, quod duo anguli, AIB, AIC, essent gr. 240. quod est absurdum, essent enim vel æquales duobus rectis, vel illis minores. Patet ergo in huiusmodi triangulo posse reperiri punctum, apud quod fiant anguli singuli gr. 120. ad illudq; & non ad aliud punctum constitui trium distantiarum à datis punctis minimā quantitatem. Quod ostendere opus erat.



De

De inueniendis lateribus trianguli æquicruris ex data area, & perimetro eiusdem.

Hoc mihi proposuit A. R. P. Niceronius, de quo in Præfatione Exerc. 4. mentio facta est. Solutionem verò præbent sequentes Propositiones, etsi per locum solidum, supposito quodam lemæ Archimedeo.

PROPOSITIO XXVII.

Datam rectam, AC, sectam utcumq; in, B, ita diuidere ex. gr. in, D, ut parallelepipedum sub, AB, & q. BC, æquetur parallelepipedo sub, AD, & q. DC.

SIt in 1. figura, AB, minor quàm $\frac{1}{2}$, AC, in 2. sit $\frac{1}{2}$, & in 3. fig. maior quàm $\frac{1}{2}$ ipsius, AC: ducatur autem, per, B, perpendicularis ipsi, AC, & indefinita, NO, in qua sint assumptæ, IB, BF, singulæ æquales ipsi, BC, &, FH, ipsi, BA; deinde rectæ, IH, applicetur rectangulum, IGH, 28. 6. Elē. cuius minus latus sit versus, H, æquale quadrato, BF, deficiens quadrato, GH (hoc enim fieri potest cum, BF, sit minor dimidia, IH) cum verò, AB, sit minor quàm $\frac{1}{2}$, AC, in 1. fig. erit etiam, FH, æqualis, BA, ex constructione, minor quàm $\frac{1}{2}$, BH; (est enim, BH, æqualis quoq; ipsi, AC,) & subinde, FH, erit minor medietate, BF, ac consequenter minor quàm $\frac{1}{4}$, IF: vnde rectangulum sub, HF, FI, erit minus quàm $\frac{1}{4}$ quadrati, IF, & subindè minus quadrato, BF, ac consequenter minus rectangulo, IGH, iam applicato. Punctum ergo, G, remotius erit à puncto, H, quam

quam dico transfiguram esse per puncta, G, L. Etenim in
 1. figura q. BG, deficit à q. BF, rectangulo, IGF: est autem
 q. BF, æquale rectangulo, IGH. Ergo q. BG, deficit à
 rectangulo, IGH, rectangulo, IGF. Sed etiam rectangulum
 sub, IG, FH, deficit ab eodem rectangulo, IGH, ipso re-
 ctangulo, sub, IG, GF. Ergo q. BG, æquatur rectangulo
 sub, IG, FH, hoc est rectangulo, sub, MA, AB, cum, MA,
 sit æqualis, IG, &, FH, ipsi, AB; vnde punctum, G, erit in
 dicta semiparabola. Similiter cum q. DL, seu q. BF, sit
 æquale rectangulo, IGH, hoc est rectangulo sub, MA, &,
 AD, quæ est æqualis, GH, per constructionem; erit quoq;
 L, in dicta semiparabola, quæ sit, AGL.

5.2. Elem.

1.2. Elem.

11.1. Con.

11.1. Con.

In 2. fig. cum tria puncta, F, G, L, sint vnum punctum,
 cumq; quadrato, BF, æquale factum sit rectangulum, IG
 H, ac sit, IG, æqualis, AM, & GH, ipsi, BA, erit q. BG,
 æquale rectangulo sub, MA, AB, & consequenter punctum,
 G, erit in dicta semiparabola, quæ sit, AG.

11.1. Con.

In 3. fig. deniq; cum q. BG, excedat q. BF, rectangulo, I
 GF; cumq; q. BF, per constructionem sit æquale rectangu-
 lo, IGH, ideò q. BG, excedet rectangulum, IGH, rectangu-
 lo, IGF. Quadratum ergo, BG, æquabitur rectangulis sub,
 IG, GH, & sub, IG, GF, idest rectangulo sub, IG, FH, nempè
 rectangulo sub, MA, BA: cumq; q. BF, seu q. DL, æquetur re-
 ctangulo, IGH, hoc est rectangulo sub, MA, AD, ideò tam pun-
 ctum, G, quam, L, erunt in dicta semiparabola, quæ sit, AGL.

6.2. Elem.

1.2. Elem.

11.1. Con.

Rursus cum, BA, ad, AD, sit vt q. BG, ad q. BL, sit
 autem q. BO, æquale q. DC, (est enim, BF, æqualis, BC,
 &, FG, ipsi, BD, nam tota, BH, toti, AB, & pars, GH,
 parti, AD, est æqualis) & q. DL, æquale q. BF, seu q. B
 C; erit vt, BA, prima ad, AD, secundam, ita q. DC, ter-
 tia ad q. CB, quartam. Ergo parallelepipedum sub pri-
 ma, BA, tanquam altitudine, & sub quarta, hoc est
 sub basi q. BC, æquabitur parallelepipedo sub secunda,
 AD, & tertia q. DC. Igitur linea recta, AC, secta est in,
 D, prout opus erat.

20.1. Con.

34. 11. Elem.

T. 11

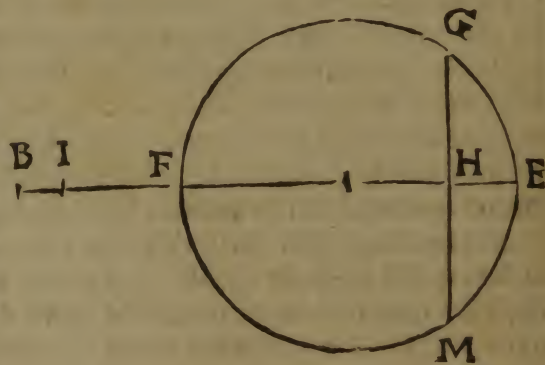
COROL.

Hinc habetur proposito quocunq; paralleleppipedo, ut sub, AB , & $q. BC$, existente, AB , minori quàm $\frac{1}{2}$, AC , reperiri posse aliud paralleleppipedum predicto æquale, eidem recte, AC , applicatum, ut quod sub, AD , & $q. DC$, cuius altitudo maior erit quàm $\frac{1}{2}$ ipsius, AC , & è contra. At cum, AB , erit $\frac{1}{2}$, AC , tunc nullum aliud dato æquale, ipsiq; AC , applicabile, ac cubi deficientis reperiri poterit, sed tale paralleleppipedum non erit singulare, omniumq; ipsi, AC , sic applicabilium maximum, ut nunc probabitur.

PROPOSITIO XXVIII.

Omnium paralleleppipedum ad eandem rectam lineam applicabilium, cubiq; deficientium, maximum est quod ad tertiam illius partem applicatur.

Sit data recta, BE , illiusq; $\frac{1}{3}$, BF . Dico paralleleppipedum sub, BF , & $q. FE$, esse dictorum maximum. Assumatur primò punctum inter, F, E , ut, H , fiatq; sphaera, FGE , circa diametrum, FE , quã



Elicitur
ex 7. 3.
Geo. Ind.

Ex ant.

scet planum ipsi, FE , erectum ductum per, H , nempe, $GHEM$. Igitur paralleleppipedum sub, BF , & $q. FE$, ad paralleleppipedum sub, BH , & $q. HE$, erit ut sphaera, FGE , ad portionem, GEM . At sphaera maior est dicta portione; ergo & paralleleppipedum sub, BF , & $q. FE$, maius erit paralleleppipedo sub, BH , & $q. HE$. Sumatur nunc punctum utcumq; inter, B, F , ut, I . Cum ergo paralleleppipedo sub, BI , & $q. IA$, aliud æquale ultra, F , ut sub, BH , & $q. HE$, reperiri possit; &

cum

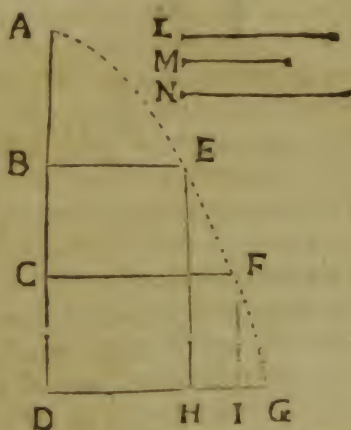
cum parallelepipedum sub, BF, & q. FE, ostensum sit esse maius eo, quod sit sub, BH, & q. HE, idem quoq; maius erit eo, quod sit sub, BI, & q. IE, hocq; de ceteris quibuscunq; eodem modo ostenderetur. Ergo parallelepipedum sub, BF, et q. FE, est omnium maximum, quæ ad, BE, deficientia cubis applicari possunt. Quod, &c.

PROPOSITIO XXIX.

Si sit semiparabola quaecunq; AGD, vertice, A, diametro, AD, ad quam ordinatim applicentur quaecunq; DE, CF, BE, & per puncta, E, F, ipsis, AD, DG, parallela ducantur, EB, FC, EH, FI, quibus fiant parallelogramma equiangulara, BH, CI. Dico paralleleppipedum sub, AC, & q. CD, ad paralleleppipedum sub, AB, & q. BD, esse in duplicata ratione parallelogrammi, CI, ad parallelogrammum, BH.

Flat vt, CF, ad, BE, ita, L, ad, M, & vt, CD, ad, D, B, ita, M, ad, N. Cum ergo parallelogrammum, CI, ad, BH, habeat rationem cōpositam ex ratione, CF, ad, BE, idest, L, ad, M, &, CD, ad, I, B, nempe, M, ad, N; erit parallelogrammū, CI, ad, BH, vt, I, ad, N, cū ratio, L, ad, N, componatur ex rationibus, L, ad, M, &, M, ad N. Rursus parallelepipedum sub, AC, & q.

CD, ad paralleleppipedum sub, AB, & q. BD, habet rationē
compositā ex ratione, AC, ad, AB, hoc est ex ratione q. CF,
ad q. BE, vel q. L, ad q. M; & ex ratione q. CD, ad q. DB, hoc
est q. M, ad q. N. Sed etiam q. L, ad q. N, habet rationē com- 20.1. Con.
positam ex iisdem rationibus, nempe q. L, ad q. M, & q. M, ad
q. N.



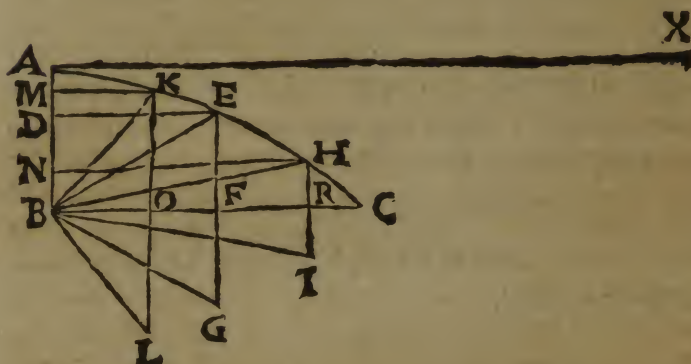
23. 6. Elc.

20.1.Сол.

q.N. Igitur paralleleppipedū sub, AC, & q. CD; ad paralleleppipedū sub, AB, & q. BD, est vt q. L, ad q. N. hoc est in duplicata ratione ipsius, quā habet, L, ad, N, scilicet parallelogrammum, CI, ad parallelogrammum, BH, Quod, &c.

PROPOSITIO. XXX.

Data area, & perimetro trianguli æquicruris, latera notificare.



71.1. Con

EXponatur recta, BC, dimidio dati perimetri, æqualis, cuius $\frac{1}{2}$ sit, BA, ipsi, BC, perpendicularis, à qua abscindatur, AD, $\frac{1}{3}$ ipsius, AB, & vt, AB, ad, BC, ita fiat, BC, ad, AX, & latere recto, AX, describatur circa axim, AB, vertice, A, semiparabola ad partes, C, quæ transibit per, C, cumq; BC, æquetur rectangulo sub, BA, AX, eritq; B, focus eiusdem, cum, AB, sit $\frac{1}{3}$ ipsius, AX, lateris recti, vt ego ostendi in Speculo Vstorio Cap. 9. Similiter erit, BC, æqualis compositæ ex quacunque acta à foco, B, ad parabolam, AC, & ex ea, quæ ducitur ab illius occurſu cum parabola, æquidistanter ipsi, AB, vsque ad, BC, vt patet ibidem Cap. 10. Sic igitur ducta, DE, per, E, parallela, BC, & EF, parallela, AB, ac iuncta, EB, erit, BC, æqualis compositæ, BEF, sicut est quoque æqualis compositæ, BAB. Cum ergo, BA, sit tripla, AD, erit, BA, sexquialtera, BD; & dupla, BA, (cui æquatur composita, BEF,) erit tripla, DB; ergo, BEF, erit tripla, EF, & BE, dupla ipsius, EF, ipsumq;

trian-

triangulum, BEF, erit dimidium trianguli æquilateri, vt, EBG, sub data perimetro. Quoniam autem nota est perimetro, nota erit & semiperimeter, BEF, & cum, BE, sit dupla, EF, nota erit ipsa quoque, EF, & BE, ac earum quadrata. Dempto ergo q. EF, ex q. EB, relinquetur notum q. BF, & ipsa, BF, nota, quæ ducta in, FE, notam, efficiet notam aream trianguli æquilateri, EBG, quæ si adæquetur datæ areæ, iam inuentum erit quod quærebatur, cum dicti trianguli sint nota latera. Si verò illi non adæquetur, erit eadem necessariò minor. Nam veluti ostensum est parallelepipedum sub, AD, & q. DB, esse omnium ipsi, AB, applicabilium maximum, ita manifestum est, BEG, esse omnium triangulorum æquicurium, quæ incipiunt à recta, BC, & desinunt in rectam, AB, maximum, sunt enim parallelepipeda applicata induplicata ratione suppositorum in Prop. ant. parallelogrammorum, hoc est huiusmodi triangulorum æquicurium, quæ dictis parallelogrammis adæquantur, vt, BEG, ipsi, DEFB.

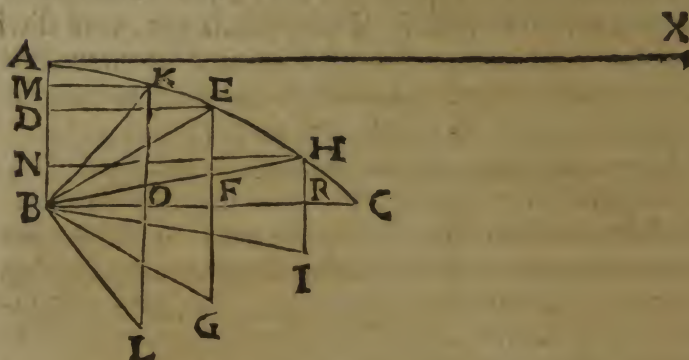
Ex ant.

Fiat ergo vt q. numeri areæ trianguli æquilateri ad q. datæ areæ, ita parallelepipedum sub, ad, & q. DB, seu dimidium cubi, DB, ad quartum solidum proportionale; & tandem huic solido applicetur ad rectam, AB, æquale parallelepipedum, vt sub, AN, & q. NB, si velimus ipsum altius, vel vt sub, AM, & q. MB, si ipsum velimus depressius; ductis enim, BK, BH, & completis æquicuribus triangulis, BKL, BHI, quorum bases, KL, HI, sint perpendiculares ipsi, BC, erit triangulum, BHI, & BKL, requisitum. Est enim parallelepipedum sub, AD, & q. DB, ad parallelepipedum sub, AN, & q. NB, vt q. numeri areæ, DE, ad q. numeri areæ, NR, vel vt q. numeri areæ trianguli æquilateri, BEG, ad q. numeri areæ trianguli æquicurium, BHI, prædicto isoperimetri; sed vt dictum parallelepipedum sub, AD, & q. DB, ad parallelepipedum sub, AN, & q. NB, ita est q. numeri areæ trianguli æquilateri, EBG, ad q. numeri datæ areæ; ergo triangulum, HBI, æquatur datæ areæ, cuius semibasis, HR, sit nota, si notificetur, NB. Eodem modo discurremus circa triangulum, BKL, depressius ipso, HBI, cuius semibasis, KO, nota fiet, si notificetur, MB. Res ergo huc deducta est,

Elicitur
ex ant.

est, ut nempe dicto solido quarto proportionali æquali
parallelepipedum applicemus ipsi, AB, quartæ parti dati
perimetri, cubo deficiens.

SCHOLIVM.



Si datum solidum sit ex. gr. paralleleppipedum sub , AM ,
 & $q. DB$, & oporteat illi æquale paralleleppipedum ap-
 plicare ad , AB , deficiens cubo , quod nunc supponatur esse
 factum sub , AN , & $q. NB$; necesse erit efficere ut , NA , ad ,
 AM ita $q. DB$, ad $q. BN$. Hoc autem est Lemma , quod per
 locum planum resolutum , nedum huic nostro negotio describi-
 ret , sed etiam Prop. 4. secundi Arch. de Sphæra , & Cylindro ,
 in qua volens spheram in datam rationem secare sese ad hoc
 Lemma reducit , quod ab Eutocio , Davide Rinalto , ac
 alijs Commentatoribus ad dictam Prop. 4. non nisi
 per locum solidum hucusque absolutum est .
 Videatur ergo huiusmodi solutio apud
 dictos Auctores , ut per eam huic
 Propositioni quantum licet ,
 satisfieri possit .



De

De ratione primæ regulæ Problematis tertij meæ Centurię.

Quoniam nonnulli amici mei huiusmodi rationem à me flagitarunt, cum simplicem regulam sine demonstratione ibidem tradiderim: idèd hic eorum votis satisfaciendum duxi. Oportet autem hanc intelligere cupienti quod ei non sint ignota proprietates sinuum, & logarithmorum, ac illa præcipuè, quæ nos docet, datis tribus quibuscunque numeris, si addamus in simul logarithmos secundi, & tertij, & à facta summa auferamus Log. primi, quod remanebit logarithmus quarti numeri proportionalis quaesiti. Vide meæ Trigonometriæ priorem partem Prob. 5. ubi de regula trium per logarithmos absoluenda amplius differitur.

PROPOSITIO XXXI.

In semicirculo, AHE , sumptis quibuscunque arcibus, AF , AH , centro, D . Dico quadratum radij, AD , ad rectangulum sub sinibus rectis semisumma, & semidifferentia datorum arcuum, AF , AG , esse ut, AE , diametrum ad differentiam sinuum versorum eorundem arcuum, AF , AG .

Sumpto enim arcu, CH , ipsi, AF , æquali, iungantur, AH , FG , & à punctis, F , G , H , demittantur super, AE , perpendiculares, FB , GC , HI ; & per, F , extendatur ipsi, AE , parallela, EK . Erit ergo arcus, AH , summa, &, FG , differentia datorum, AF , AG , & cum, AF , GH , sint æquales arcus,

4.6. Elem. arcus, erunt, AH ,
 FG , inter se paralle-
 læ, vt &, GC , HI ,
 intet se, quapropter
 triangula, HIA , G
 KF , similia erunt.

13.6. Elē. Est ergo, HA , ad,
 AI , vt, GF , ad, FK :
 sed vt, HA , ad, A
 I , ita est, EA , ad,
 AH ; ergo vt, EA ,
 ad, AH , ita, GF ,
 ad, FK . Rectangu-

16.6. Elē. gulum igitur sub extremis, EA , FK , vel, BC , æquatur
 rectangulo sub medijs, AH , FG , quod serua. Quoniam
 verò vt, EA , ad, BC , ita, sumpta, AE , communi alti-
 tudine, est q. AE , ad rectangulum sub, AE , BC ; hoc
 verò per ostensa æquale est rectangulo sub, AH , FG .
 Ergo q. AE , ad rectangulum sub, AH , FG , erit vt, A
 E , ad, BC . Sed vt q. AE , ad rectangulum sub, AH ,
 FG , ita eorum subquadrupla, idest ita q. AD , radij ad re-
 ctangulum sub dimidijs ipsarum, AH , FG , nempè (ijs
 bifariam sectis in, M , L ,) sub, AM , FL , hoc est sub
 sinibus rectis dimidij arcuum, AH , FG , semisum-

mæ, & semidifferentiæ datorum arcuum, AF ,

AG . Ergo q. radij, AD , ad rectangu-

lum sub sinibus rectis semisummæ,

& semidifferentiæ datorum arcu-

um, AF , AG , est vt, AE ,

ad, BC , differentiam

sinuum verso-

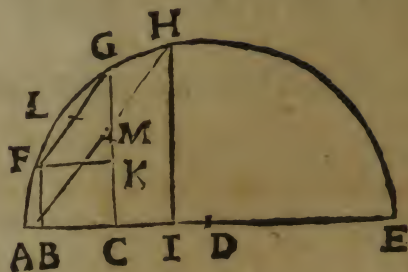
rum,

AB , AC , eorundem arcuum, AF ,

AG . Quod, &c. Hoc idem

probatur in meo Di-

rec. p. 3. Cap. 7.



PRO.

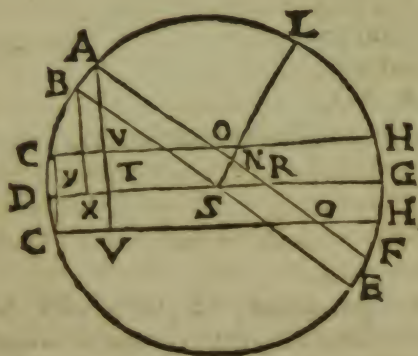
PROPOSITIO XXXII.

Rationem affere dictæ primæ regulæ Problematis tertij præfatæ Centuriæ, quæ inferunt ad inveniendam solis altitudinem, vel depressionem.

Regula est huiusmodi. Logarithmus semisummae, cum log. semidiffereutiæ arcus semidiurni, & distantie solis à medio cæli, cum log. binarij, log. secundo elevationis poli, ac log. secundo declinationis Solis; dabit log. altitudinis, vel depressionis eiusdem Solis respectu horizontis, demptis consuetis unitatibus, &c.

Animaduertendum est autem hanc primam regulam postulare ut parallelus, in quo Sol reperitur, secet horizontem.

Sit ergo meridianus, ADEG, diameter horizontis, DG, æquatoris, BE, paralleli Solis, AF, secans, DG, in, R, similiter, CH, paralleli horizonti, DG, & sit ducta, LS, à centro ad polum versus quem vergit parallelus Solis, quæ secet, AF, in, N, & CH, in, O. Denique à punctis, A, B, C, cadant super, DG, perpendiculares in, T, X, Y, quæ erunt quoque ipsi, CH; perpendiculares, unde fient triangula, XBS, VAO, TAR, æquiangula, quia etiam, BE, AF, sunt inter se paral-



log. radij, nempe auferamus 2000000. remanebit ipfius, OR, logarithmus. Ergo fi simul addamus log. 2. eleuationis poli, log. 2. declinationis Solis, & log. binarij, cum logarithmis femifummae, & femidifferentiae, arcus femidiurni, & distantiae folis à meridiano, & ex fumma auferamus 2000000, & infuper 1000000. log. radij, qui in prima additione erat quoq; auferendus, hoc est fi ex facta fumma auferantur 3000000. seu tollantur ultimo loco ad finiftram tres vnitates, cum ciphrae non alterent ipfam fummam, remanebit log. ipfius, VT, vel, CY, finis recti altitudinis Solis, vel depressionis quaefita. Patet ergo ratio dictae regulae.

COROLLARIUM.

SI vice folis fupponatur quaecunq; ftella, seu quodcunq; punctum caelestis Sphaera, quod oriatur, & occidat in propofita regione (hoc autem erit cum data ftella, vel puncti complementum declinationis fuperauerit altitudinem poli) eidem quoq; adaptabitur praefata regula: ita vt, data hora, & ex ea, media Solis, & ftella, vel dati puncti afcenfione recta, elicitur distantia ftella, vel puncti à meridiano, nec non data poli eleuatione, declinatione ftella, vel puncti, ipfius altitudinem fuper horizontem, vel depressionem, per eandem regulam poffimus inuiftigare,

De quadam infigni Galilei Propositione aliter ab eo per me hic demonftrata.

Admirabilis mihi femper visa est circuli proprietates illa, quam in poftremis Dialogis pagina 45. demonftrauit ipfe Galileus. Circa hanc cum aliquando fpecularem,

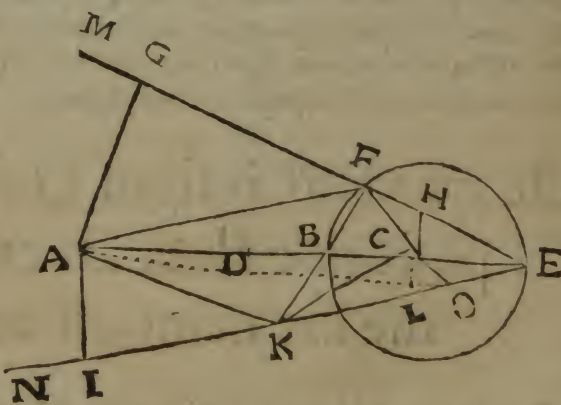
larem, occasione cuiusdam controuersiae exortae Panormi inter Illustrissimum Daniele Spinulam, & quendam R. D. Petrum Emanuelem, circa quoddam Problema geometricum, de qua idem Spinula ad me scripserat, contingit mihi in nouam dictae Prop. demonstrationem incidere, quam ideò hic appositam studioso non ingratam futuram esse diiudicauis; est autem huiusmodi.

PROPOSITIO XXXIII.

Si sit recta, AC, secta utcumq; inaequaliter in, B, ita ut BC, sit pars minor, cui sumatur equalis, BD, & fiat ut, AD, ad, DB, ita, AC, ad, CE, describaturq; super diametro, BE, circulus, BF, & sumatur in eius peripheria quoduis punctum, ut, F, iunganturq; FA, FC. Dico, AF, ad, FC, esse ut, AB, ad, BC; & ad nullum aliud punctum coniunctas, ab, A, C, esse ut ipsas, AB, BC.

Iungatur, BF, per, E, F, extensa indefinitè, EM, cadat ab, A, C, super eam perpendiculares, AG, CH, quæ, cū, etiā, BF, sit ipsi, EM, perpendicularis, erunt tum inter se, tum cum, B, F, parallelæ.

Quoniam igitur est, AD, ad, DB, ut, AC, ad, CE, componen-



ponendo erit, AB, ad, BD, vel, BC, vt, AE, ad, EC, nempe vt, AG, ad, EH, ob similitudinem triangulorum, AGE, CHE, Sed vt, AB, ad, BC, ita est, GF, ad, FH, ergo, AG, ad, CH, erit vt, GF, ad, FH, & permutando, AG, ad, GF, erit vt, CH, ad, HF. Cum ergo circa æquales angulos, AGF, CHF, (sunt enim recti) sint latera proportionalia, triangula, AGF, CHF, erunt similia. Igitur, AF, ad, FC, erit vt, GF, ad, FH, nempe vt, AB, ad, BC.

10.6. Ele.

6.6. Elem.

Detur nunc quoduis punctum, K, extra dictam peripheriam, & iungantur, KA, KB, KC. Dico non esse, AK, ad, KC, vt, AB, ad, BC. Sit enim si fieri potest, & ducta indefinita, EKN, demittantur ab, A, C, super, EN, perpendiculares, AL, CL. Quoniam ergo, AK, ad, KC, est vt, AB, ad, BC, nempe vt, AE, ad, EC, vel, AL, ad, CL; triangula, ALK, CLK, erunt similia, igitur, LK, ad, KL, erit vt, AK, ad, KC, nempe vt, AB, ad, BC. Erit ergo, KB, parallela ipsis, LA, CL, & subinde angulus, BKE, erit rectus, vnde, K, erit in periphæria descripti circuli contra suppositum, quod est absurdum. Idem probabitur de quouis puncto intra peripheriam assumpto.

7.6. Elem.

Elicitur
ex 10. 6.
Elem.
Con. 31.
3, Elem.

Quod si altera ipsarum, AK, KC, vt, AK, esset ipsi, EN, perpendicularis, vt contingere potest, esset, AK, ad, KC, vt AB, ad, BC, hoc est vt, AE, ad, EC, vel, AK, ad, CL, vnde, KC, CL, essent æquales, quod est absurdum, propter angulum rectum, CLK. Possent quoque ab, A, C, cadentes perpendiculares, vt super, EN, esse ambæ ad alteram partem, dati puncti quod sit ex. gr. O, & tunc, iunctis, OA, OC, ostenderemus vt supra triangula, AIO, CLO, esse similia, & subinde angulum, AOI, æquari angulo, COL, partem totam, quod est absurdum. Ad nullum aliud ergo punctum extra peripheriam, BFE, ab, A, C, inflexæ se habent vt, AB, ad, BC, veluti sunt quæcunque ad puncta dictæ periphæriæ inclinatæ.

Quod erat ostendendum.



De

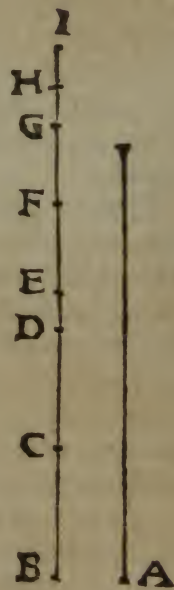
De magnitudinum incommensurabilitate.

PROPOSITIO XXXIV.

Datis duabus quibuscunque magnitudinibus incommensurabilibus, possibile est ab alterutra ipsarum auferre commensurabilem reliquæ, ita ut residuum sit minus quacunque proposita magnitudine.

Sint datæ magnitudines incommensurabiles, A, BI. Dico ab earum alterutra, ut à, BI, auferri posse magnitudinem ipsi, A, commensurabilem, quæ deficiat à, BI, quantitate minori oblata quacunque, ut minori ipsa, GI. Secetur, BI, bifariam in, E, & ab, A, auferatur ipsius dimidium, ac à residuo dimidium, sicque semper fiat, donec deuenianatur ad magnitudinem ipsa, BE, minorem, hoc enim fieri potest, cui æquetur, BC. Rursus multiplicetur, BC, donec fiat primò maior, BE, sitq; facta, BF, à qua si dematur, DF, æqualis ipsi, BC, nō sit reliqua, BD, maior, BE. Dico autem punctum, F, cadere inter, E, I, si enim caderet in, I, vel ultra, I, esset, DF, non minor, EI, & subinde, CB, ipsi, DF, æqualis, esset non minor, BE, contra constructionem, quod est absurdum. Cadit ergo, F, inter, E, I, quare per, BF, aufertur à, BI, plusquam ipsius, BI, dimidium, & est, BF, constans ex partibus, BC, CD,

t. 10. Ele



CD, DF, æqualibus inter se, eidem, A, (vt est ipsa, BC,) commensurabilis.

Eodem modo ex reliqua, FI, quæ erit ipsi, A, incommensurabilis, auferemus plusquam dimidium, ipsi, A, commensurabile, & sic semper donec relinquatur minus, GI, hoc enim fieri potest; sitque talis magnitudo, FH, relinquens, HI, minus, GI. Ergo cum utræque, BF, FH, sint ipsi, A, commensurabiles, erunt quoque inter se commensurabiles, & tota, BH, erit singulis partibus, AF, FH, commensurabilis. Sunt itaque, A, commensurabilis ipsi, BF, & HB, pariter eidem, BF, commensurabilis: vnde erunt, BH, & A, inter se commensurabiles. Sed, BH, deficit à, BI, magnitudine, HI, minori oblata, GI. Ergo possibile est ab alterutra datarum magnitudinum incommensurabilium auferre reliquæ commensurabilem, quæ ab ipsa deficiat magnitudine quacunque oblata minori. Quod ostendere opus erat.

1. 10. Ele

12. 10. Elem.

16. 10. Elem.

12. 10.

S C H O L I V M.

Hanc Propositionem apponere volui, mirabile enim mihi videtur illud, quod ab alterutra ipsarum magnitudinum incommensurabilium auferendum est, vt remaneant reliquæ commensurabiles, omni assignabili magnitudine minus esse posse. Non tamen illud dicendum est esse nihil quod inter duas magnitudines constituit incommensurabilitatem. sed erit aliquid, vt minus quacunque oblata magnitudine, alioquin essent & incommensurabiles, vt cõmensurabiles. Simile igitur quoddam mihi videtur hic contingere ei, quod circa hyperbolam, & asymptotos, si enim in infinitum producantur, ad se ipsas propius accedunt, & ad intervallum perueniunt minus quolibet dato intervallo, nec tamen idè concurrunt. Hæc sunt Geometria admiranda, quæ etsi in infiniti abditis recessibus lateant, eiusdem tamen vim, & efficaciam non effugiunt.

14. 2. Co.

De

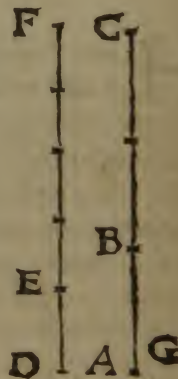
De motu puncti in circulo.

PROPOSITIO XXXV.

Si fuerint magnitudines, DE, AB, ut numerus ad numerum, & quot unitates sunt in numero alterutrius, toties reliqua multiplicetur: fient ex utraque multiplicatione æquales magnitudines. Et si sint duæ æquales magnitudines, ut, AC, DF, singule in quocunque æquales partes diuise, ita ut pars, FD, sit, DE, & pars, AC, sit, AB: erit, DE, ad, AB, ut numerus partium in, AC, ad numerum partium in, DF.

12,5. Ele.

Sint ergo, DE, AB, multiplicatæ, DE, quidem secundum unitates numeri, AB, & AB, secundum unitates numeri, DE, factæque sint, DF, AC, quas dico æquales esse. Quoniam ergo ut numerus ipsius, AB, ad unitatem, ita est numerus partium in, FD, æqualium, DE, ad unitatem, idcò ita erunt omnes partes, FD, ad, DE, & ita, FD, ad, DE. Secetur, AB, in, G, ut quemadmodum est numerus partium, AB, ad unitatem, ita sit, AB, ad, AG. Erit ergo ut una, AB, ad unam, AG, ita omnes partes æquales, AB, quæ sunt in, AC, idest tota, AC, ad tot æquales ipsi, AG, quot sunt partes æquales ipsi, AB, in, AC. Sed illæ tot sunt quot, unitates sunt in numero ipsius, DE, ex constructione, & est AG, communis mensura ipsarum, DE, AB. Ergo, DE, constabit ex tot æqualibus ipsi, AG, quot unitates sunt in numero ipsius, DE. Quapropter erit, CA, ad, DE, ut, BA, ad, AG, seu ut numerus partium, AB, ad unitatem. Sed & FD, ad,



ad, DE, ostensa quoque fuit esse ut numerus partium, AB, ad unitatem. Ergo, DF, AC, ad eandem, DE, eandem rationem habebunt, & subinde erunt æquales.

Supponantur nunc ipsæ, DF, AC, æquales, singulæque sectæ in partes æquales quocunque ita ut sint earum partes, DE, AB. Quoniam ergo, DF, AC, sunt æquales, ad eandem, ED, eandem rationem habebunt. Sit, BA, ad, AG, ut, FD, ad, ED. Erit ergo, BA, multiplex ipsius, AG, ac, FD, multiplex est ipsius, DE. Et quia, CA, ad, ED, est ut, FD, ad, DE, hoc est, ut, BA, ad, AG, permutando, CA, ad, AB, erit ut, DE, ad, AG. Erit ergo, DE, multiplex ipsius, AG, ac, CA, est multiplex ipsius, AB. Multitudo ergo partium in, DE, æqualium ipsi, AG, erit æqualis multitudini partium in, CA, ipsi, AB, æqualium. Et multitudo partium in, BA, æqualium, AG, erit æqualis multitudini partium in, DF, æqualium ipsi, DE. Erit igitur, DE, ad, AB, ut numerus partium in, CA, æqualium ipsi, AB, ad numerum partium in, FD, ipsi, DE, æqualium. Quæ ostendenda proponebatur.

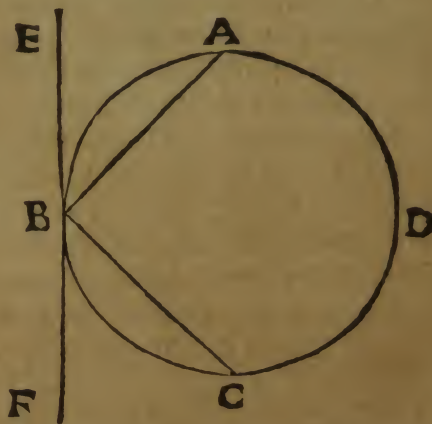
PROPOSITIO XXXVI.

Si in periphæria circuli cuiuscunque assignetur quodvis punctum, tanquam initium motus, à quo discedat aliud punctum incedens per eiusdem circuli chordam, donec à periphæria reflectatur, & continuentur indefinîtè motus, ac quæ deinceps subsequuntur reflexiones; si arcus à præfata chorda subtensus fuerit ad totam periphæriam ut numerus ad numerum: redibit punctum mobile ad initium motus post tot emensas integras periphærias, quot unitates erunt in numero arcus à chorda subtensi, transibitque eodem tempore tot ex his arcubus, quot unitates erunt in numero peri-

XXX

peripheria. At si prefatus arcus fuerit integra peripheria incommensurabilis, punctum mobile nunquam redibit ad initium motus.

Sit circulus, AB CD, chorda, AB, & A, statuat^rur tanquam initium motus, à quo discedens punctum mobile feratur per, AB, & reflectatur à, B, per, BC, à, C, per chordam, CD, & sic deinceps indefinitè, sitque primò arcus, AB,



ad totam periphæriam, ABCDA, vt numerus ad numerum, exempli gr. vt 3. ad 14. Dico post tres emensos circulos, & 14. arcus, AB, rediturum punctum mobile ad initium, A,

Ducatur tangens circulum, in, B, nempè, EF; igitur iuxta legem incidentiæ, & reflexionis apud Opticos, & Mechanicos, crit angulus, EBA, æqualis angulo, FBC; sed, EBA, æqualis est ei, qui fit in coalterna portione, BCDA; & FBC, ei, qui fit in coalterna portione, BADC. Ergo anguli portionum, BCDA, BADC, erunt æquales, & subindè ipsæ periphæriæ, AB, BC, quibus insistent adæquabuntur. Eodem modo ostendemus arcus reflexionum, quæ deinceps sequuntur, esse ipsis, AB, BC, semper æquales: quapropter omnes per has reflexiones decursi arcus erunt æquales inter se. Quoniam ergo, AB, ad, ABCDA, est vt 3. ad 14. erunt 14. arcus, AB, æquales 3. periphærijs, ABCDA. Ergo punctum mobile cum emensus fuerit 3. periphærias, ABCDA, & 14. arcus, AB, crit in ipso, A, initio motus.

Sit

Sit nunc, AB, incommensurabilis ipsi, ABCDA, periphæriæ. Dico punctum mobile, continuatis quantumvis reflexionibus, nunquam reditum esse in, A. Redeat enim ad, A, si fieri potest, post emensas aliquot periphærias, ABCDA, ut ex. gr. decursis 7. ex illis. Quoniam ergo arcus reflexionum sunt semper æquales, habebimus duas magnitudines æquales, seu vnam duabus equipollentem, nempe aggregatum ex 7. periphærijs, diuisum tum in 7. partes æquales, tum etiam in arcus ipsi, AB, æquales, qui erunt aliquo numero numerabiles, si enim essent innumerabiles, cum equetur 7. periphærijs integris, essent istæ quid infinitum, quod est absurdum. Erit ergo ut numerus integrarum periphæriarum ad numerum decursorum arcuum, ita arcus, AB, ad periphæriam, ABCDA. Non igitur, AB, erit ipsi, ABCDA, incommensurabilis, contra suppositum, quod est absurdum. Itaque punctum mobile nunquam redibit ad, A. Quod, &c.

Per post
partem
alt.

S C H O L I U M.

Simile quodam accideret in Planetis, si eorum velocitates essent incommensurabiles, nunquam enim iterum coniungerentur in eodem puncto, in quo semel fuissent coniuncti; alioquin circulationes eorundem eodem tempore effecta essent, ut numerus ad numerum, & sic consequenter eorum velocitates non essent incommensurabiles. Si ergo tales essent motus caelestes, in æternum non redirent eadem syderum constitutiones, seu annus magnus, quem vocant Platonium in immensam extensionem abiret. Itaque frustra eiusdem reditum Platonici expectarent.



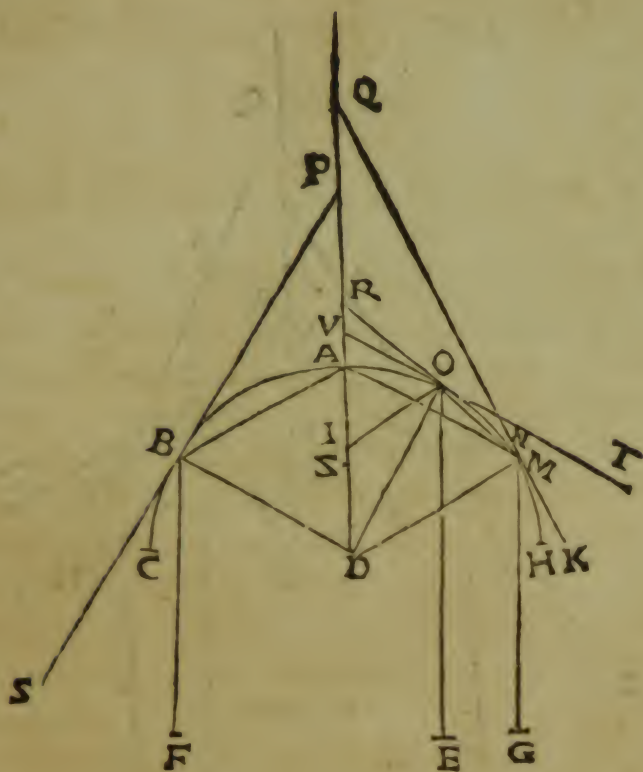
De foco Speculi sphærici concaui.

PROPOSITIO XXXVII.

Si sit semicircumferentia circuli, CAH, super centro, D, bifariam secta in, A, per radium, DA, indefinitè productū versus, A; ducaturque, AN, latus exagoni, &, AB, sumatur æqualis arcui, AN, ac reuoluatur peripheria, CAH, circa axem, AD, ut fiat, CAH, superficies sphærica, & quicunque radij axi, AD, paralleli incidant in dictam superficiem. Dico quod speculum concauum, BAN, reflectet parallelos axi procedentes ab, A, versus, N, B, in puncta ipsius, AZ, (quæ sit $\frac{1}{2}$ ipsius, AD,) procedendo à, Z, versus, A. At speculum concauum, seu fascia, CB, NH, reflectet parallelos axi procedentes à, B, N, in, C, H, in puncta eius, quæ est in directum ipsi, AD, ab, A, ultra ipsum, A, in infinitum procedendo.

Sint ergo tres radij ipsi, AD, paralleli, EO, FB, GM, ipsorumque, EO, GM, reflexæ, OI, MR, & iungantur, DO, DB, DM, BA, ducanturque tangentes in, O, B, M, occurrentes ipsi, DA, productæ in, V, P, Q, nempe, VOT, PBS, QMK. Quoniam ergo, EO, OI, sunt incidens, & reflexa, iuxta legem Opticorum efficiunt cum, VT, angulos æquales; sed etiam, DOV, DOT, recti, sunt æquales. Ergo reliqui, DOE, DOI, & subindè, ODI, DOI, erunt inter se æquales; unde, OI, erit æqualis, ID. Similiter quia, EOT, VOI, sunt æquales, etiam interior, OVI, parallelarum, EO, DA,

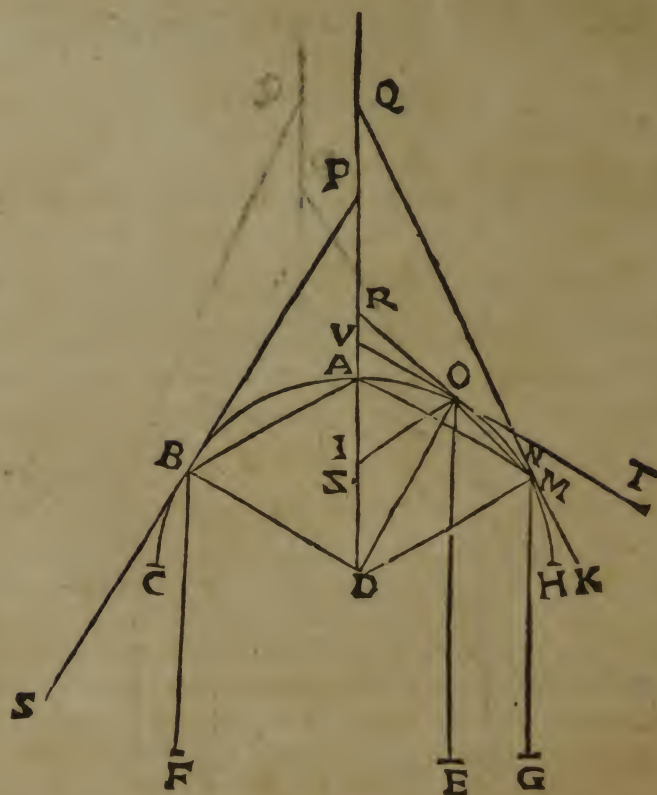
erit



erit æqualis ipsi, VOI, unde &, IO, erit æqualis, IV. Quapropter, VD, erit bifariam secta in, I. Ergo, I, cadet inter, Z, A, non enim cadet inter peripheriam, AO, & tangentem, VO. Et quia tangentes, quò magis punctum contactus recedet ab, A, remotius ab ipso, A, occurrunt productæ, DA, ut facillè probari potest: idè punctum bifariæ sectionis, ut, I, semper magis, ac magis appropinquabit ipsi, A, non tamè ullus perveniet ad, A, nisi, FB, ac quæcunque parallela axi incidens in puncta peripheriæ circuli axi, AB, erecti, cuius diameter est, BN, ut nunc probabitur.

Dico igitur, BA, esse reflexam ipsius, FB. Cum enim BA, sit latus exagoni, æquabitur ipsi, AD, unde angulus, ADB,

16.3. Ele.



AD, & subinde illi coalternus, FBD, æquabitur ipsi, DBA. Cum ergo totus, DBS, toti, DBP, sit æqualis, quia sunt recti, & pars, FBD, parti, DBA; reliquus angulus, FBS, æquabitur reliquo, ABP. Quare, BA, erit reflexa ipsius, FB. Idem verò de cæteris ipsi, FB, similibus probabitur. Ex quo constat procedendo ab, A, versus, B, N, puncta reflexionum procedere à, Z, versus, A.

Deniq; angulus, GMK, æquabitur ipsi, RMQ, sed, G MK, exterior æquatur interiori, RQM, parallelarum, G M, DQ; ergo, RMQ, æquabitur ipsi, RQM, & subindè, RM, æquabitur ipsi, RQ. Quia verò anguli recti, DMQ, DMK, sunt æquales, vt & ipsi, GMK, RMQ, reliqui, G MD,

MD, DMR, erunt pariter æquales; sed, GMD, æquatur ipsi, MDR. Ergo, MDR, DMR, erunt æquales, vnde & ipsæ, MR, RD, æquales erunt. Sed, MR, ostensa fuit æqualis ipsi, RQ. Ergo, DQ, bifariam secatur in, R. Sed &, PD, bifariam secatur in, A, cum enim anguli, IBS, ABP, seu, APB, ABP, sit æquales, etiam, AB, AP, erunt æquales, &, BA, æquatur ipsi, AD, quare &, P A, æquabitur ipsi, AD. Cum ergo, QD, sit maior, DP, etiam dimidia, RD, maior erit dimidia, AD. Quare punctum, R, erit supra, A. Idem de cæteris probabitur, & incidentes in, HN, CB, fasciam remotius à, BN, reflecti in puncta ipsius, AQ, ab, A, remotiota. Constat ergo propositum.

S C H O L I U M.

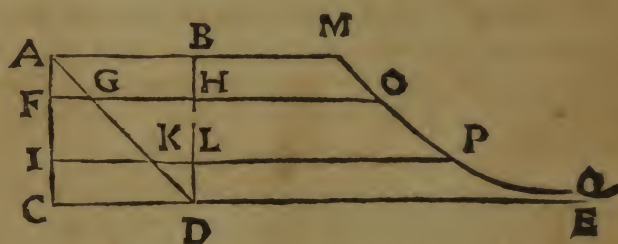
Propriè igitur non datur focus pro speculo spherico, BAN, cum reflexio fiat in tota, AZ: verum si sumpserimus speculum circa, A, cuius arcus sit paucorum graduum, reflexio à toto speculo fiet serè circa Z, medium radij, DA. Similiter si arcus fasciæ, decerpta ex, BC, NH, propè, B N, fuerit paucorum graduum, deserviet pro illius foco punctum, A, cui proximè plures radij à dicta fasciâ reflectentur, cum reliqui à maiori fasciâ reflexi, ut à tota, BC, NH, abeant in infinitum versus, Q. Com. buret ergo speculum circa, Z, & fasciâ circa, A, quod & experientia demonstrat.

De

De solido infinitè longo æquali finito.

PROPOSITIO XXXVIII.

Solidum infinitè longum æquale finito per Indivisibilia facile exhibere.



17.6. Elé.

Sit parallelogrammum, $ACDB$, eius diameter, AD , in qua sumptis quocunq; pñctis, G, K , & ductis per ea parallelis ipsi, AB, CD , nempe, FGH, IKL , fiat, GH , ad, HF , vt, HF , ad, HO , in directum ipsi, HF . Similiter vt, KL , ad, LI , ita fiat, LI , ad, LP , ipsi, LI , in directum, & sic de cæteris, sitq; BM , æqualis, & in directum ipsi, BA , ac per puncta, M, O, P , &c. ducatur curua, quæ cum, C, D , indefinitè producta nunquam conueniet, si enim possibile est conuenire, vt in, Q , erit vt punctum, D , ad, DC , ita, DC , ad lineam finitam, quod est absurdum, erit ergo, CE , asymptotus, rectangulaque, ABM, GHO, KLP , æquabuntur per ordinem quadratis, AB, FH, IL . Si ergo parallelogrammum, CB , cum, triangulo, ABD , eleuetur vt, CB , cum, CB , constituat paralleleppipedum, & ABD , cum, $BDQM$, solidum, quod erit infinitè longum, nempe versus, Q ; erit præfatum paralleppipedum huic solido infinitè longo æquale, nam sicuti exempli gratia rectangulum, GHO ,

GHO, quod est vnum ex omnibus planis solidi sub, ABD, BDQM, æquatur quadrato, FH, quod est vnum ex omnibus planis paralleleppipedi sub, CB, & CB, ita omnia plana æquantur omnibus planis, at consequenter solidum sub, ABD, BMQD, quod est infinitè longum, æquatur paralleleppipedo sub, CB, & CB, finitæ magnitudinis. Inuentum ergo est, quod opus erat.

17. 6. Elē.

3. Excr. I.

SCHOLIUM.

SI vice diametri, AD, ducantur quacunque diagonales ab, A, ad, D, orientur infinita solida infinitè longa, singula paralleleppipedo sub, CB, & CB, æqualia, quod eodem modo patet.

De Hydracontisterio, hoc est
Vase aquarum eiaculario.

PROPOSITIO. XXXIX.

Prædictum Hydracontisterium construere.

CVM incidissem in illam machinam Hydraulicam, quæ extrahit, & projicit aquas meritò duarum rotularum, quarum dentes ita sibi adhærescunt, vt dum mouentur, vel ipsi aeri transitum interdican, & includuntur Vase ovali, vt pluribus notum est, cuius nescio quis fuerit inuentor: artificium summè admiratus sum. Sed visa est hæc machina maximam subire imperfectionem, ex eo quod confrica-

Yyy

ti

ti dentes, quàm citò conterantur, deturque transitus, & aeri, & aquæ, vnde inutilis fiat; præter summam difficultatem, quæ videbatur cōtingere posse in ipsius constructione. Quapropter mente cogitans, an id aliter fieri posset subuenit forma, quam infra describimus, quæ est, ni fallor, ad construendum faciliior, & confricatione potius perficitur, quàm vitietur; præterquam maxima violentia proijcit aquas, vnde propterea ipsum Vas Hydracontisterium, seu aquarum eiacularium appellauerim.

Hoc ergo Vas debet fieri ex materia durissima, & est capsula rotunda foris, & intus, licet intus non perfectè, vt mox patebit. Intrà datum Vas duo sunt frusta, quorum vnum est Tympanum, seu Cylindrus Vase ità inclusus, vt sit fundo perpendicularis, excentricus, prominens extra operculum Vasis, qui habet fixuram per axem æquali ductu, & latitudine in ipso incisam à superficie interiori fundi vsque ad interiorem operculi. Iuxta latitudinem fixuræ debet fieri Tabella, eiusdemque altitudinis, quæ per ipsam fixuram, dum Tympanum Manubrio conuertitur, susque, deque continuò reciproceratur, abradens superficiem interiorem Vasis, fundū, & operculum. Hinc enim eueniet, vt per quoddam foramen attracta aqua illa constricta in angustum locum egrediatur per aliud foramen, si modò Vas sit vndiq; clausum, ne aer intus penetrare possit. Sed hæc clariùs ex schemate fundi eiusdem Vasis puto intelligentur, quod nunc exhibemus in hac prima figura.

Sit ergo, ABCD, peripheria interior fundi prædicti Vasis, & in ea diameter, CLA, accepta autem circino, CL, quæ relinquat, LA, parvæ quantitatis, prout nobis placebit, inueniatur, BD, perpendicularis ipsi, AC, & æqualis, LC, quibus concurrentibus in, N, centro, N, intervallo, NL, describatur circulus, LHMK, qui quo minus excentricus erit, & maior, eo minor erit labor in operando. Similiter à puncto, B, vel ipsi vt cunque proximo vt, G, ducatur flexuosa linea, vt, GL, quæ poterit esse peripheria circuli cavitatis, quam artifex meliorem iudicabit. Vterius ductis, LQ, PM, parallelis, ac centrum intercipientibus, ab eoque æqualiter distantibus fiat, LRCSL, quæ repræsentabit formam.

Ta-

la, LC, dum morietur versus B, ita ut idcirco velocissimè, ac violentissimè per foramen, E, egredietur aqua. Et quia Tabella, si coneratur in, SC, semper magis adhærescet superficiæ Vasis interioris, quam abradit; Ideò dixi in usu hanc machinam perfectiorem fieri, licet nec ipsa careant suis difficultatibus.

Non in longiorem sermonem hanc difundimus doctrinam, quia peritus artifex, quæ deficiunt sua industria supplere poterit, tam circa diaphragma, ALP, quàm superficiem, GL, & cætera, quæ spectant, ad ipsam machinam, exquisitè laborandam. Hoc autem solùm moneo considerandum, esse, Tympanum egredi ex operculo, & ideò in egressu posse collum fieri in ipso operculo, & in parte exteriori, ut circa ipsum collum circumduci possit corium filo constringens & collum, & partem Tympani extantem extrà Vas, ne detur aeri ingressus.

Porrò ipsam machinam actu operantem in secunda figura videre potes, quàm ni satis explicavi

æqui, bonique consulas, cum
nouo impediatur morbo
quo & plura
alia

cogor hic prætermittere typographo
instante, & ad finem impressionis propere-
rante.





SCH.

S C H O L I U M.

Sed & tempus est, ut ab his Exercitationibus feriemur, Benigne lector, nè ultra modum prorogatus athleticus hic labor ex utili, qualem esse cupio, menti noxius euadat. In his plura menda, plures errores inuenies, tum ex inuitabili hoc defectu Typographiae, tum ex mei imbecillitate, & præcipue in Exercitatione Quinta, & Sexta, quo enim tempore imprimebantur earum correctioni incumbere non potui. Tabellam errorum non trado, sed eos tuo iudicio duxi relinquendos, cum aliquali adhibita diligentia facile dignosci possint. Denique si quis unquam ex his meis lucubrationibus aliquid utilitatis sibi comparauerit, ipsum rogabo, ut Deo Optimo Maximo mecum gratias referre velit, qui inter vitæ meæ tot arumnas, nedum hæc meditari, sed & aliqua ratione doctrinali, qualiscunque sit, ea disponere sua benignitate concesserit.

Exercitationum Geometricarum Finis.

Facultas Reuerendiss. P. Generalis,

Nos F. Gregorius Ferrarius à Cremona Congregationis Ieluatorum S. Hieronymi Generalis, Opus cui titulus est, *Exercitationes Geometricæ*, a nostro in Christo Filio Adm. R. P. F. Bonauentura Caualerio Priore Mascarellæ, Mathematicarum in almo Bononiensi Archigymnasio primario Professore, & Congregationis nostræ sacerdote elaboratum, cum nobis constet nihil contra fidem, aut bonos mores continere, vt publici Iuris effici possit, seruatis seruandis, facultatem concedimus.

Dat. Bonon. ex Conuentu nostræ Residentiæ SS. Hieronymi, & Eustachij. Die 15. Mensis Augusti. Anni 1646.

De sex hisce Geometricis Exercitationibus Doctissimi, & Eruditissimi Viri in omnibus Mathematicis Admodum Reuer. Patris Bonauenturae Caualerij ego infra scriptus Reuisor deputatus ab Eminentiss. D. Cardinali Ludouiso Archiepiscopo, hoc mihi dicendum suppetit eas esse omni admiratione, & laude dignissimas, quæ ingens non modo auctori vt reliqua eius opera, sed etiam Archigymnasio Bononiensi decus sint alaturæ, quibus etiam typis comissis, plenum vtilitatis valuerit literariæ Reipublice accessurum esse existimo.

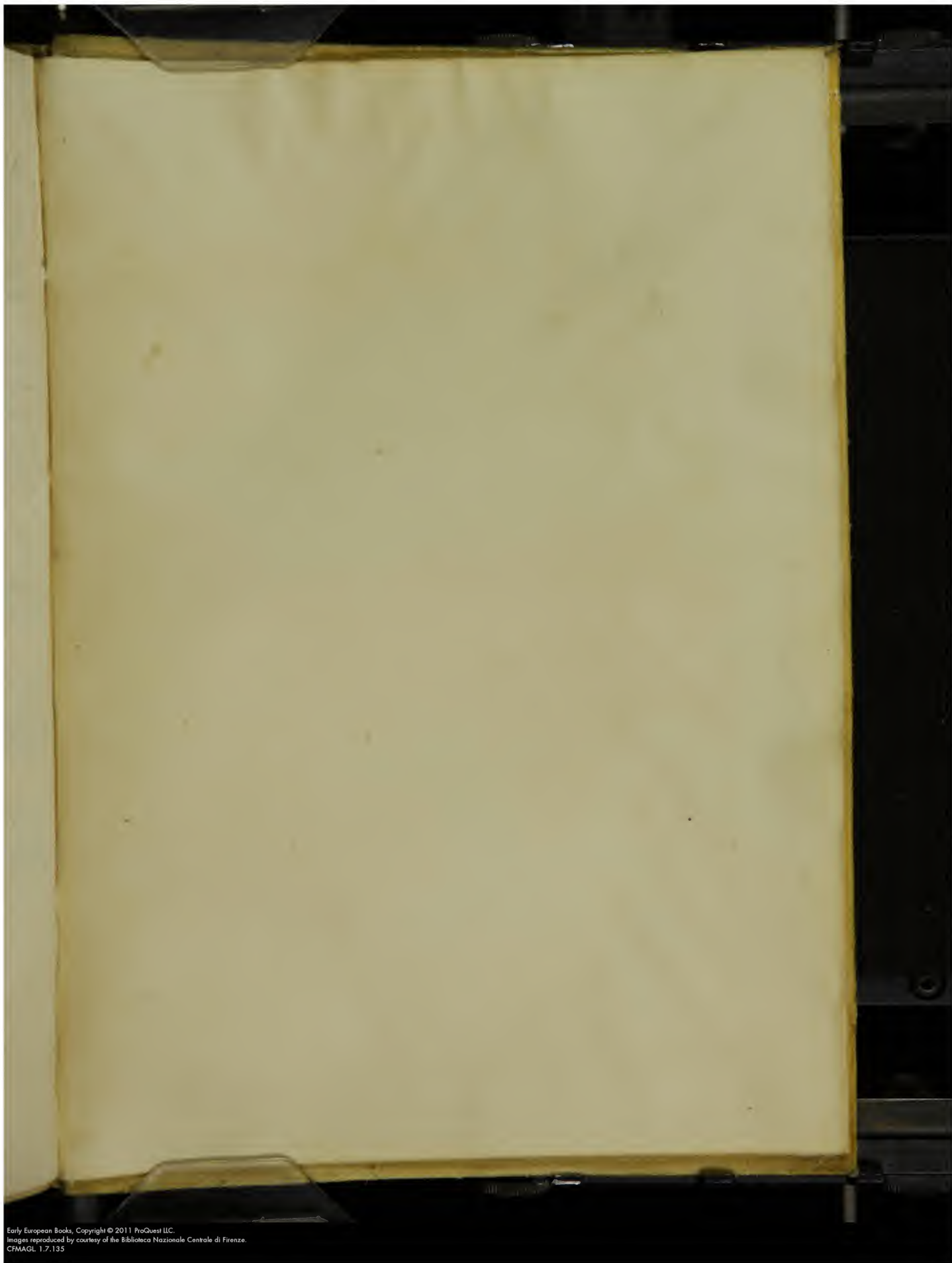
Ouidius Montalbanus Philof. & Med. Doct. Colleg. & Mathematicus in Archigym. Bonon. Ordinarius.

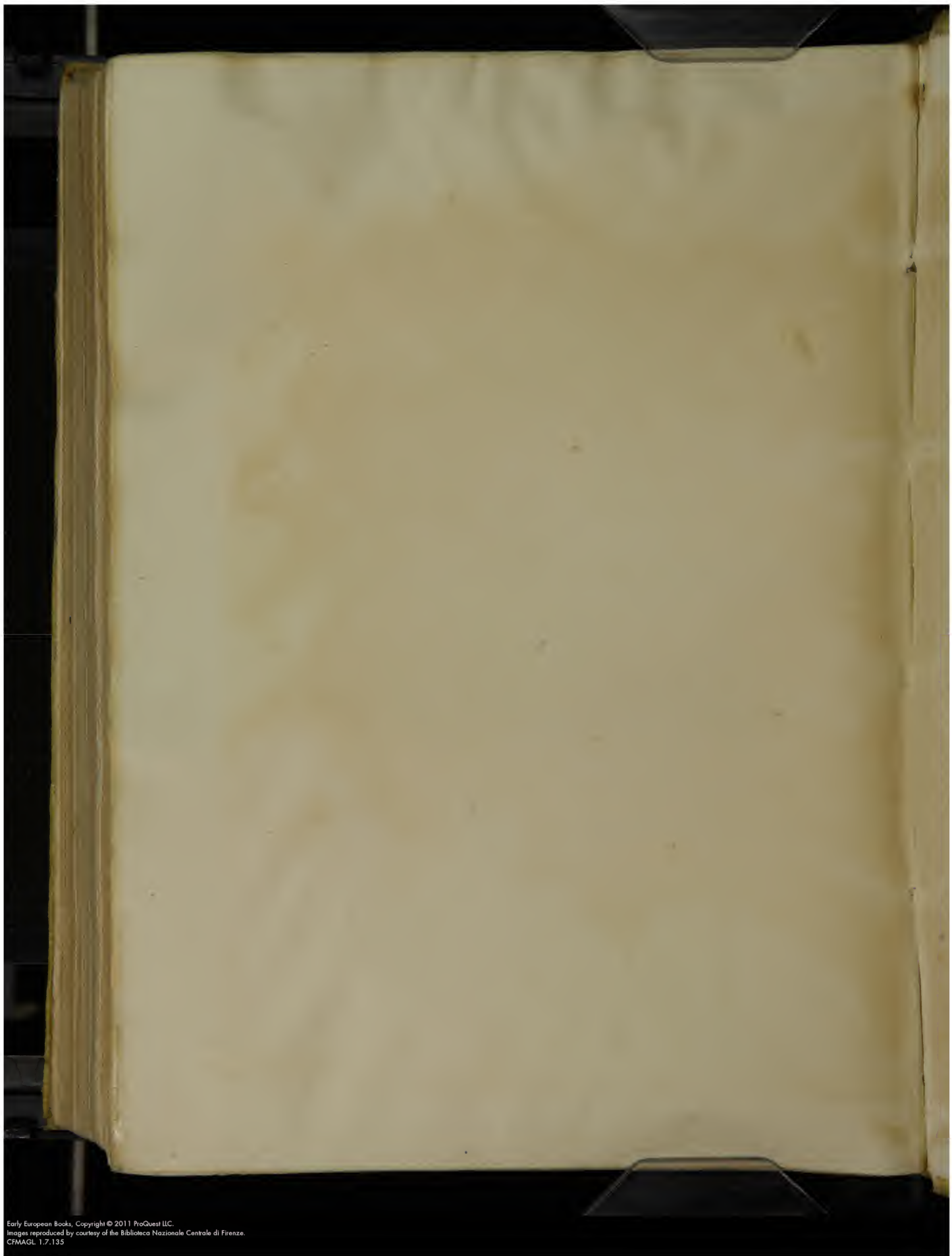
V. D. Alexius Ledesma Cleric. Regul. S. Pauli; & in Metropol. Bonon. Penitent pro eodem Eminentiss.

Vidit F. Io. Riccius pro Reuerendissimo P. Inquisit. Bonon. Librum, cui titulus est, *Exercitationes Geometricæ*, ab eximio Viro Admod. R. P. F. Bonauentura Caualerio, in Archigymnasio Bononiensi Mathematicarum Professore, opus præceptoris discipulus, & tanquam æterna memoria vt prælo committatur dignum censet.

Imprimatur.

F. Ludouicus Maria Calchus Magister, & Vicarius Generalis Sancti Officij Bononiæ.





005644418